

FÍSICA

APLICADA 1

Francisco Javier Duque Aldaz
Hugo Alfredo Pérez Benítez
Geovanny Javier Morocho Choca



FÍSICA MECÁNICA PRÁCTICA 1

Autores

Francisco Javier Duque Aldaz
Hugo Alfredo Pérez Benítez
Geovanny Javier Morocho Choca

Libro sometido a revisión de pares académicos.



Edición
Diagramación
Diseño
Publicación

Maquetación.

Grupo Compás

Cámara Ecuatoriana del Libro - ISBN-E: 978-9942-760-39-5

Guayaquil - Ecuador

Dedicatoria

A mi madre, a mi esposa, a mi hijo, a toda mi familia

Agradecimiento.

Gracias a la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad de Guayaquil, representada por su decano Ing. José Guillermo Cárdenas y la vice decana Ing. Mariana Navarro; por su constante apoyo y apertura a la investigación y al desarrollo constante en los distintos campos del saber.

A todas las personas que colaboraron en el desarrollo de esta obra: colegas, alumnos, compañeros, ya que de una u otra manera todos aportaron en este desarrollo, con sus críticas constructivas, con el afán de lograr un buen producto. A todos ellos, muchas gracias.

Javier duque

Dedicatoria:

Esta obra está dedicada para todos los docentes ecuatorianos y en especial a los que conforman nuestra ilustre alma mater, la Universidad de Guayaquil. Educadores que día a día, en los diferentes ambientes de aprendizaje entregan con mística, pasión y profesionalismo una educación de calidad con calidez, contribuyendo al mejoramiento de nuestra sociedad ecuatoriana.

Agradecimiento:

A todas las personas que contribuyeron de una u otra forma en la consecución de esta obra y en particular al mentalizador de la misma Ing. Javier Duque, por considerar mi modesta experiencia en la elaboración de este proyecto.

Gracias a la Universidad de Guayaquil, por motivar constantemente a todos sus docentes en alcanzar este tipo de logros académicos, gracias a las autoridades de la facultad de Ingeniería Química: Ing. José Guillermo Cárdenas, decano, Ing. Mariana Navarro vice decana.

Un agradecimiento especial a toda mi familia, gracias por su comprensión, paciencia y sobre todo el tiempo invertido que no pude devolver, gracias madre querida por haberme dado tu cariño y haberme formado en un hombre de bien, gracias papá por creer en todos nosotros estoy seguro que a pesar de ya no estar físicamente aun cuida de los tuyos.

Sobre todo Gracias a nuestro Dios todopoderoso, por darnos la sabiduría y la fortaleza necesaria para culminar con éxito esta obra. GRACIAS POR TODO A TODOS

Lic. Hugo Alfredo Pérez Benítez

Dedicatoria

A mi madre que siempre ha estado junto a mí, brindándome todo su apoyo, muchas veces poniéndose en el papel de padre. Al hombre que no estar junto a mí, pero siempre me está cuidando y guiando desde el cielo, mi padre.

Agradecimiento

A la Universidad Estatal de Milagro por acogerme, permitir recibir e impartir conocimiento.

Al Ing. Javier Duque por ser el visionario de esta obra, y permitirme ser parte de este grupo de trabajo.

Geovanny Javier Morocho Choca. Ing. Ind.

INTRODUCCIÓN

La mecánica es una disciplina perteneciente a las ciencias Naturales y Físicas, estudia los fenómenos considerados físicos, posee una íntima relación con las matemáticas y con la ingeniería en un modo menos riguroso, además es considerada la base para la mayoría de las ciencias de la ingeniería clásica, no tiene un carácter tan empírico pero en virtud de su rigor y razonamiento deductivo, se fundamenta y se apoya en la ciencia matemática. La mecánica estudia el movimiento de los cuerpos, la cual se divide en cinemática, estática y dinámica.

La presente obra revisa algunas temáticas de esta disciplina con un lenguaje matemático claro, sencillo y agradable para estudiantes y docentes, la misma, no pretende ser una obra completa de física mecánica pero con toda seguridad es un recurso didáctico que permitirá optimizar el proceso académico de aprendizaje para esta área de estudio.

Uno de los propósitos es entregar una herramienta de trabajo que evite el dictado, este es un recurso de practica la cual ahorrara tiempo y los estudiantes podrán afianzar el aprendizaje mediante el desarrollo de cada uno de estos ejercicios.

El texto contiene cuatros capítulos los cuales están estructurados considerando la realidad y el entorno que se desarrolla la actividad académica. Cada una de las estructuras tiene su concepto, favoreciendo, así la comodidad de las personas que lo utilizaran.

Los ejercicios desarrollados constituyen una base fundamental para despertar y desarrollar iniciativas en el estudiante y lograr un mejor razonamiento, de ahí que en varios de los ejercicios se plantee la necesidad de verificar su respuesta, de tal manera que el estudiante confié en sus conocimientos y no se quede únicamente en el resultado.

Contenido

OBJETIVOS CAP I.....	5
CAPÍTULO I VECTORES.....	6
1.1. Componentes de vectores en 2D y 3D.....	8
1.2 Cálculo de componentes.....	16
1.3 Cálculo de magnitud.....	17
1.4 Cálculo del vector unitario.....	19
1.5 Cálculo de ángulos directores.....	29
1.6 Método del paralelogramo.....	31
1.7 Teorema del coseno.....	44
OBJETIVOS CAP II.....	52
CAPITULO II MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA.....	53
2.1 Aceleración media e instantánea,.....	55
2.2 Aceleración.....	56
2.3. Movimiento con aceleración constante.....	59
2.4 El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.....	59
2.5. Caída libre.....	67
2.6. Lanzamiento vertical hacia arriba.....	75
2.7. Lanzamiento vertical hacia abajo.....	81
OBJETIVOS CAP III	92
CAPITULO III MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES	92
3.1. Tiro Parabólico.....	94
3.2 Tipos de movimiento parabólico.....	94
3.3 Ecuaciones del movimiento parabólico.....	95
3.4 Velocidad Relativa.....	122
OBJETIVOS CAP IV.....	131
CAPITULO IV LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON	131
4.1.1 Primera ley de Newton	133
4.1.2 Segunda ley de Newton	134

4.1.3	Tercera ley de Newton	134
4.2.	Fuerzas e interacciones.....	135
4.2.1	Interacción por contacto.....	136
4.2.2	Interacción a distancia.....	134
4.3	Masa y peso	161
4.4.	Fuerza de fricción	170
5	APÉNDICE.....	182
6	BIBLIOGRAFIA	193



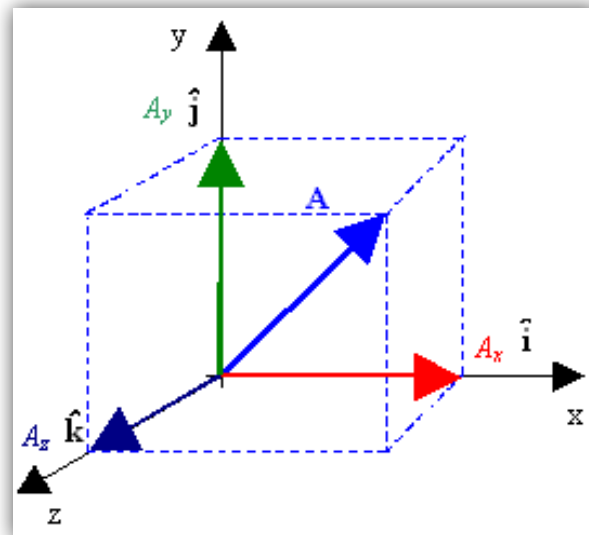
CAPÍTULO I

OBJETIVOS

- Definir un vector y diferenciar cantidades escalares de las cantidades vectoriales.
- Saber lo que es un vector y distinguir entre cantidades escalares y vectoriales
- Conocer las propiedades básicas de los vectores
- Sumar y restar vectores en un plano usando el método gráfico
- Sumar y restar vectores en un plano usando el método analítico
- Hallar el producto escalar interno de dos vectores en un plano
- Resolver problemas reales traduciéndolos al lenguaje vectorial en un plano. En particular realizar mediciones utilizando operaciones con vectores.

CAPÍTULO I

VECTORES



Un vector puede utilizarse para representar una **magnitud física**, quedando definido por un **módulo** y una dirección u orientación. Su expresión geométrica consiste en segmentos de recta dirigidos hacia un cierto lado, asemejándose a una **flecha**. La **velocidad** y la **fuerza** son dos ejemplos de magnitudes vectoriales.

Dentro de este ámbito científico, y también de las Matemáticas, se hace necesario dejar patente que existe una gran variedad de vectores. De tal manera, que podemos hablar de fijos, paralelos, deslizantes, opuestos, concurrentes, libres o colineales, entre otros muchos más.

De la misma forma hay que subrayar que se pueden llevar a cabo un importante número de operaciones con dichos elementos. Entre las más frecuentes se encuentra la suma, el producto por un escalar, la obtención de una derivada ordinaria, las descomposiciones, el ángulo entre dos vectores o la derivada de tipo covariante.

INTRODUCCIÓN

Se llama vector a todas aquellas magnitudes físicas que, definidas en un sistema de referencia, presentan módulo (también llamado longitud) y dirección (u orientación). Las magnitudes vectoriales se distinguen de las magnitudes escalares, que solo requieren de un número y de cierta unidad de medida para ser definidas (como la presión, el volumen, la temperatura, tiempo, la carga eléctrica, el área, la energía, la masa, etc.).

En un sentido puramente matemático, sin embargo, un vector no puede definirse a partir de módulo y dirección, sino que se considera a los vectores como elementos de un espacio vectorial. Esto es así ya que, matemáticamente hablando, pueden existir vectores en espacios de dimensión infinita, donde no pueden representarse longitudes ni orientaciones.

En particular, se los define como una dupla de números reales que definen las componentes del vector. La representación que se utiliza para representar a un vector en un espacio de n dimensiones es:

$$v = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Para que un vector matemático pueda ser considerado también como un vector físico, los valores numéricos de sus componentes deben transformarse de acuerdo con ciertas relaciones de carácter fijo, además de que deben de ser medidas por diferentes observadores. Además, los vectores pueden sumarse entre sí, dando origen a un nuevo vector resultante, o bien multiplicarse por un valor escalar.

Elementos de un vector

Para definir a un vector de manera completa, se deben especificar tres características que distinguen a un vector de otro:

El módulo: que viene determinado por la longitud o largo del segmento de recta.

La dirección: que viene determinado por la orientación que presenta la recta en el plano.

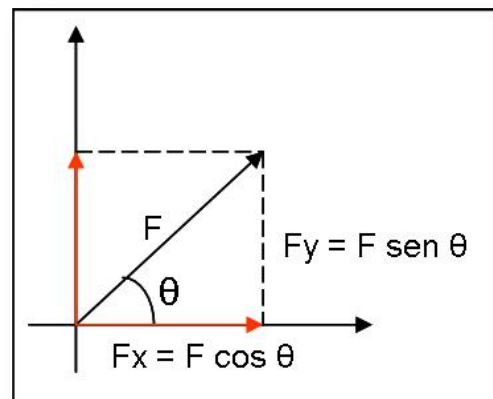
El sentido: que viene determinado por el origen y el extremo final del segmento de recta.

VECTORES

1.1. Componentes de vectores en 2D y 3D.

Vectores en 2D

Un vector físico es una magnitud física caracterizada mediante un punto de aplicación u origen, una magnitud o módulo, una dirección y un sentido; o alternatively por un número de componentes independientes, tales que las componentes medidas por diferentes observadores sean relacionados de manera sistemática. Magnitud o módulo: Determina el tamaño del vector.



Dirección: Determina la recta en el espacio en que se ubica el vector.

Sentido: Determina hacia qué lado de la recta de acción apunta el vector.

Vectores en 3D

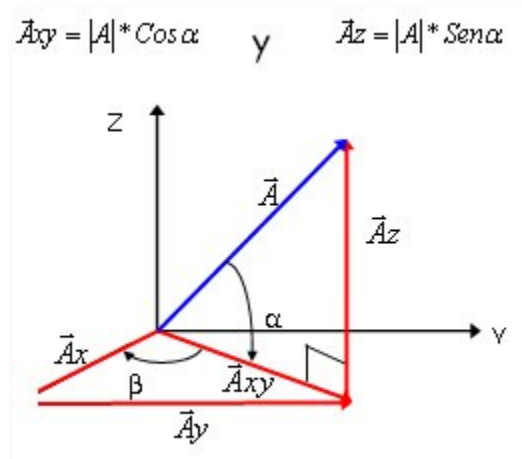
Un vector en el espacio es cualquier segmento orientado que tiene su origen en un punto y su extremo en el otro.

Una fuerza F en un espacio tridimensional se puede descomponer en componentes rectangulares F_x , F_y y F_z . Al simbolizar por medio de θ_x , θ_y , θ_z , respectivamente, los ángulos que F forma con los ejes x, y, z , se tiene:

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$



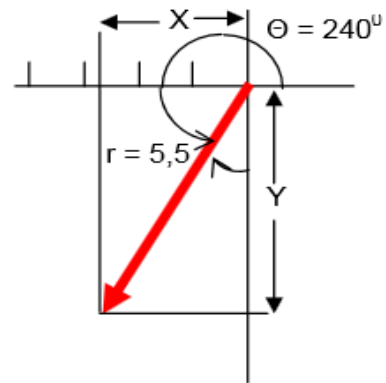
EJEMPLOS:

1. Las coordenadas polares de un punto $r = 5.5m$ y $\theta = 240^\circ$. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

Desarrollo

$$\begin{aligned}\cos(240) &= \frac{X}{5.5m} \\ X &= 5.5m[\cos(240)] \\ X &= 5.5m(-0.5) \\ X &= -2.75m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(240) &= \frac{Y}{5.5m} \\ Y &= 5.5m[\sin(240)] \\ Y &= 5.5m(-0.866) \\ Y &= -4.76m\end{aligned}$$



2. Si las coordenadas rectangulares y polares de un punto son $(2, y)$ y $(r, 30^\circ)$. Determine y y r .

Desarrollo

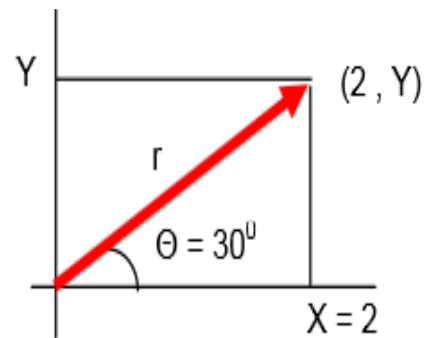
Coordenadas cartesianas: $(2, y)$

Coordenadas polares: $(r, 30^\circ)$

$$\begin{aligned}\tan(30) &= \frac{y}{2} \\ y &= 2 \tan(30) \\ y &= 2(0.5773) \\ y &= 1.15 u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(30) &= \frac{2}{r} \\ r &= 2 \sec(30) \\ r &= 2(0.866)\end{aligned}$$

$$r = 2.3 u$$



3. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares $(2.5m, 30^\circ)$ y $(3.8m, 120^\circ)$. Determine:

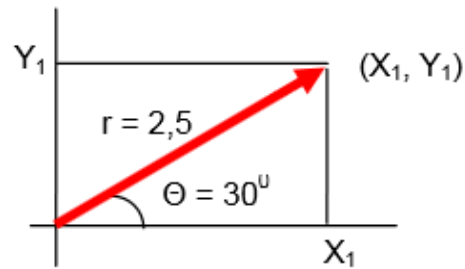
- Las coordenadas cartesianas de estos puntos.
- la distancia entre los dos puntos.

DesarrolloPara P_1

$$\text{Sen}(30) = \frac{y_1}{2.5m}$$

$$y_1 = 2.5m \text{ sen}(30)$$

$$y_1 = 1.25 m$$

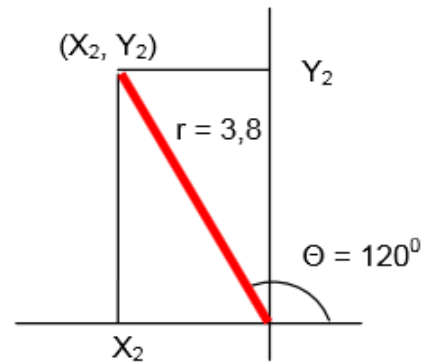


$$\text{Cos}(30) = \frac{x_1}{2.5m}$$

$$x_1 = 2.5m \text{ Cos}(30)$$

$$x_1 = 2.16 m$$

$$P_1 (2.16, 1.25)m$$

Para P_2

$$\text{Sen}(120) = \frac{y_2}{3.8m}$$

$$y_2 = 3.8m \text{ sen}(120)$$

$$y_2 = 3.29 m$$

$$P_2 (-1.9, 3.29)m$$

$$\text{Cos}(120) = \frac{x_2}{3.8m}$$

$$x_2 = 3.8m \text{ Cos}(120)$$

$$x_2 = -1.9 m$$

Distancia entre dos puntos

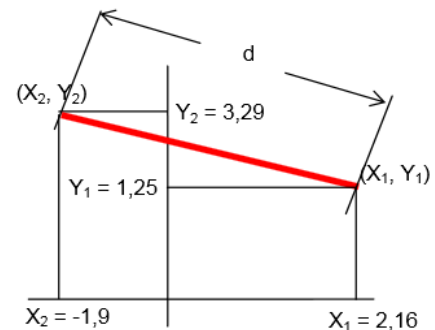
$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-1.9 - 2.16)^2 + (3.29 - 1.25)^2}m$$

$$d = \sqrt{20.6416} m$$

$$d = 4.54m$$



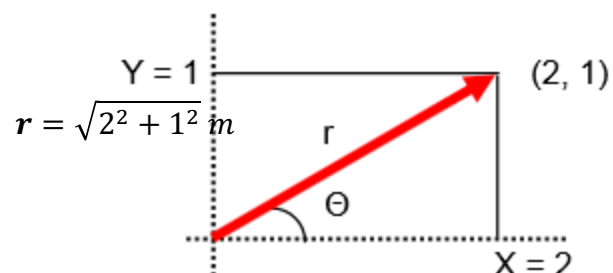
4. Una mosca se para en la pared de un cuarto. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas de dos dimensiones. Si la mosca está parada en el punto que tiene coordenadas $(2, 1)m$, a) ¿Qué tan lejos está la esquina del cuarto? b) ¿Cuál es su posición en coordenadas polares?

Desarrollo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{5} m$$

$$r = 2.23 m$$



$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 26.56^\circ$$

5. Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas cartesianas $(2, -4)m$ y $(-3, 3)m$. Determine: a) la distancia entre

Desarrollo

$$P_1 (2, -4)m$$

$$P_2 (-3, 3)m$$

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

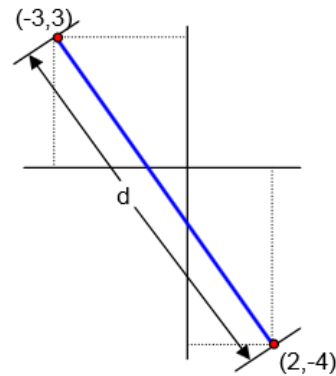
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (3 + 4)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 49}$$

$$d = \sqrt{74}$$

$$d = 8.6 m$$

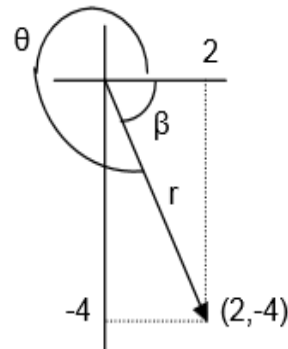


$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-4)^2}$$

$$r = \sqrt{20}$$

$$r = 4.47m$$



$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{2}\right)$$

$$\beta = \tan^{-1}(-2)$$

$$\beta = -63.43^\circ$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2}$$

$$r = \sqrt{18}$$

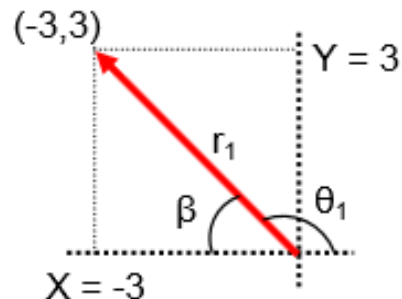
$$r = 4.24 m$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-3}\right)$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\theta_1 = 180^\circ - \beta$$

$$\theta_1 = 135^\circ$$



6. Un avión vuela 200 Km rumbo al oeste desde la ciudad A hasta la ciudad B y despues 300 Km en la dirección de 30° al Noroeste de la ciudad B hasta la ciudad C. Determinar:

- En línea recta, que tan lejos está la ciudad C de la ciudad A
- Respecto de la ciudad A en qué dirección está la ciudad C

Desarrollo

$$\cos(30) = \frac{B_x}{300}$$

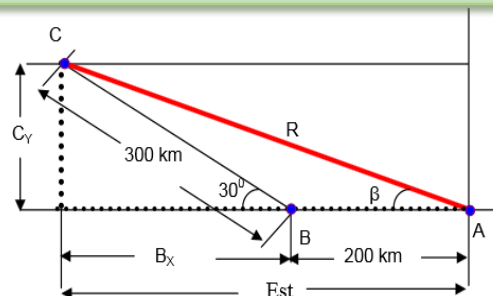
$$B_x = 300 \cos(30)$$

$$B_x = 259.8 \text{ Km}$$

$$R_x = B_x + 200m$$

$$R_x = 259.8 m + 200 m$$

$$R_x = 459.8 \text{ Km}$$



$$\begin{aligned}\text{Sen}(30) &= \frac{C_y}{300} \\ C_y &= 300 \text{ Sen}(30) \\ C_y &= 150 \text{ Km}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + C_y^2} \\ R &= \sqrt{(459.8)^2 + (150)^2} \\ R &= \sqrt{233916.04} \\ R &= 483.64 \text{ Km}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tg}(\beta) &= \frac{C_y}{R_x} \\ \beta &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{150}{483.64}\right) \\ \beta &= 18.06^\circ\end{aligned}$$

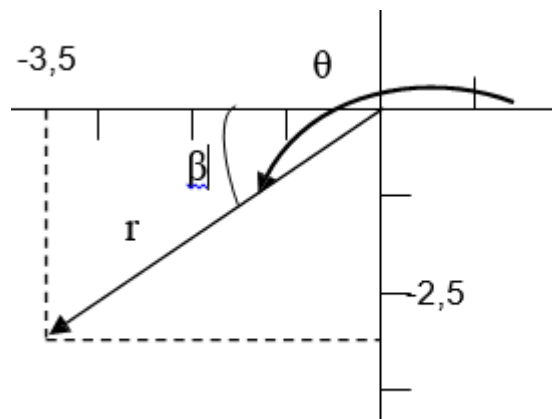
R//: La ciudad C está a 483.64 Km de la ciudad A. La Ciudad C está a 18.06° al Noroeste de la ciudad A

7. Las coordenadas cartesianas de un punto del plano xy son $(x, y) = (-3.5, -2.5)m$ como se muestra en a figura. Hállense las coordenadas polares de este punto.

Desarrollo

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\ (-3.5)^2 + (-2.5)^2 &= r^2 \\ 12.25 + 6.25 &= r^2 \\ 18.50 &= r^2 \\ 4.3 &= r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= 180^\circ + \beta \\ \theta &= 180^\circ + \text{tg}^{-1}\left(\frac{2.5}{3.5}\right) \\ \theta &= 180^\circ + 35.52^\circ \\ \theta &= 215.52^\circ\end{aligned}$$



**8. Calcular el módulo del vector resultante de los siguientes vectores:
 $A = (2, 1, -2)$, $B = (1, -3, 1)$ y $C = (-1, 1, -1)$**

Desarrollo

$$\begin{aligned}R &= A + B + C \\ R &= (2, 1, -2) + (1, -3, 1) + (-1, 1, -1) \\ R &= (2 + 1 - 1; 1 - 3 + 1; -2 + 1 - 1) \\ R &= (2, -1, -2) \\ |R^2| &= (2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 \\ |R^2| &= 4 + 1 + 4 \\ |R| &= 3\end{aligned}$$

9. Si se tiene los vectores $A = (1, 2, -2)$ y $B = (3, -1, 2)$. Calcular el producto escalar $A \cdot B$

Desarrollo

$$A \cdot B = (1)(3) + (2)(-1) + (-2)(2)$$

$$A \cdot B = 3 - 2 - 4$$

$$A \cdot B = -4$$

10. Encontrar las componentes cartesianas de un vector $\vec{V}$ cuya magnitud vale 80 y su dirección es de 230°

Desarrollo

$$V_x = V \cos \theta$$

$$V_x = (80) \cos(230^\circ)$$

$$V_x = -51.423$$

$$V_y = V \sin \theta$$

$$V_y = 80 \sin(230^\circ)$$

$$V_y = -61.284$$

11. Dado los vectores $F_1 = 7i - 20j$ y $F_2 = 2i + 24j$, encontrar la magnitud, dirección y vector unitario de la resultante $F_1 + F_2$

Desarrollo

$$R = F_1 + F_2$$

$$R = (7i - 20j) + (2i + 24j)$$

$$R = 9i + 4j$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$R = \sqrt{9^2 + 4^2}$$

$$|R| = 9.85$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4}{9} \right)$$

$$\alpha = 23.96^\circ$$

$$\mu_x = \frac{R_x}{|R|}$$

$$\mu_x = \frac{9}{\sqrt{97}} i$$

$$\mu_y = \frac{R_y}{|R|}$$

$$\mu_y = \frac{4}{\sqrt{97}} j$$

12. Sobre el anclaje indicado en la figura, actúan tres fuerzas tal como se indica, determinar magnitud y dirección de la resultante $R = F_1 + F_2 + F_3$

$$\sum F_x = 220 \cos(293^\circ) + 150 \cos(72^\circ) + 30 \cos(172^\circ)$$

$$\sum F_x = 102.61 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 220 \sin(293^\circ) + 150 \sin(72^\circ) + 30 \sin(172^\circ)$$

$$\sum F_y = -55.68 \text{ N}$$

$$|R| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(102.61)^2 + (-55.68)^2}$$

$$|R| = 116.74$$

$$\alpha = 360 - \beta$$

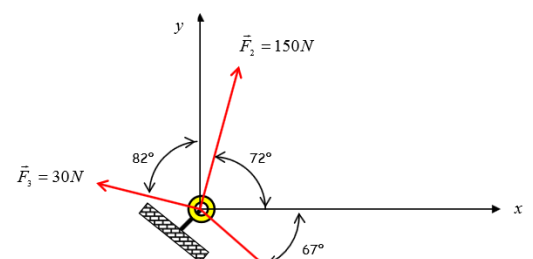
$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{55.68}{102.61} \right)$$

$$\beta = 28.49^\circ$$

$$\alpha = 360 - 28.49$$

$$\alpha = 331.51$$



13. Determinar magnitud y dirección del Vector $R = 5i - 8j + 10k$
Desarrollo

$$|R| = \sqrt{5^2 + 8^2 + 10^2}$$

$$|R| = 13.75$$

La dirección del vector se obtiene aplicando la fórmula de los cosenos directores, es decir:

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{|R|}$$

$$\cos \theta_x = \frac{5}{13.75}$$

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13.75}\right)$$

$$\theta_x = 68.67^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{|R|}$$

$$\cos \theta_y = \frac{-8}{13.75}$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{13.75}\right)$$

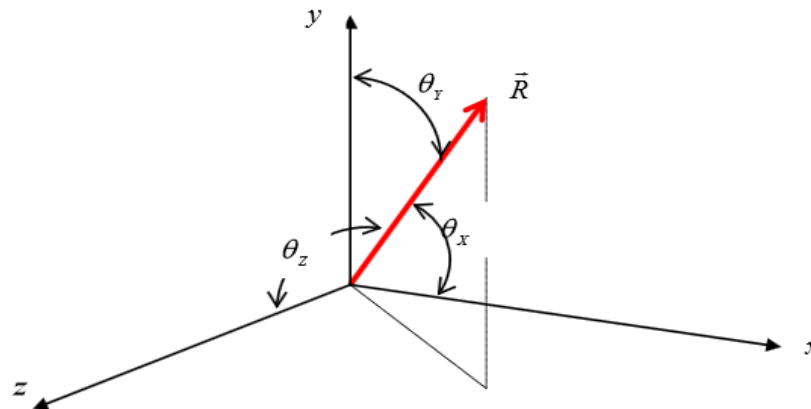
$$\theta_y = 125.58^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{|R|}$$

$$\cos \theta_z = \frac{10}{13.75}$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13.75}\right)$$

$$\theta_z = 43.33^\circ$$


14. En los vectores $F_1 = -5i + 8j - 15k$, $F_2 = -7i - 12j + 3k$ y $F_3 = 6i + 9j + 2k$, obtener magnitud y dirección de la resultante $R = F_1 + F_2 + F_3$
Desarrollo

$$R = (-5i + 8j - 15k) + (-7i - 12j + 3k) + (6i + 9j + 2k)$$

$$R = -6i + 5j - 10k$$

$$|R| = \sqrt{(-6)^2 + (5)^2 + (-10)^2}$$

$$|R| = 12.69$$

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{12.69}\right)$$

$$\theta_x = 118.22^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{5}{12.69}\right)$$

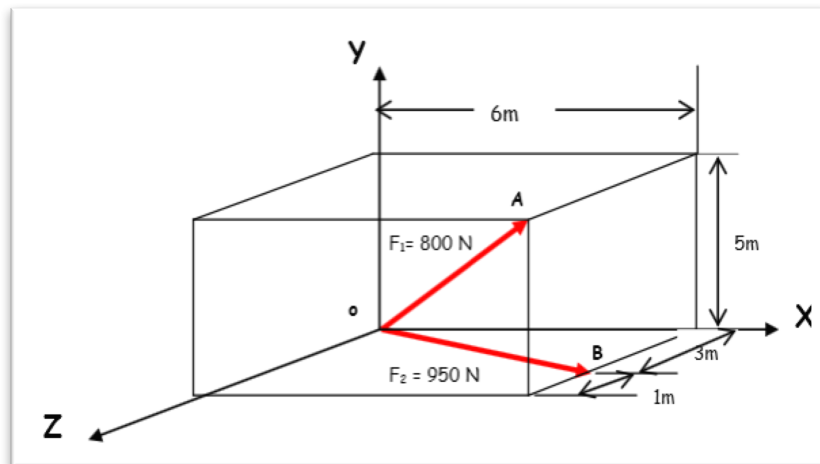
$$\theta_y = 66.79^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{-10}{12.69}\right)$$

$$\theta_z = 142^\circ$$

15. Para el sistema de fuerzas de la figura indicada, se pide determinar:

- Componentes Cartesianas de F_1
- Componentes Cartesianas de F_2
- Magnitud de Resultante $R = F_1 + F_2$
- Ángulos directores de R
- Vectores unitarios de R



1.2. Cálculo de componentes

Cuando se conoce la magnitud de una Fuerza y las coordenadas del origen y extremos de ésta, es conveniente utilizar el concepto de vector unitario para determinar sus componentes

Por definición se tiene que:

$\hat{F} = \frac{F}{|F|}$ al despejar F resulta $F = \hat{F}|F|$ pero para $F_1 = \overrightarrow{OA}$ y para $F_2 = \overrightarrow{OB}$. Entonces:

$$F_1 = \overrightarrow{OA}|F_1| \text{ y } F_2 = \overrightarrow{OB}|F_2|$$

Componentes para F_1

Como $F_1 = \overrightarrow{OA}|F_1|$ y observando las coordenadas del origen y extremo de F_1 , se puede reemplazar los valores correspondientes, es decir:

$$F_1 = 800N \frac{6i + 5j + 4k}{\sqrt{6^2 + 5^2 + 4^2}}$$

$$F_1 = (547.01i + 455.84j + 364.67k)N$$

Componentes para F_2

Como $F_2 = \overrightarrow{OB}|F_2|$ y observando las coordenadas del origen y extremo de F_2 , se puede reemplazar los valores correspondientes, es decir:

$$\mathbf{F}_2 = 800N \frac{6i + 0j + 3k}{\sqrt{6^2 + 3^2}}$$

$$\mathbf{F}_2 = (849.71i + 0j + 424.85k)N$$

1.3. Cálculo de magnitud

Las magnitudes físicas se miden usando un patrón que tenga bien definida esa magnitud, y tomando como unidad la cantidad de esa propiedad que posea el objeto patrón. Por ejemplo, se considera que el patrón principal de longitud es el metro en el Sistema Internacional de Unidades.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{R} = (547.01i + 455.84j + 364.67k) + (849.71i + 0j + 424.85k)$$

$$\mathbf{R} = (1396.72i + 455.84j + 789.53k)N$$

$$R = \sqrt{1396.72^2 + 455.84^2 + 789.53^2}N$$

$$R = 1667.92N$$

Ángulos Directores

$$\text{Ángulos } \theta_x, \theta_y, \theta_z \quad \theta_x = 33.18^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \left(\frac{455.84}{1667.92} \right)$$

$$\theta_y = 74.14^\circ$$

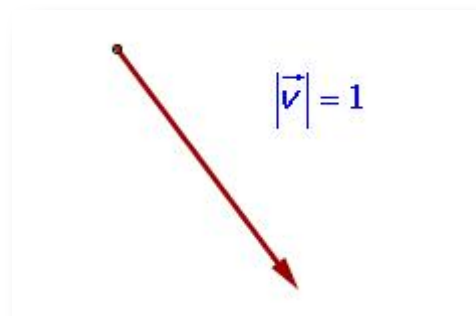
$$\theta_z = \cos^{-1} \left(\frac{789.53}{1667.92} \right)$$

$$\theta_z = 61.75^\circ$$

1.4. Cálculo del vector unitario

Los vectores son, en el terreno de la física, magnitudes definidas por su punto de aplicación, su sentido, su dirección y su valor. Según el contexto en el que aparecen y sus características, se clasifican de distinto modo.

La idea de vector unitario refiere al vector cuyo módulo es igual a 1. Cabe recordar que el módulo es la cifra coincidente con la longitud cuando el vector se representa en un gráfico. El módulo, de este modo, es una norma de la matemática que se aplica al vector que aparece en un espacio euclídeo.



$$\mu_R = \frac{R}{|R|} = \frac{R_x + R_y + R_z}{|R|}$$

$$\mu_R = \frac{1396.72i + 455.84j + 789.53k}{|1667.92|}$$

$$\mu_R = 0.837i + 0.273j + 0.473k$$

16. Dado los vectores $a = -7i + 4j - 11k$ y $b = 5i + 21j - 12k$, determinar su producto punto y el ángulo formado entre ellos

Desarrollo

El producto punto se obtiene aplicando la ecuación

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Reemplazando los valores numéricos

$$a \cdot b = (-7)(5) + (4)(21) + (-11)(-12) = 181$$

Para determinar el ángulo entre a y b , se debe conocer sus respectivos módulos, por lo tanto

$$|a| = \sqrt{(-7)^2 + (4)^2 + (-11)^2} = 13.64$$

$$|b| = \sqrt{(5)^2 + (21)^2 + (-12)^2} = 24.7$$

El ángulo formado entre a y b se obtienen aplicando la siguiente ecuación:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

Reemplazando los valores correspondientes se tiene:

$$\cos \theta = \frac{181}{(13.64)(24.7)}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.537)$$

$$\theta = 57.5^\circ$$

17. Determinar el valor de m de tal manera que los vectores $a = 3i - 9j + mk$ y $b = -5i - 8j + 10k$ resulten perpendiculares

Desarrollo

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto punto es igual a 0, por lo tanto:

$$a \cdot b = 0$$

Reemplazando los valores de cada vector resulta

$$(3)(-5) + (-9)(-8) + (10)m = 0$$

$$-15 + 72 + 10m = 0$$

$$10m = -57$$

$$m = -5.7$$

18. Determine el producto cruz entre $a = -2i + 11j + 5k$ y $b = 10i + 3j - 9k$

Desarrollo

El producto cruz se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Reemplazando las coordenadas para cada vector se obtiene:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 11 & 5 \\ 10 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

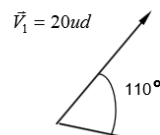
$$a \times b = (-99 - 15)i - (18 - 50)j + (-6 - 110)k$$

$$a \times b = -114 + 32j - 116k$$

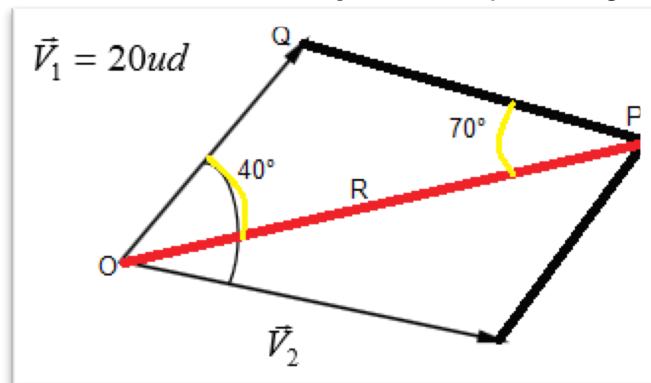
19. Dos vectores forman un ángulo de 110° y uno de ellos tiene $20u$ de longitud y hace un ángulo de 40° con el vector resultante de ambos. Determine la magnitud del segundo vector y la del vector resultante.

Desarrollo

Eligiendo arbitrariamente dos vectores V_1 y V_2 con las condiciones dadas, es decir:



Ahora trazamos la resultante utilizando el método del paralelogramo



Utilizando el teorema del seno en triángulo OPQ resulta:

$$\frac{\text{Sen}70^\circ}{V_1} = \frac{\text{Sen}40^\circ}{V_2}$$

$$\frac{\text{Sen}70^\circ}{20} = \frac{\text{Sen}40^\circ}{V_2}$$

$$V_2 = 20 \frac{\text{Sen}40^\circ}{\text{Sen}70^\circ}$$

$$V_2 = 13.68u$$

$$\frac{\text{Sen}70^\circ}{V_1} = \frac{\text{Sen}70^\circ}{R}$$

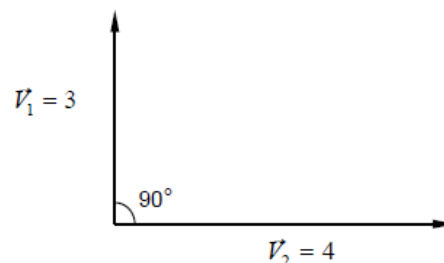
Cancelando los $\text{Sen}70^\circ$ se obtiene finalmente

$$R = 20u$$

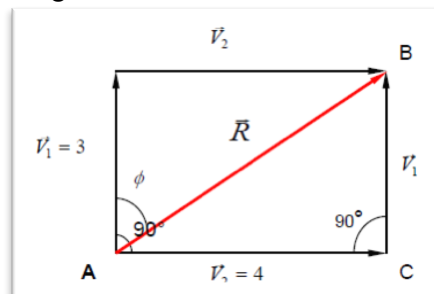
20. Dos vectores de longitud 3 y 4 forman un ángulo recto, calculo por el teorema del coseno la longitud del vector resultante y el ángulo que forma este con el vector de menor longitud.

Desarrollo

Según información, se tiene dos vectores V_1 y V_2 formando un ángulo recto, es decir:



Por el método del paralelogramo resulta:



Utilizando el teorema del coseno en el triángulo ACB se obtiene:

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\text{Cos}90^\circ$$

$$R^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\text{Cos}90^\circ \quad \text{Pero } \text{Cos}90^\circ = 0$$

$$R^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)(0)$$

$$R^2 = 9 + 16 - 0$$

$$R^2 = 25$$

$$R = 5$$

$$\text{tg}\phi = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

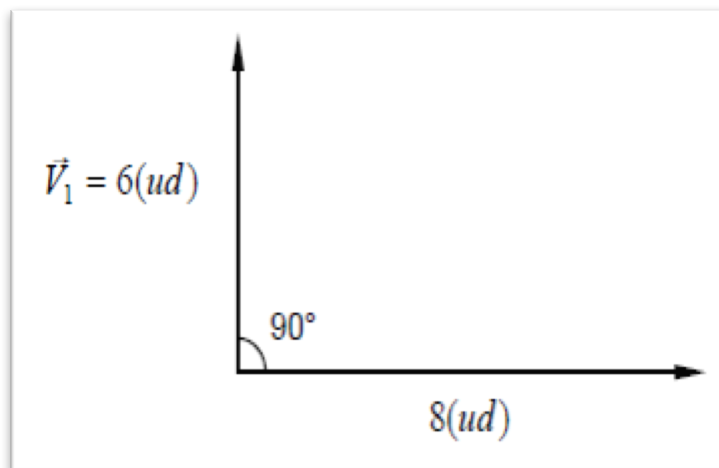
$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\phi = 53.13^\circ$$

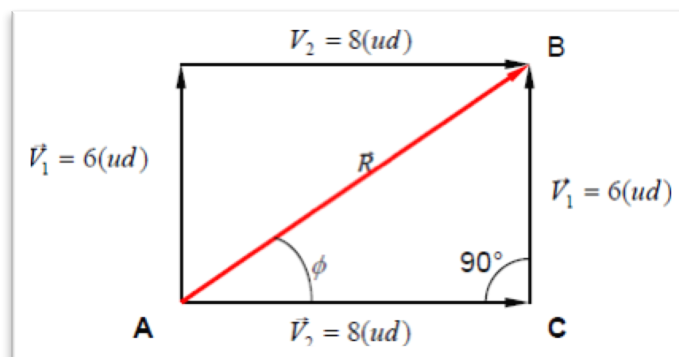
21. Dos vectores de longitud $6u$ y $8u$ forman un ángulo recto, calculo por el teorema del seno la longitud del vector resultante y el ángulo que forma este con el vector de mayor longitud.

Desarrollo

Según información, se tiene dos vectores V_1 y V_2 formando un ángulo recto, es decir:



Representando el paralelogramo para estos vectores, se tiene:



La solución a este problema es similar a la del problema anterior, la diferencia es que en éste calcularemos primero el ángulo ϕ y luego utilizaremos el teorema del seno para determinar la magnitud de la Resultante R , es decir:

Por la razón tangente se tiene:

$$\operatorname{tg} \phi = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{6}{8} \right) \quad \phi = 36.87^\circ$$

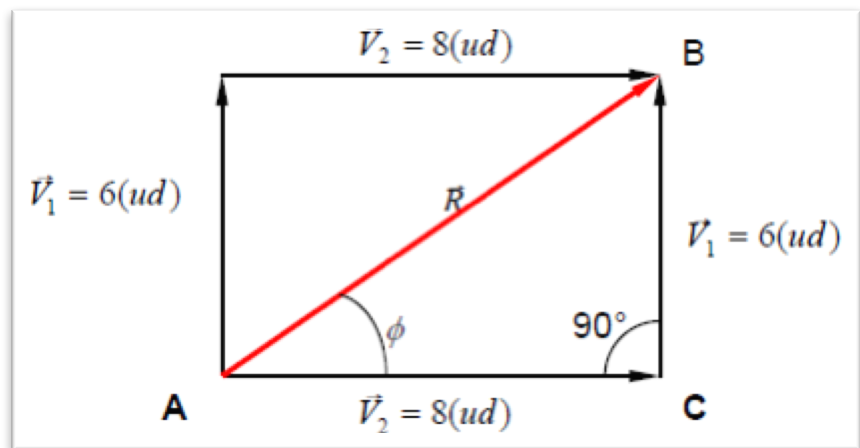
Ahora aplicamos el teorema del seno en el triángulo ACB para obtener el valor de la resultante R , es decir:

$$\frac{\text{Sen}90^\circ}{R} = \frac{\text{Sen}36.87^\circ}{V_1}$$

$$R = V_1 \frac{\text{Sen}90^\circ}{\text{Sen}36.87^\circ}$$

$$R = 6 \frac{\text{Sen}90^\circ}{\text{Sen}36.87^\circ}$$

$$R = 10u$$



22. Dado los vectores

$$A = 4i + 5j$$

$$B = 3i + 6j$$

$$C = 9k$$

a) Calcule $A \times B$

b) Grafique este resultado

c) Calcule $\frac{A \times B}{2}$, interprete.

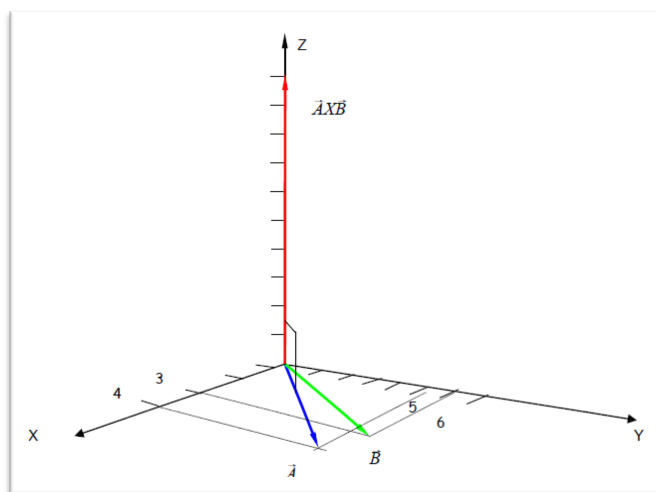
d) Calcule $(A \times B) \cdot C$, interprete

Desarrollo

$$a) A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 0)i - (0 - 0)j + (24 - 15)k$$

$$A \times B = 9k$$

b) Gráfica



$$c) \frac{|A \times B|}{2} = \frac{\sqrt{9^2}}{2} = \frac{9}{2}$$

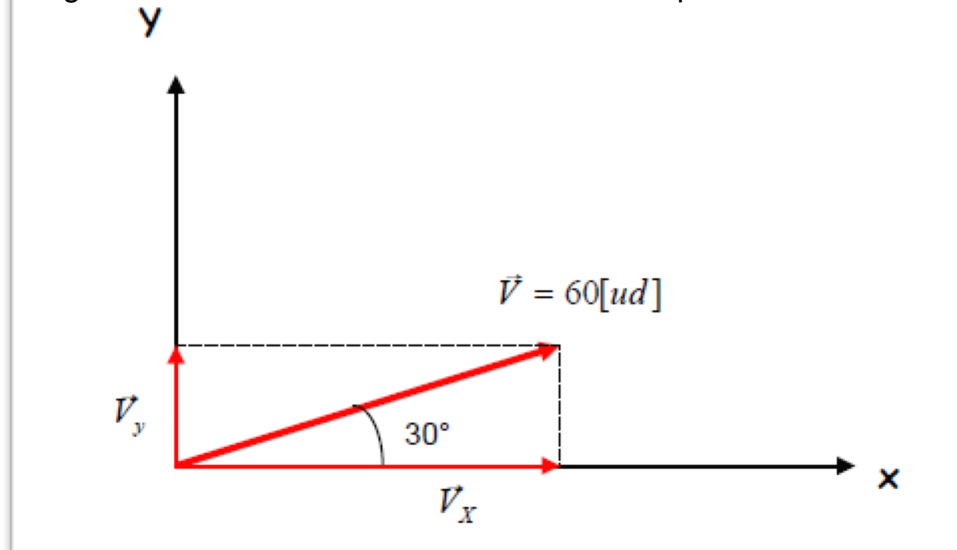
$$\frac{|A \times B|}{2} = 4.5$$

$$d) (A \times B) \cdot C = (0i + 0j + 9k) \cdot (0i + 0j + 9k)$$

$$(A \times B) \cdot C = 81$$

23. Un vector tiene una magnitud de $60u$ y forma un ángulo de 30° con la dirección positiva del eje x . Encuentre sus componentes cartesianas.

Representado gráficamente la información dada se tiene que:



Donde V_x y V_y son las componentes cartesianas del vector V .

Utilizando:

$$\cos 30^\circ = \frac{V_x}{V}$$

$$V_x = V \cos 30^\circ$$

$$V_x = 60 \cos 30^\circ$$

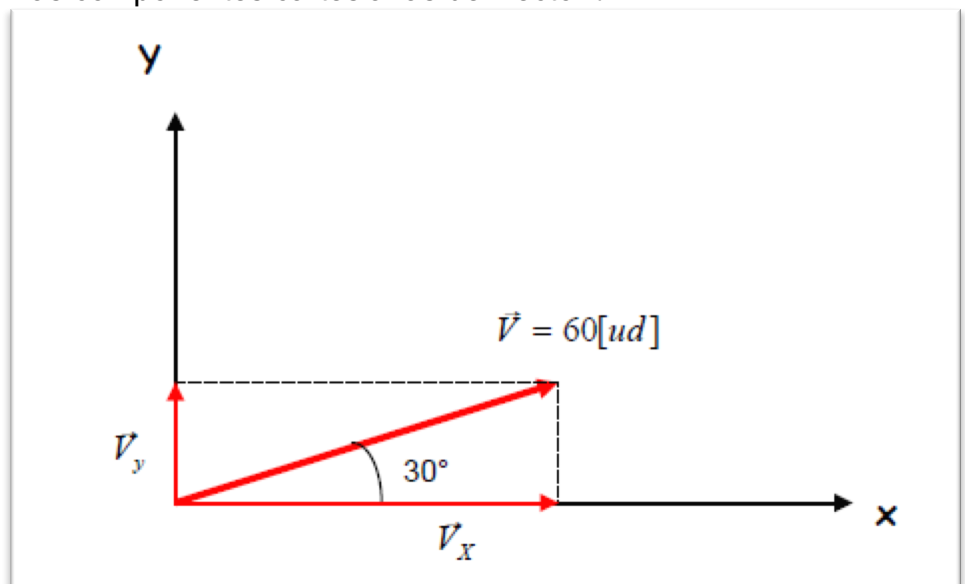
$$V_x = 51.96 u$$

$$\sin 30^\circ = \frac{V_y}{V}$$

$$V_y = V \sin 30^\circ$$

$$V_y = 60 \sin 30^\circ$$

$$V_y = 30u$$



24. El vector resultante de dos vectores tiene $10u$ de longitud y forma un ángulo de 35° con uno de los vectores componentes, el cual tiene $12u$ de longitud. Encontrar la magnitud del otro vector y el ángulo entre ellos

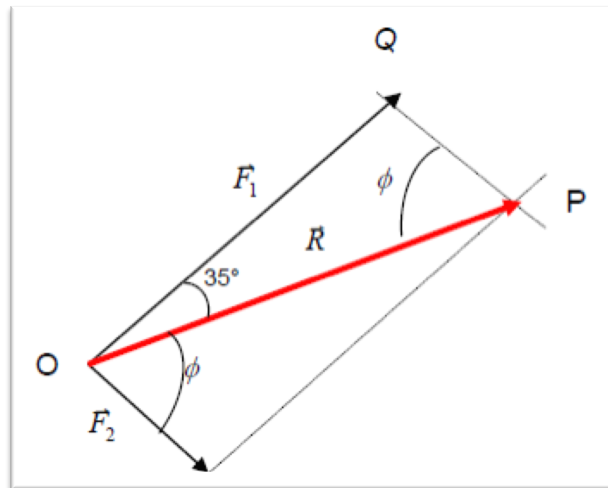
Desarrollo

Eligiendo arbitrariamente los dos vectores componentes F_1 y F_2 con las condiciones dadas, se puede graficar:

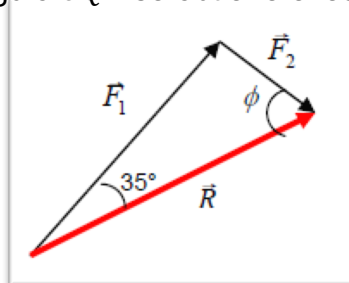
$$F_1 = 12u$$

$$R = 10u$$

$$F_2 = ?$$



Eligiendo el triángulo OQP se obtiene el esquema:



Como se conoce los dos lados del triángulo OPQ y el ángulo comprendido entre ellos, es posible aplicar el teorema del coseno para determinar el valor de F_2 , es decir:

$$F_2^2 = R^2 + F_1^2 - 2RF_1\cos(35^\circ)$$

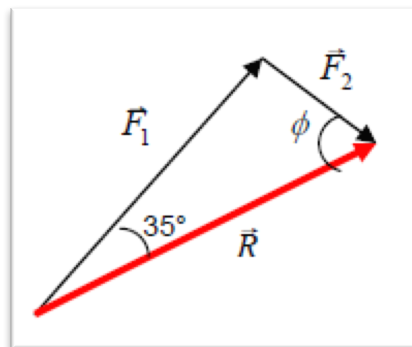
$$F_2^2 = 10^2 + 12^2 - 2(10)(12)\cos(35^\circ)$$

$$F_2^2 = 100 + 144 - 196.596$$

$$F_2^2 = 47.404$$

$$F_2 = \sqrt{47.404}$$

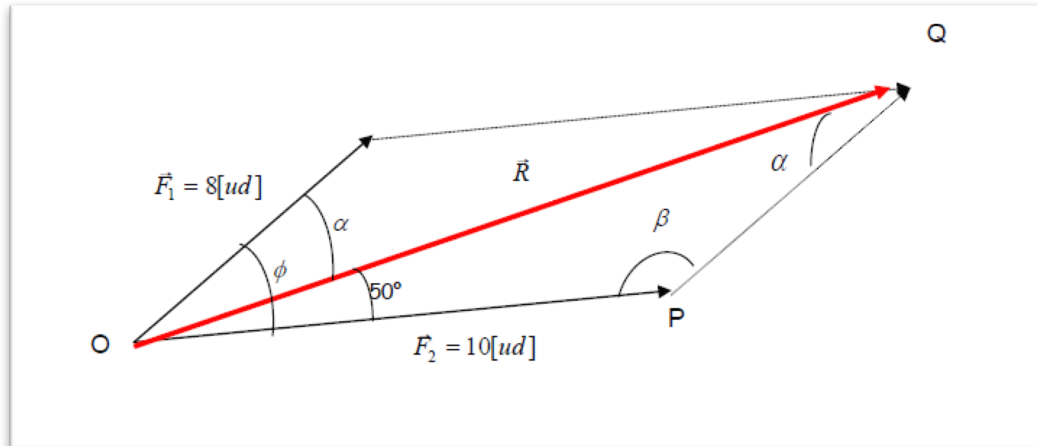
$$F_2 = 6.88u$$



25. Calcular el ángulo entre dos vectores de $8u$ y $10u$ de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50° con el vector mayor. Calcular la magnitud del vector resultante.

Desarrollo

Sean F_1 y F_2 los vectores, entonces es posible construir la siguiente gráfica.



El ángulo formado por los dos vectores F_1 y F_2 es $\phi = \alpha + 50^\circ$. Según los datos es posible aplicar el teorema del seno en el triángulo OPQ para determinar el valor del ángulo α . Es decir:

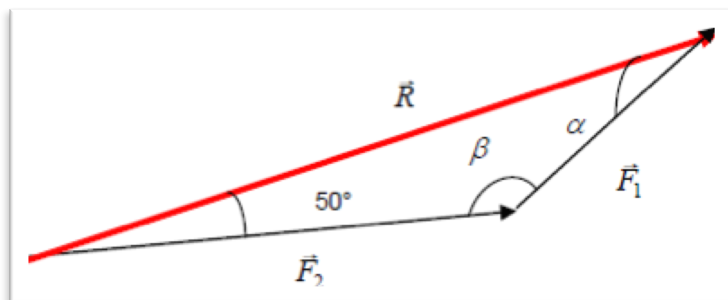
$$\frac{\text{Sen} \alpha}{F_2} = \frac{\text{Sen} 50^\circ}{F_1}$$

$$\frac{\text{Sen} \alpha}{10} = \frac{\text{Sen} 50^\circ}{8}$$

$$\text{Sen} \alpha = \frac{10}{8} \text{Sen} 50^\circ$$

$$\alpha = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{10}{8} \text{Sen} 50^\circ \right)$$

$$\alpha = 73.25^\circ$$

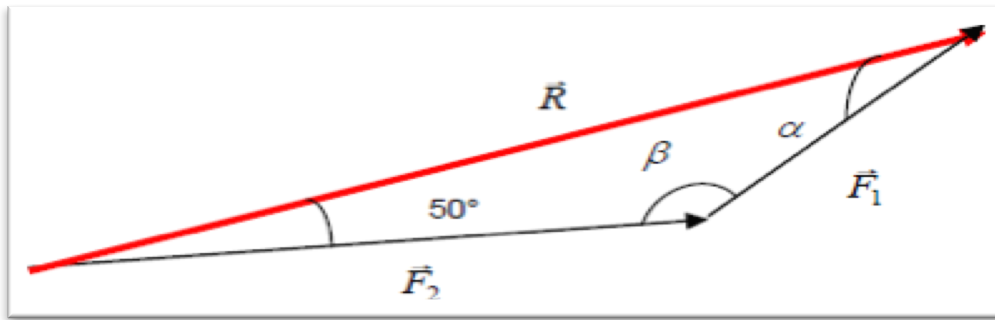


Por lo tanto el ángulo formado por los dos vectores F_1 y F_2 es $\phi = 50^\circ + \alpha = 123.25$. Conocido el ángulo α , es posible determinar el β ya que:

$$50^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 50^\circ - \alpha$$

$$\beta = 56.75^\circ$$



Aplicando nuevamente el teorema del seno es posible determinar el valor de la resultante R

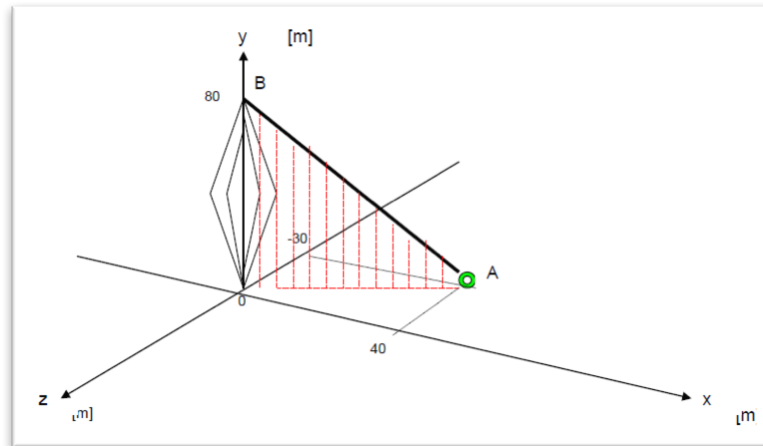
$$\frac{\text{Sen}\beta}{R} = \frac{\text{Sen}50^\circ}{F_1}$$

$$R = F_1 \frac{\text{Sen}(56.75^\circ)}{\text{Sen}(50^\circ)}$$

$$R = 8$$

26. Un viento de alambre de una torre está anclado mediante un perno en A. La tensión en el alambre es de 2500N. Determinar: a) Las componentes F_x, F_y, F_z de la Fuerza F que actúa sobre el perno A, b) los ángulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ que el alambre forma con los ejes coordenados

Desarrollo



En este caso, se tiene un vector en un sistema coordenado tridimensional. Como se conoce las posiciones de origen y termino del vector $\vec{F}$ resulta cómodo utilizar el concepto de vector unitario para determinar sus componentes, esto es:

$$\vec{F} = F \cdot \hat{F}$$

Siendo F la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ (tensión del alambre) y $\hat{F}$ el vector unitario en la dirección AB. Por lo tanto:

$$\vec{F} = 2500N \cdot \frac{-40i + 80j + 30k}{\sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2}}$$

$$\vec{F} = (-1060i + 2120j + 795k)N$$

$$\begin{cases} F_x = -1060 \text{ N} \\ F_y = 2120 \text{ N} \\ F_z = 795 \text{ N} \end{cases} \quad \text{Componentes rectangulares de la Fuerza } \vec{F}$$

Cálculo de los ángulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\theta_x = \frac{-1060}{2500}$$

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{-1060}{2500}\right)$$

$$\theta_x = 115.09^\circ$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\theta_y = \frac{2120}{2500}$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{2120}{2500}\right)$$

$$\theta_y = 32^\circ$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

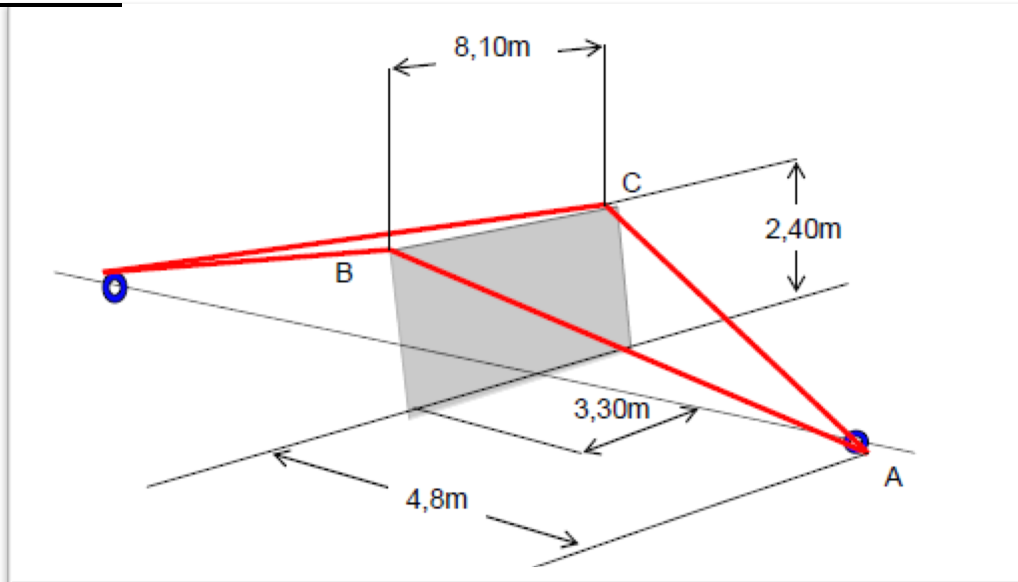
$$\cos\theta_z = \frac{795}{2500}$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{795}{2500}\right)$$

$$\theta_z = 71.5^\circ$$

27. Un tramo de muro de hormigón pre moldeado se halla provisoriamente por los cables que se ilustran. Sabiendo que la tensión en el cable AB es de $4200N$ y de $6000N$ en AC , hallar el módulo y la dirección de la resultante de las fuerzas que ejercen los cables AB y AC sobre la estaca A .

Desarrollo



En este caso, corresponde a un sistema de dos vectores en el espacio y lo primero que se realizara será determinar las componentes de cada una de las dos fuerzas utilizando concepto de vector unitario, según la orientación de los ejes indicada, es decir:

$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_1$ Siendo $\vec{e}_1$ el vector unitario en la dirección AC , es decir

$$\vec{F}_1 = 6000N \frac{-4.8i - 4.8j + 2.4k}{\sqrt{(-4.8)^2 + (-4.8)^2 + (2.4)^2}}$$

$$\vec{F}_1 = (-4000i - 4000j + 2000k)N$$

Y $\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{e}_2$ Siendo $\vec{e}_2$ el vector unitario en la dirección AB , es decir

$$\vec{F}_2 = 4200N \frac{3.3i - 4.8j + 2.4k}{\sqrt{(3.3)^2 + (-4.8)^2 + (2.4)^2}}$$

$$\vec{F}_2 = (2200i - 3200j + 1600k)N$$

Conocido las componentes F_1 y F_2 es posible determinar la resultante R :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

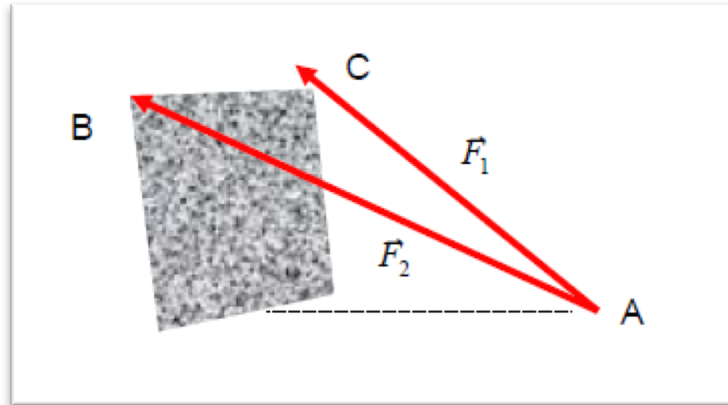
$$\vec{R} = (2200i - 3200j + 1600k) + (-4000i - 4000j + 2000k)$$

$$\mathbf{R} = (-1800\mathbf{i} - 7200\mathbf{j} + 3600\mathbf{k})\text{N}$$

Por lo tanto la magnitud del vector resultante es:

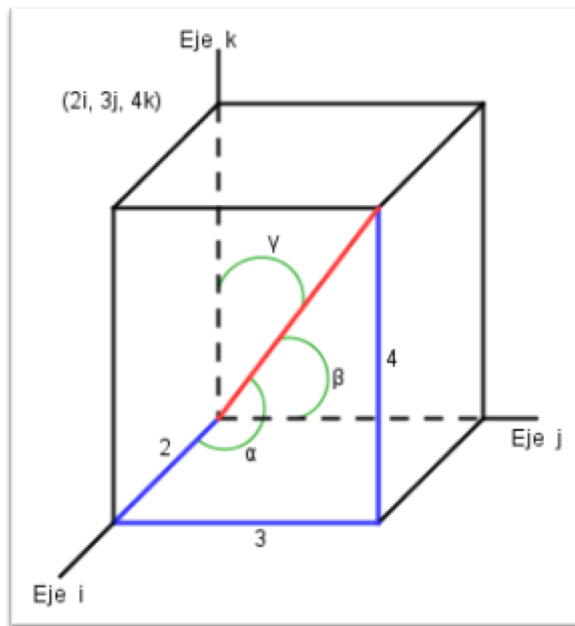
$$R = \sqrt{(-1800)^2 + (-7200)^2 + (+3600)^2}$$

$$R = 8248.636\text{N}$$



1.5. Cálculo de ángulos directores

Se llaman directores del vector $\mathbf{A}$ a los ángulos que forman cada uno de los ejes coordenados. En un plano tridimensional se representan:



Se identifican 3 ángulos en la imagen (Alpha = α , Beta = β , Gamma = γ) Y sus formulas para saber el tamaño del ángulo son:

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{|\mathbf{A}|}$$

Coseno de Alpha = Vector Ax / Modulo del vector |A|

$$\cos \beta = \frac{A_y}{|A|} \quad \text{Coseno de Beta} = \text{Vector } A_y / \text{Modulo del vector } |A|$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{|A|} \quad \text{Coseno de Gamma} = \text{Vector } A_z / \text{Modulo del vector } |A|$$

Para saber el modulo del vector A se usa la formula:

$$|v| = \sqrt{X_i^2 + Y_j^2 + Z_k^2}$$

EJEMPLO:

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos \theta_x = \frac{-1800}{8248.636}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \left(\frac{-1800}{8248.636} \right)$$

$$\theta_x = 102.604^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$\cos \theta_y = \frac{-7200}{8248.636}$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \left(\frac{-7200}{8248.636} \right)$$

$$\theta_y = 150.794^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\cos \theta_z = \frac{3600}{8248.636}$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \left(\frac{3600}{8248.636} \right)$$

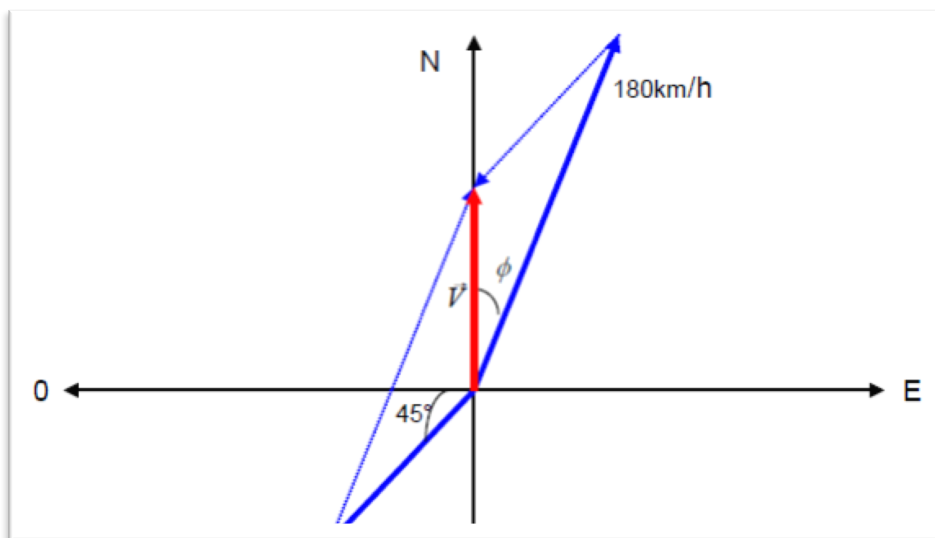
$$\theta_z = 64.123^\circ$$

28. Un piloto de aviación desea volar hacia el norte. El viento sopla de noreste a suroeste a la velocidad de 30 km/h y la velocidad del avión respecto al aire es de 180 km/h .

- ¿En qué dirección debe mantener el piloto su rumbo?
- ¿Cuál será su velocidad?

Desarrollo

En primer lugar es conveniente realizar un diagrama vectorial de las velocidades y para esto se debe considerar que la dirección noreste a suroeste significa justo a 45° entre estos puntos cardinales. Además si el piloto desea volar hacia el norte deberá seguir un rumbo hacia el noroeste ya que será desviado por la velocidad del viento de tal manera que la suma de estas dos velocidades tenga la dirección norte. La gráfica siguiente muestra tal situación.



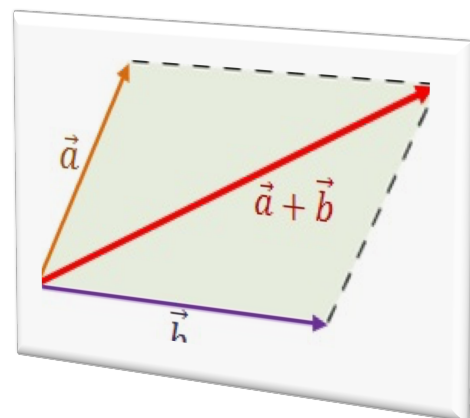
1.6. Método del paralelogramo

El método del paralelogramo es un procedimiento gráfico sencillo que permite hallar la suma de dos vectores.

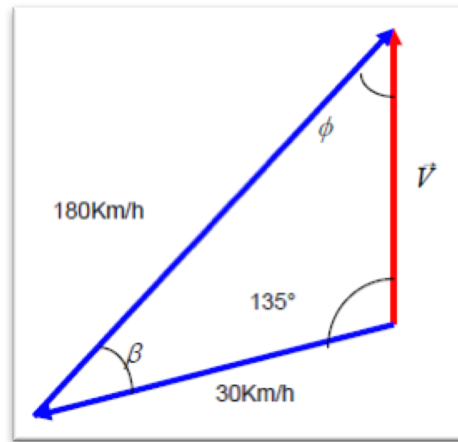
Primero se dibujan ambos vectores (a y b) a escala, con el punto de aplicación común.

Seguidamente, se completa un paralelogramo, dibujando dos segmentos paralelos a ellos.

El vector suma resultante ($a+b$) será la diagonal del paralelogramo con origen común a los dos vectores originales.



Eligiendo el triángulo de fuerzas de la izquierda, se tiene:



Utilizando el teorema del seno es posible calcular el ángulo ϕ , es decir:

$$\frac{\text{sen}(135^\circ)}{180} = \frac{\text{Sen}\phi}{30}$$

$$\text{Sen}\phi = \frac{30 \text{ sen}(135^\circ)}{180}$$

$$\phi = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{30 \text{ sen}(135^\circ)}{180}\right)$$

$$\phi = 6.786^\circ$$

Para determinar la velocidad del piloto respecto a tierra, es necesario conocer el ángulo β

$$\beta = 180^\circ - (135^\circ - \phi)$$

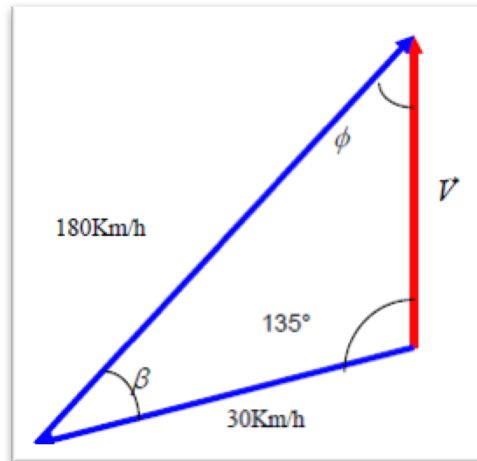
$$\beta = 38.232^\circ$$

Utilizando nuevamente el teorema del seno, es posible determinar la velocidad del piloto respecto a tierra.

$$\frac{\text{sen}(135^\circ)}{180} = \frac{\text{Sen}\beta}{V}$$

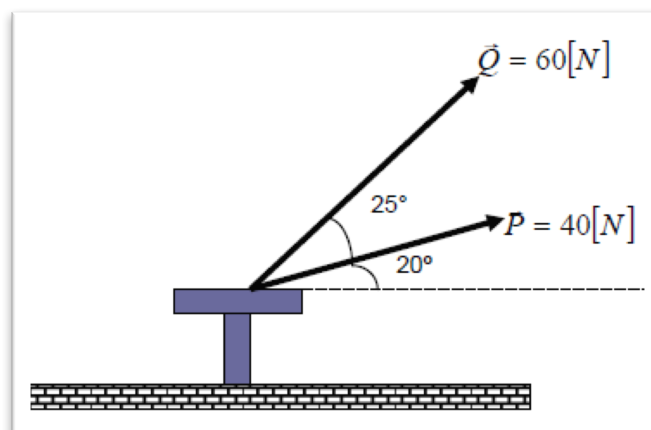
$$V = \frac{180 \text{ sen}(38.232^\circ)}{\text{sen}(135^\circ)}$$

$$V = 157.532 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

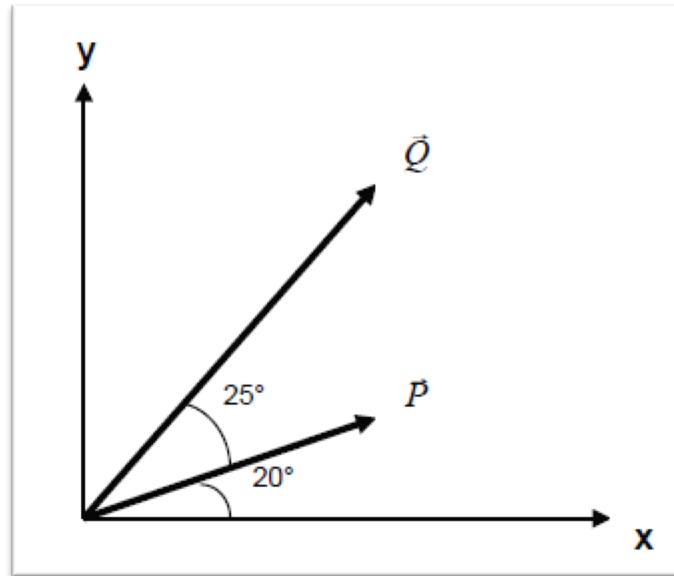


29. Las dos fuerzas P y Q actúan sobre un tornillo, tal como indica la figura. Determine su resultante

Desarrollo



Considerando un sistema coordenado rectangular se tiene:



Según método de las componentes (trabajar con las componentes rectangulares de cada vector), la resultante R queda determinada por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Donde
$$\begin{cases} R_x = P_x + Q_x \\ R_y = P_y + Q_y \end{cases}$$

Por lo tanto

$$R_x = 40 \cos 20^\circ + 60 \cos 45^\circ$$

$$R_x = 80.014 \text{ N}$$

$$R_y = 40 \sin 20^\circ + 60 \sin 45^\circ$$

$$R_y = 56.107 \text{ N}$$

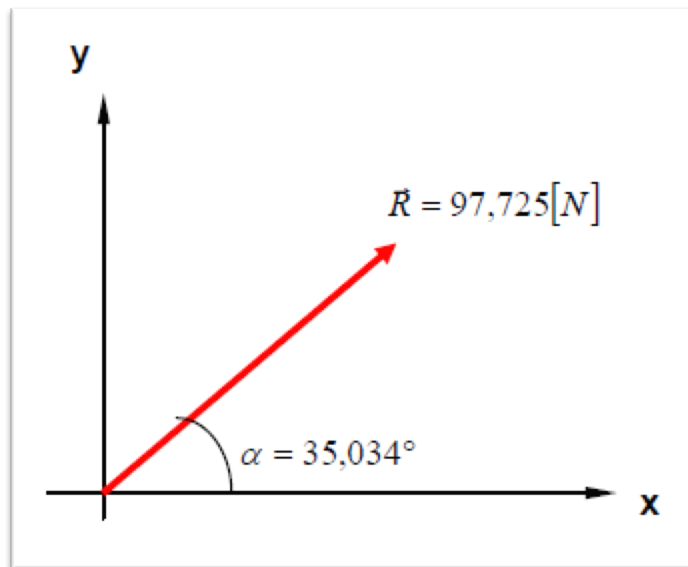
Luego el vector resultante es.

$$R = 80.014i + 56.107j$$

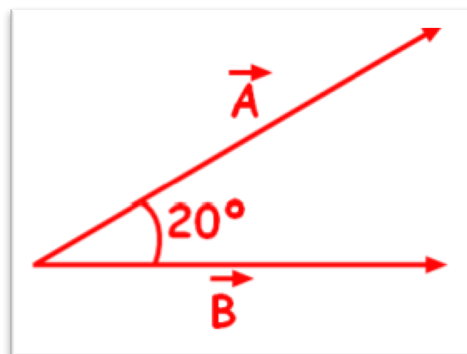
Su magnitud corresponde

$$R = \sqrt{(80.014)^2 + (56.107)^2}$$

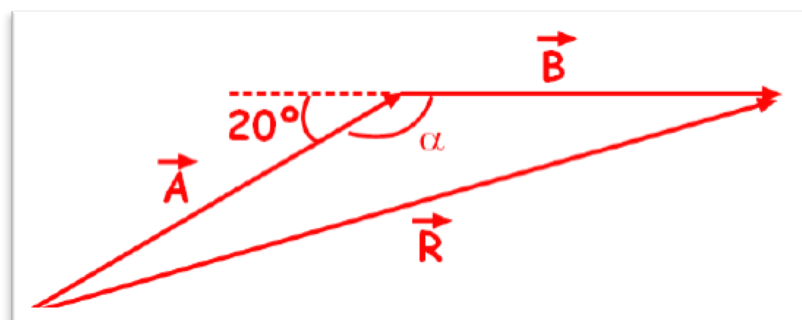
$$R = 97.725 \text{ N}$$



30. Sean A y B los vectores mostrados en la figura, cuyos módulos son 10 y 15 unidades respectivamente. Calcular el modulo del vector resultante.



Desarrollo



Aplicando el teorema de los cosenos tenemos:

Antes de realizar operaciones hallemos el valor del ángulo α

$$\alpha + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 160^\circ$$

Podemos hallar el módulo del vector resultante:

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha$$

$$R^2 = 10^2 + 15^2 - 2(10)(15) \cos 160^\circ$$

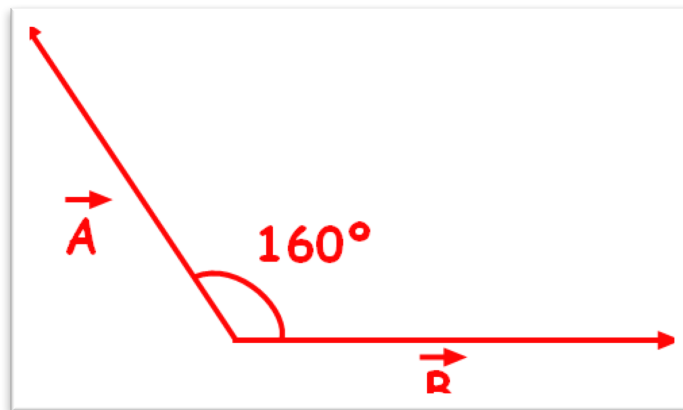
$$R^2 = 100 + 225 - 300 \cos 160^\circ$$

$$R^2 = 325 - 300 \cos 160^\circ$$

$$R = \sqrt{325 + 282}$$

$$R = 24.6 \text{ u}$$

31. Sean A y B los vectores mostrados en la figura cuyos módulos son 10 y 15 unidades respectivamente. Calcular el módulo del vector resultante.

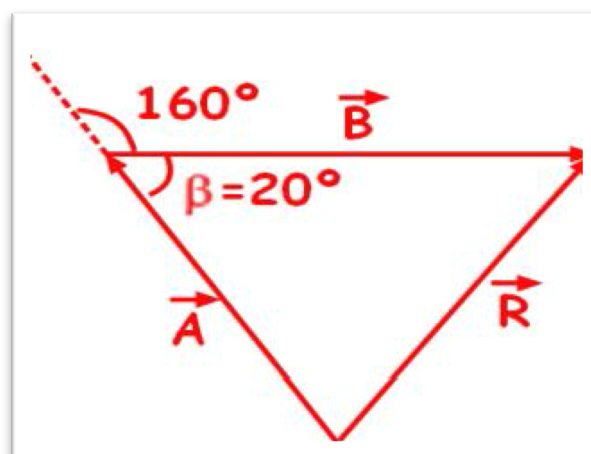


Desarrollo

Primero hallaremos el ángulo β después aplicaremos el teorema de los cosenos, para hallar el módulo de R

$$\beta + 160^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 20^\circ$$



$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha$$

$$R^2 = 10^2 + 15^2 - 2(10)(15) \cos 20^\circ$$

$$R^2 = 100 + 225 - 300 \cos 20^\circ$$

$$R^2 = 325 - 300 \cos 20^\circ$$

$$R = \sqrt{43}$$

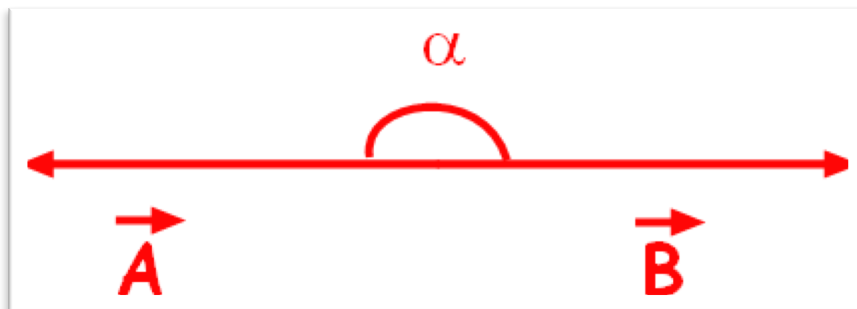
$$R = 6.56 \, u$$

32. Los vectores que se muestran en la figura poseen módulos de la misma cantidad e iguales a m . Calcular el módulo del vector resultante de los cuatro vectores y el ángulo entre el vector resultante y el vector B

Desarrollo:

Notemos que los vectores A y B tienen sentido opuesto pero son del mismo módulo.

Entonces tendríamos:



La resultante en eje x es:

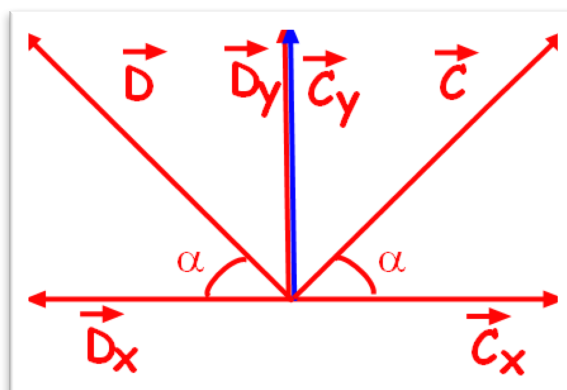
$$R_x = B_x - A_x$$

Pero los módulos son $A = m$ y $B = m$

$$R_x = m - m$$

$$R_x = 0$$

Para C y D



La resultante en el eje x es:

$$R_x = C \cos \alpha - D \cos \alpha$$

Pero los módulos son $C = m$ y $D = m$

$$R_x = m \cos \alpha - m \cos \alpha$$

$$R_x = 0$$

La resultante en el eje y es:

$$R_y = C \operatorname{Sen} \alpha + D \operatorname{Sen} \alpha$$

Pero los módulos son $C = m$ y $D = m$

$$R_y = m \operatorname{Sen} \alpha + m \operatorname{Sen} \alpha$$

$$R_y = 2m \operatorname{Sen} \alpha$$

$$\therefore R^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$R^2 = 0 + (2m \operatorname{Sen} \alpha)^2$$

$$R = 2m \operatorname{Sen} \alpha$$

El ángulo del vector es:

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$$

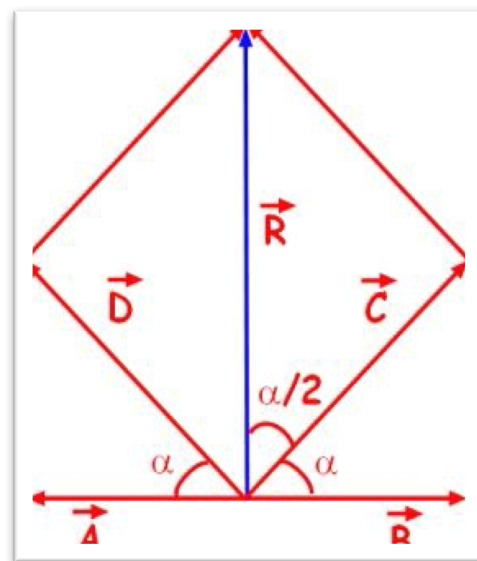
$$\frac{2\alpha + \alpha}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{3\alpha}{2} = 90^\circ$$

$$3\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$



33. Los módulos de los vectores A y B que se muestran en la figura son 2 y 6 unidades respectivamente. ¿Cuál deberá el módulo del tercer vector C para que el módulo del vector resultante A, B y C sea 10 unidades?

Desarrollo:

$$A = 2u$$

$$B = 6u$$

$$C = ?$$

$$R = 10u$$

El vector resultante sería

$$R = (A + C) + B$$

Pero el módulo es:

$$R^2 = (A + C)^2 + B^2$$

$$R^2 = A^2 + 2AC + C^2 + B^2$$

$$R^2 - A^2 - B^2 = 2AC + C^2$$

$$10^2 - 2^2 - 6^2 = 2(2)C + C^2$$

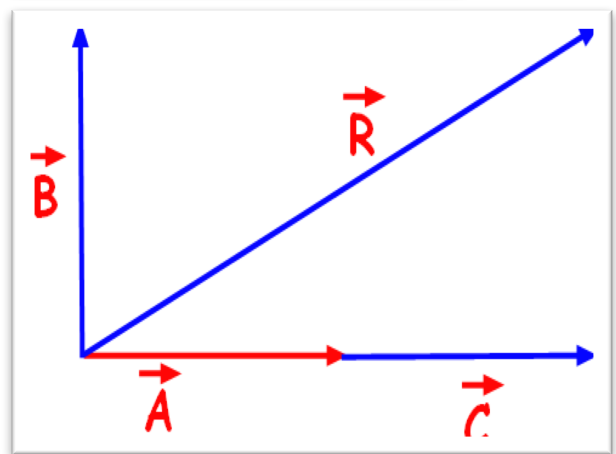
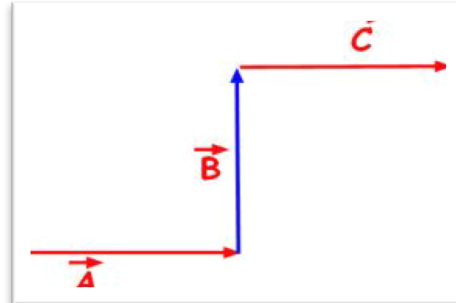
$$60 = 4C + C^2$$

$$C^2 + 4C - 60 = 0$$

$$(C + 10)(C - 6) = 0$$

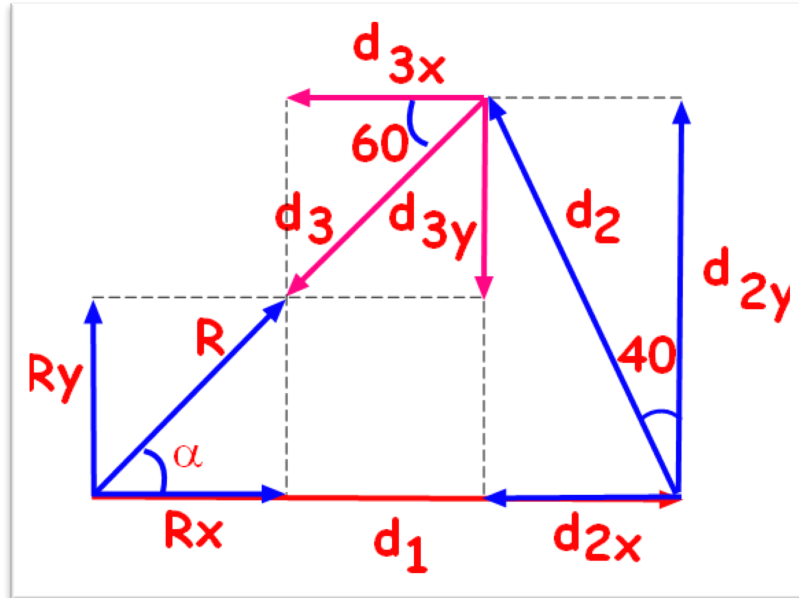
$$\therefore \begin{cases} C = -10 \\ C = 6 \end{cases}$$

Tomamos como respuesta solo $C = 6$ por ser positivo y no así $C = -10$ por no existir módulos negativos.



34. Una persona se encuentra extraviada quien realizo el siguiente recorrido. Camino 90m al Este, luego 70m en dirección 40° hacia el Oeste del norte, 60° hacia el Sur del Oeste. A qué distancia del punto de partida se encuentra y en qué dirección.

Desarrollo:



Para d_1

$$d_{1x} = d_1$$

$$d_{1y} = 0$$

Para d_2

$$d_{2x} = -70 \text{ Sen}40^\circ$$

$$d_{2y} = -70 \text{ Cos}40^\circ$$

Para d_3

$$d_{3x} = -50 \text{ Cos}60^\circ$$

$$d_{3y} = -50 \text{ Sen}60^\circ$$

La resultante en el eje x es:

$$R_x = d_1 - 70 \text{ Sen}40^\circ - 50 \text{ cos}60^\circ$$

$$R_x = 90 - 70 \text{ Sen}40^\circ - 50 \text{ cos}60$$

$$R_x = 20m$$

La resultante en el eje y es:

$$R_y = 70 \text{ Cos}40^\circ - 50 \text{ Sen}60^\circ$$

$$R_y = 10m$$

Para la resultante tenemos

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$R^2 = 20^2 + 10^2$$

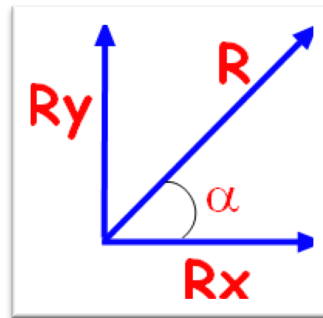
$$R^2 = 500$$

$$R = 22m$$

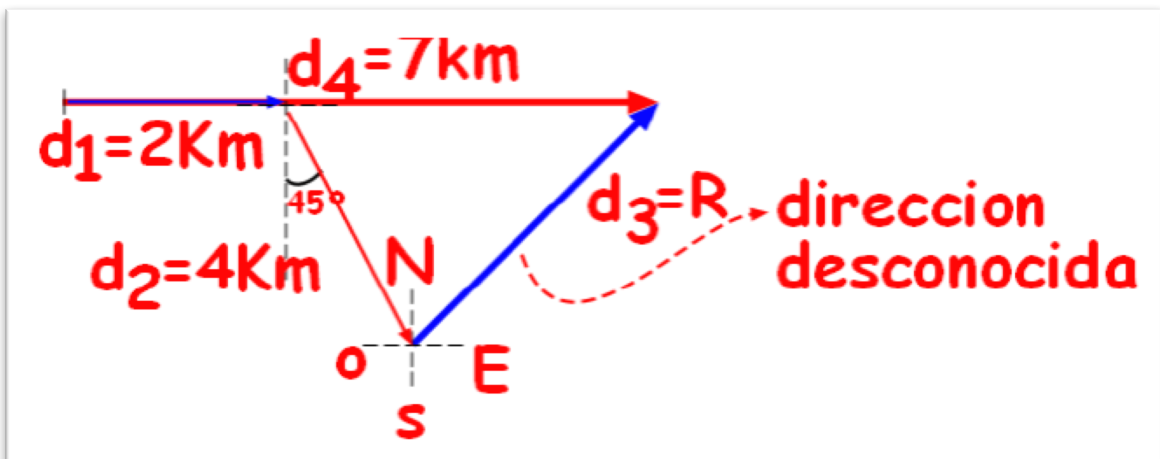
Para la dirección tenemos

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10}{20}\right)$$

$$\alpha = 26.5^\circ$$



35. Un barco navega 2 km hacia el este, luego 4 km al sureste y finalmente otra distancia en dirección desconocida, al final se encuentra 7 km al este del punto de partida. Hallar la magnitud y dirección del tercer recorrido del trayecto.



Desarrollo

Del gráfico:

$$d_1 + x = d_4$$

$$x = d_4 - d_1$$

$$x = 7 - 2$$

$$x = 5$$

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

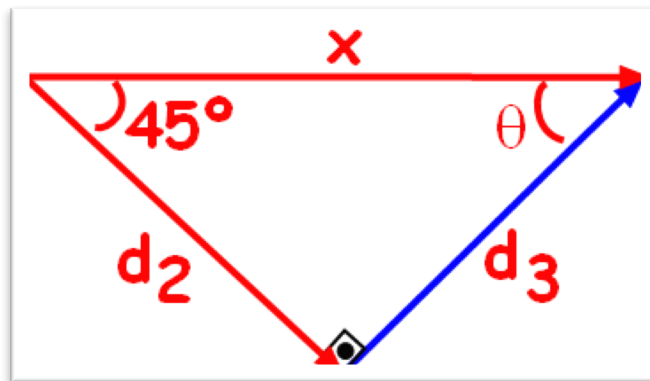
$$d_3^2 = x^2 - d_2^2$$

$$d_3 = 3 \text{ km}$$

Para el ángulo

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$



36. Hallar la resultante de los vectores

$$A + B = R_1 = 4$$

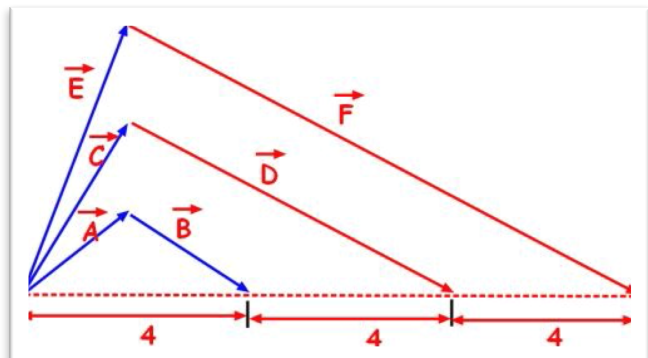
$$C + D = R_2 = 8$$

$$E + F = R_3 = 12$$

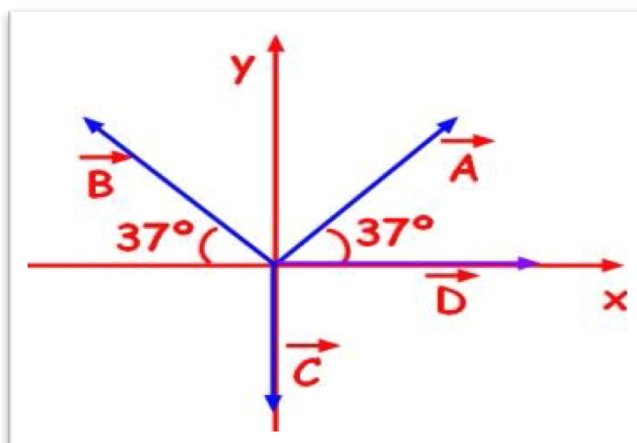
$$R_t = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_t = 4 + 8 + 12$$

$$R_t = 24$$

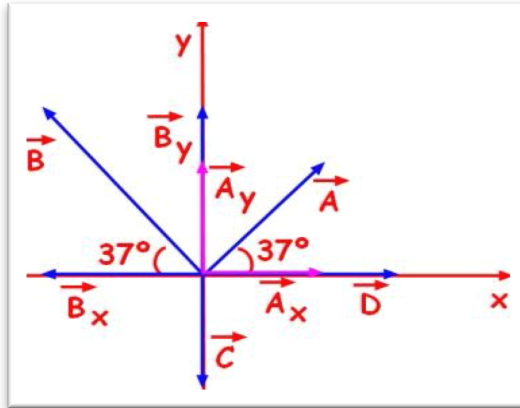


37. Hallar la resultante de los vectores



Desarrollo

Descomponiendo tenemos:



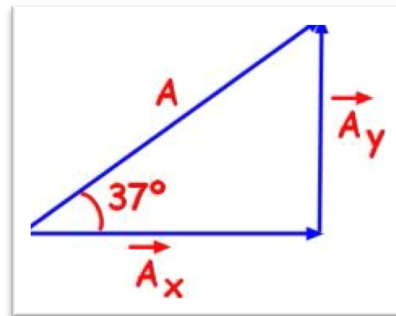
Para el vector A:

$$\cos 37^\circ = \frac{A_x}{A}$$

$$A_x = A \cos 37^\circ$$

$$\sin 37^\circ = \frac{A_y}{A}$$

$$A_y = A \sin 37^\circ$$



Para el vector B:

$$\cos 37^\circ = \frac{B_x}{B}$$

$$B_x = B \cos 37^\circ$$

$$\sin 37^\circ = \frac{B_y}{B}$$

$$B_y = B \sin 37^\circ$$

$$R_x = A \cos 37^\circ - B \cos 37^\circ + D$$

$$R_x = 8 - 16 + 13$$

$$R_x = 5$$

$$R_y = A \sin 37^\circ + B \sin 37^\circ - D$$

$$R_y = 6 + 12 - 6$$

$$R_y = 12$$

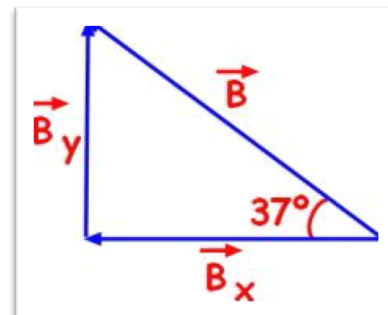
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$R = \sqrt{25 + 144}$$

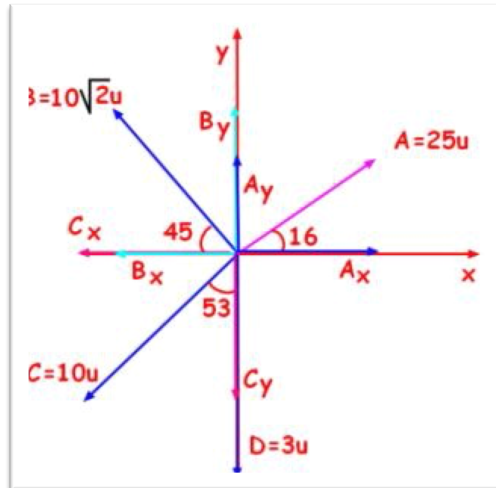
$$R = \sqrt{169}$$

$$R = 13$$



38. Determinar la dirección del vector resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura.

Desarrollo



$$\cos 16^\circ = \frac{A_x}{A}$$

$$A_x = A \cos 16^\circ$$

$$\sin 16^\circ = \frac{A_y}{A}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{B_x}{B}$$

$$B_x = B \cos 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ = \frac{B_y}{B}$$

$$B_y = B \sin 45^\circ$$

$$\cos 53^\circ = \frac{C_x}{C}$$

$$C_x = C \sin 53^\circ$$

$$\sin 53^\circ = \frac{C_y}{C}$$

$$C_y = C \cos 53^\circ$$

$A_y = A \sin 16^\circ$ Reemplazando datos tenemos:

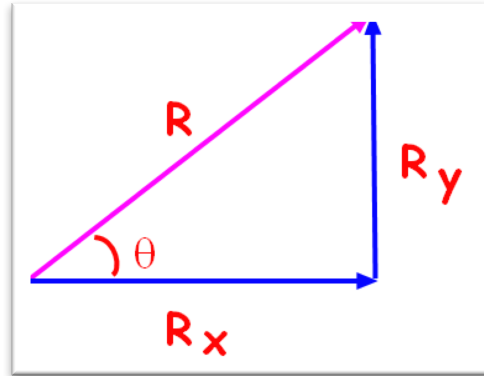
$$R_x = 25 \cos 16^\circ - 10\sqrt{2} \cos 45^\circ - 10 \sin 53^\circ$$

$$R_x = 6.02$$

$$R_y = 25 \sin 16^\circ + 10\sqrt{2} \sin 45^\circ - 10 \cos 53^\circ - 3$$

$$R_y = 7.89$$

Podemos hallar la resultante



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.89}{6.02}\right)$$

$$\theta = 53^\circ$$

$$R = \sqrt{6.02^2 + 7.89^2}$$

$$R = 10u$$

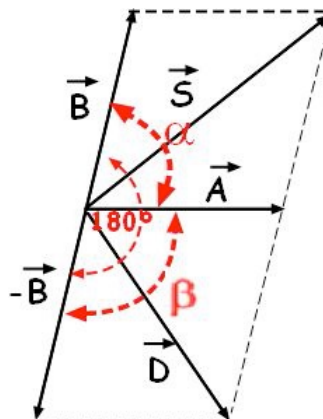
39. Si el módulo de la suma de dos vectores de igual módulo, es el triple del módulo de su diferencia. ¿Hallar el ángulo comprendido entre dichos vectores?

Desarrollo

Condiciones del problema

$$S = 3D \rightarrow \begin{cases} S = A + B \\ D = A - B \end{cases}$$

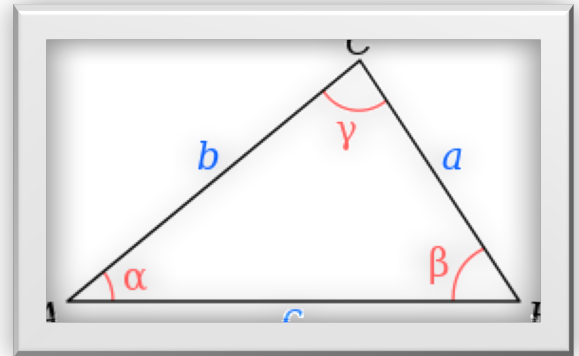
De dos vectores de igual módulo $A = B$



1.7. Teorema del coseno

El teorema del coseno, denominado también como ley de cosenos 1, es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos que se utiliza, normalmente, en trigonometría.

El teorema relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados:



Aplicando el teorema de los cosenos:

$$S^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos\alpha$$

$$S^2 = A^2 + A^2 + 2AA \cos\alpha$$

$$S^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos\alpha$$

$$S^2 = 2A^2(1 + \cos\alpha)$$

$$S = A\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}$$

Aplicando el teorema de los cosenos

Note que el teorema de los cosenos tiene signo negativo por ser β ángulo suplementario. $\beta = 180^\circ - \alpha$

$$D^2 = A^2 + (-B)^2 - 2A(-B) \cos\beta$$

$$D^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos\beta$$

$$D^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos\beta$$

$$D^2 = 2A^2(1 + \cos\beta)$$

$$D = A\sqrt{2(1 + \cos\beta)}$$

$$D = A\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$$

Por la condición dada: $S = 3D$

$$A\sqrt{2(1 + \cos\alpha)} = 3A\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$$

$$\sqrt{2(1 + \cos\alpha)} = 3\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cos\alpha - \sin 180^\circ \sin\alpha$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$(1 + \cos\alpha) = 9(1 - \cos\alpha)$$

$$1 + \cos\alpha = 9 - 9\cos\alpha$$

$$\cos\alpha + 9\cos\alpha = 9 - 1$$

$$10\cos\alpha = 8$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{10}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right)$$

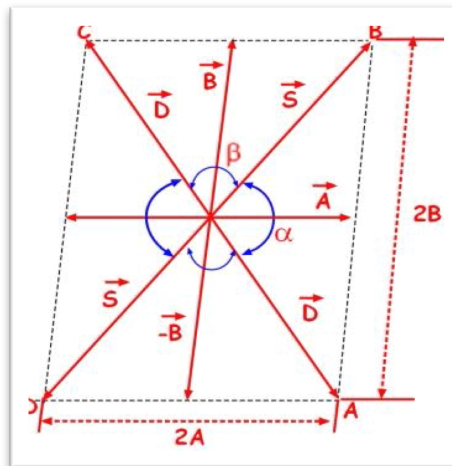
$$\alpha = 37^\circ$$

40. La suma y diferencia de dos vectores hacen un ángulo de 60° con módulos de 12 y 6 unidades respectivamente.

¿Cuál sería el módulo de estos vectores?

¿Cuál es el ángulo entre ellos?

Desarrollo



Del triángulo AOB

Aplicando el teorema de los cosenos:

$$(2B)^2 = S^2 + D^2 - 2SD \cos\alpha$$

$$4B^2 = S^2 + D^2 - 2SD \cos\alpha$$

Sustituyendo datos tenemos:

$$4B^2 = 12^2 + 6^2 - 2(12)(6) \cos 60^\circ$$

$$4B^2 = 108$$

$$B^2 = \frac{108}{4}$$

$$B = \sqrt{27} \text{ u}$$

Del triángulo BOC

Aplicando el teorema de los cosenos

$$(2A)^2 = S^2 + D^2 - 2SD \cos\beta$$

$$4A^2 = S^2 + D^2 - 2SD \cos\beta$$

Del gráfico tenemos que:

$$2\beta + 2\alpha = 360^\circ$$

$$2\beta = 360^\circ - 2\alpha$$

$$2\beta = 360^\circ - 2(60^\circ)$$

$$2\beta = 360^\circ - 120^\circ$$

$$2\beta = 240^\circ$$

$$\beta = 120^\circ$$

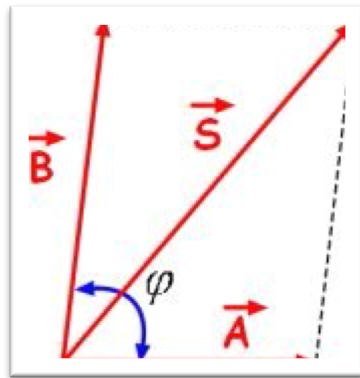
Sustituyendo

$$4A^2 = 12^2 + 6^2 - 2(120)(6) \cos 120^\circ$$

$$4A^2 = 252$$

$$A = \sqrt{63} \text{ u}$$

Para el ángulo entre los vectores A y B



Aplicando el teorema de los cosenos

$$S^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos\varphi$$

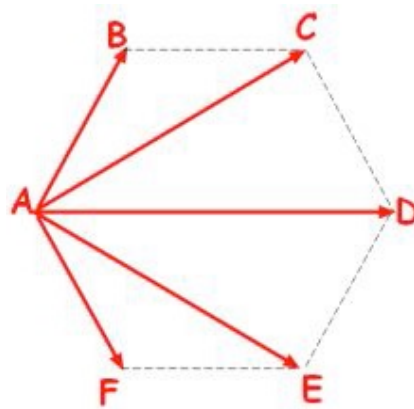
$$S^2 - A^2 - B^2 = 2AB \cos\varphi$$

$$\frac{S^2 - A^2 - B^2}{2AB} = \cos\varphi$$

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{12^2 - (\sqrt{63})^2 - (\sqrt{27})^2}{2(\sqrt{63})(\sqrt{27})} \right)$$

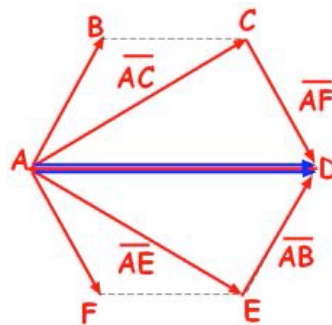
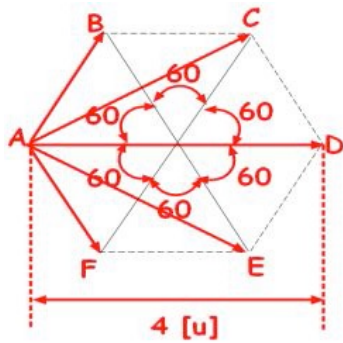
$$\varphi = 49.1^\circ$$

41. En el hexágono regular de $2m$ de lado se tienen los 5 vectores



Desarrollo

Trasladando AF a CD y AB a DE



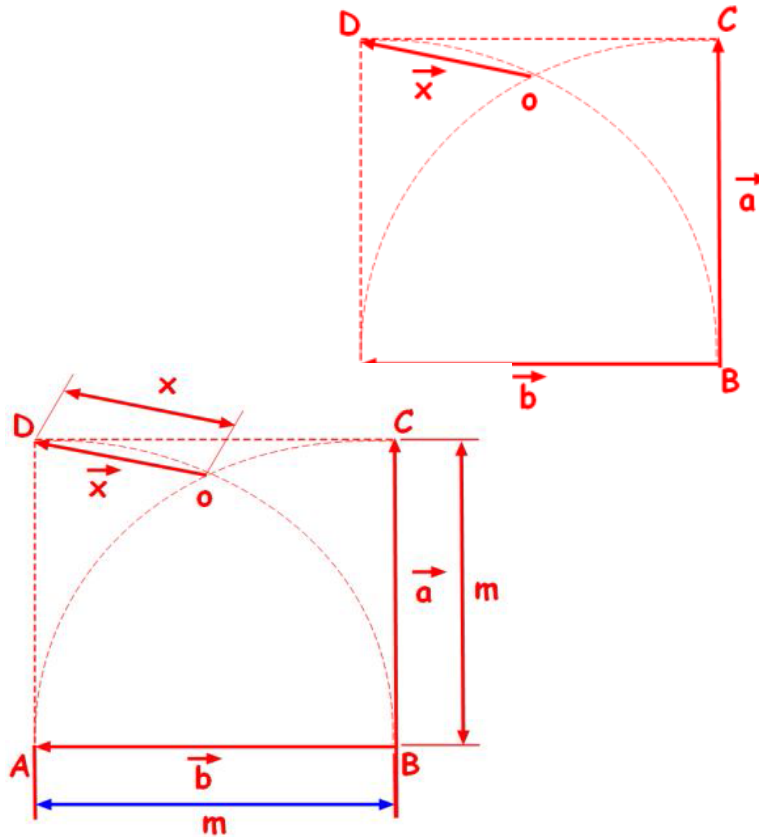
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} + \overline{AF} = R_1 \\ \overline{AE} + \overline{AB} = R_2 \\ \overline{AD} = R_3 \end{array} \right\} R_t = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_t = 4 + 4 + 4$$

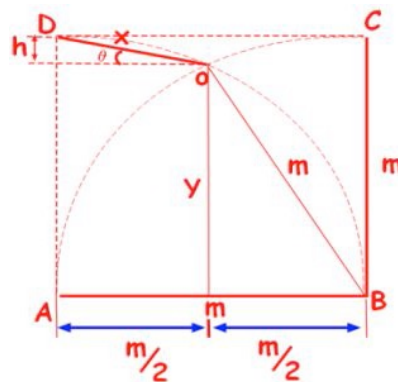
$$R_t = 12u$$

42. En el gráfico hallar el vector $\vec{x}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Donde AOB es un cuarto de circunferencia. Donde BOD es un cuarto de circunferencia. Donde $ABCD$ es un cuadrado

Desarrollo.



Para hallar el vector $\vec{x}$ lo primero que haremos será trabajar con sus módulos y tratarlo como un problema geométrico donde la incógnita es x



Donde:

$$m = y + h$$

$$h = m - y \quad (a)$$

$$m^2 = y^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$y^2 = m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} m$$

Entonces y en (a)

$$h = m - \frac{\sqrt{3}}{2} m$$

$$h = \frac{(2 - \sqrt{3})m}{2}$$

Para hallar el valor de θ

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{m/2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{(2 - \sqrt{3})m}{2}}{m/2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 2 - \sqrt{3}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}(2 - \sqrt{3})$$

$$\theta = 15^\circ$$

Para x tenemos

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \left(\frac{(2 - \sqrt{3})m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{m^2}{4}(2 - \sqrt{3}) - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x = m\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ahora descomponiendo el vector $\vec{x}$, tenemos:

$$\vec{x} = -x \cos 15^\circ \mathbf{i} + x \sin 15^\circ \mathbf{j}$$

Pero:

$$\vec{b} = -m\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} = \frac{-\vec{b}}{m}$$

$$\vec{a} = mj$$

$$j = \frac{\vec{a}}{m}$$

Reemplazando:

$$\vec{x} = m\sqrt{2 - \sqrt{3}} \left[-\cos 15^\circ \left(\frac{-\vec{b}}{m} \right) + \sin 15^\circ \left(\frac{\vec{a}}{m} \right) \right]$$

$$\vec{x} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \left[\cos 15^\circ (\vec{b}) + \sin 15^\circ (\vec{a}) \right]$$

$$\vec{x} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \left[\vec{a} \sin 15^\circ + \vec{b} \cos 15^\circ \right]$$

El que aprende y aprende y no practica lo que sabe, es como el que ara y ara y no siembra.

Planton

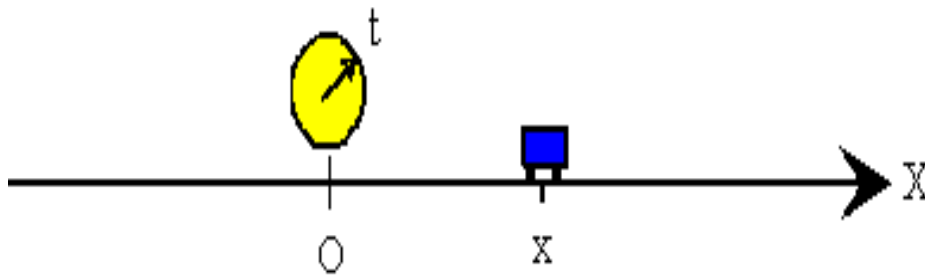
CAPITULO II

OBJETIVOS

- Determinar la velocidad, tiempo y la distancia que alcanza el objeto de estudio.
- Aprender a resolver un problema de movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado.
- Comprobar que la velocidad es constante.
- Calcular la aceleración de un cuerpo en caída libre.
- Aprender a reconocer las gráficas distancia-tiempo y velocidad-tiempo de un movimiento uniformemente acelerado.

CAPITULO II

MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA



Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

En la recta situamos un origen O , donde estará un observador que medirá la posición del móvil x en el instante t . Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

El **MRU** (movimiento rectilíneo uniforme) se caracteriza por:

- Movimiento que se realiza sobre una línea recta.
- Velocidad constante; implica magnitud y dirección constantes.
- La magnitud de la velocidad recibe el nombre de celeridad o rapidez.
- Aceleración nula.

INTRODUCCIÓN

ES movimiento más simple, el movimiento rectilíneo. Se introducen las magnitudes cinemáticas: posición, velocidad y aceleración.

A partir de un registro de la velocidad en función del tiempo, se pide calcular el desplazamiento del móvil entre el instante inicial t_0 y el instante final t , lo que nos permite recordar el concepto de integral definida.

Los movimientos rectilíneos, que siguen una línea recta, son los movimientos más sencillos. Movimientos más complicados pueden ser estudiados como la composición de movimientos rectilíneos elementales. Tal es el caso, por ejemplo, de los movimientos de proyectiles.

El movimiento rectilíneo puede expresarse o presentarse como

Movimiento rectilíneo uniforme, o como

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Este último puede, a su vez, presentarse como de caída libre o de subida vertical.

Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme (MRU) fue definido, por primera vez, por Galileo en los siguientes términos: "Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, tómense como se tomen, resultan iguales entre sí", o, dicho de otro modo, es un movimiento de velocidad v constante.

El MRU se caracteriza por:

- a) Movimiento que se realiza en una sola dirección en el eje horizontal.
- b) Velocidad constante; implica magnitud, sentido y dirección inalterables.
- c) La magnitud de la velocidad recibe el nombre de rapidez. Este movimiento no presenta aceleración (aceleración = 0).

MOVIMIENTO EN LINEA RECTA

2.1. Aceleración media e instantánea

Se define la **aceleración media** entre dos puntos P_1 y P_2 como la *división* de la **variación de la velocidad** y **el tiempo transcurrido** entre ambos puntos:

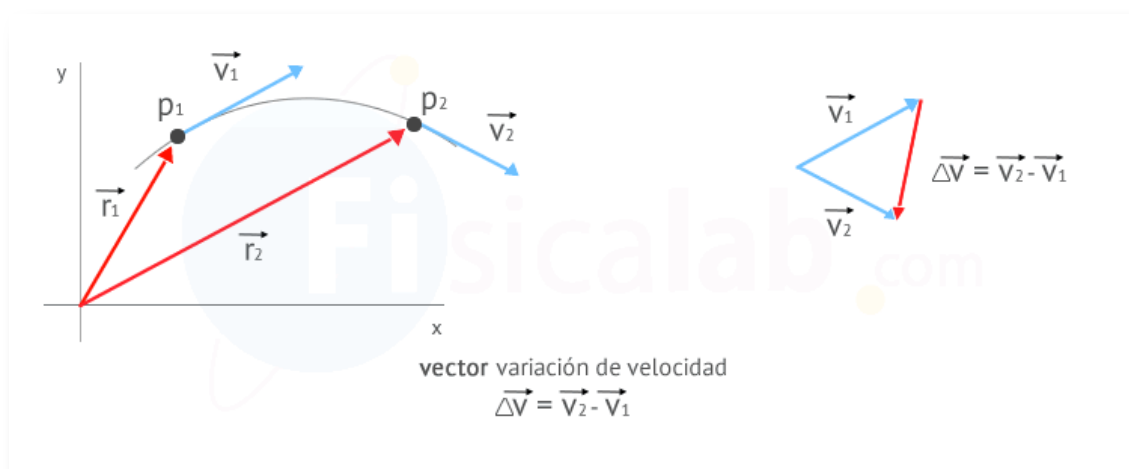
$$a \rightarrow m = \frac{v \rightarrow 2 - v \rightarrow 1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v \rightarrow}{\Delta t}$$

Donde:

- $a \rightarrow m$: Es la **aceleración media** del punto material
- $v \rightarrow 1, v \rightarrow 2$: *Vectores velocidad* en los puntos P_1 y P_2 respectivamente
- t_1, t_2 : Instantes de *tiempo* inicial y final respectivamente
- $\Delta v \rightarrow$: **Variación de la velocidad** entre los puntos inicial y final P_1 y P_2
- Δt : *Tiempo* invertido en realizar el movimiento entre P_1 y P_2

Además, el **vector aceleración media** cumple lo siguiente:

- La **ecuación de dimensiones de la aceleración media** es $[a_m] = LT^{-2}$
- **Unidad de medida en el Sistema Internacional (S.I.)** de la aceleración es el **metro por segundo al cuadrado (m/s^2)**. Un cuerpo con una aceleración de $1 m/s^2$ varía su velocidad en 1 metro/segundo cada segundo.
- Su módulo (el "tamaño" del vector) es igual al módulo del vector variación de la velocidad dividido entre el tiempo transcurrido
- Su dirección y su sentido son las mismas que las del vector variación de la velocidad



2.2 Aceleración

LA **ACELERACIÓN** mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Por consiguiente,

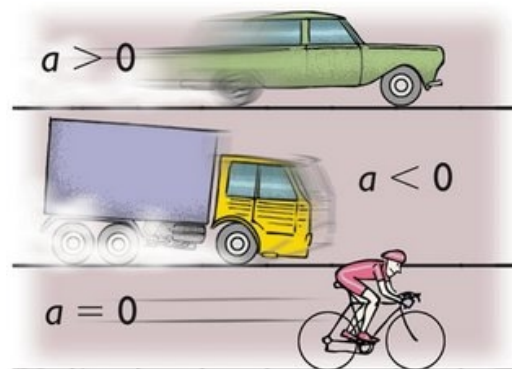
$$\text{Aceleración promedio} = \frac{\text{cambio en el vector velocidad}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

$$\vec{a}_{prom} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t}$$

Donde x_i es la velocidad inicial, x_f es la velocidad final y t es el tiempo transcurrido durante el cambio.

Las unidades de aceleración son unidades de velocidad divididas entre unidades de tiempo. Algunos ejemplos son (m/s)/s (o bien m/s²) y (km/h)/s (o bien km/h s). Hay que notar que la aceleración es una cantidad vectorial y tiene la dirección del cambio de velocidad, $x_f - x_i$.

No obstante, es común hablar de la magnitud de la aceleración diciendo solamente aceleración, siempre que no exista ambigüedad. Cuando sólo interesan las aceleraciones tangenciales a la trayectoria recorrida, se conoce la dirección de la aceleración y se puede escribir la ecuación definitoria en forma escalar como:



$$a_{prom} = \frac{v_f - v_i}{t}$$

Ejemplos

1. Un meteorito se desplaza por el cielo con una velocidad $\vec{v}(t) = (1 + 4 \cdot t)\vec{i} + t^2\vec{j} \text{ m}$. Calcular:

- a) Su aceleración media entre los instantes $t_1 = 2 \text{ s}$ y $t_2 = 4 \text{ s}$.
- b) Su aceleración en el instante $t_3 = 6 \text{ s}$

Datos:

$$\vec{v}(t) = (1 + 4 \cdot t)\vec{i} + t^2\vec{j} \text{ m}$$

$$t_1 = 2 \text{ s} \text{ y } t_2 = 4 \text{ s}$$

$$a) \quad \overrightarrow{a_m} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Conocemos t_1 y t_2 . Ahora nos falta calcular la velocidad en el instante t_1 ($\vec{v}_1$) y en el instante t_2 ($\vec{v}_2$). Para ello basta sustituir en la ecuación de velocidad que nos han proporcionado en el enunciado del ejercicio:

Para $t_1 = 2 \text{ s}$

$$\vec{v}_1 = v(2) = (1 + 4 \cdot 2) \cdot \vec{i} + (2)^2 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_1 = 9 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$$

Para $t_2 = 4 \text{ s}$

$$\vec{v}_2 = v(4) = (1 + 4 \cdot 4) \cdot \vec{i} + (4)^2 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = 17 \cdot \vec{i} + 16 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{(17 - 9) \cdot \vec{i} + (16 - 4) \cdot \vec{j}}{4 - 2} \text{ m/s}^2$$

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{8 \cdot \vec{i} + 12 \cdot \vec{j}}{2} \text{ m/s}^2$$

$$\overrightarrow{a_m} = 4 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j} \text{ m/s}^2$$



b) Para calcular la aceleración en el instante t_3 debemos calcular previamente la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{a_m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = 4 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} \text{ m/s}^2$$

y sustituyendo el valor de $t_3 = 6 \text{ s}$

$$\overrightarrow{a(6)} = 4 \cdot \vec{i} + 2 \cdot 6 \cdot \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\overrightarrow{a(6)} = 4 \cdot \vec{i} + 12 \cdot \vec{j} \text{ m/s}^2$$

2. Un jugador de baloncesto lanza la pelota con una velocidad de $\vec{v}_1 = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j} \text{ m/s}$, con tan mala suerte que rebota en el tablero con una velocidad $\vec{v}_2 = 15 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$.

Calcula la aceleración media sabiendo que el impacto contra el tablero dura exactamente 0.02 segundos.

Datos:

$$\vec{v}_1 = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = 15 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 2 \text{ s}$$

$$\vec{a}_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ya conocemos Δt , a continuación vamos a calcular $\Delta \vec{v}$:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (15 - (-2)) \cdot \vec{i} + (3 - 1) \cdot \vec{j}$$

$$\Delta \vec{v} = 17 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}_m = \frac{17 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}}{0.02}$$

$$\vec{a}_m = 850 \cdot \vec{i} + 100 \cdot \vec{j}$$

3. Un automóvil parte de una posición 0 m, con 0 velocidad inicial, en 6 segundo se encuentra a 10 m, del punto de partida con una velocidad de 3m/s, a este llamaremos punto A, y 14 segundos después de haber salido del punto de partida se encuentra a 46 m del punto de partida con una velocidad de 7m/s, a este llamaremos punto B.

a) Determine la velocidad media del punto A al punto B.

b) Determinar la aceleración media del punto A al punto B.

$$\text{a) } \vec{v}_{\text{media-x}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{media-x}} = \frac{46 \text{ m} - 10 \text{ m}}{14 \text{ s} - 6 \text{ s}} = \frac{36 \text{ m}}{8 \text{ s}}$$

$$\vec{v}_{\text{media-x}} = 4.5 \text{ m/s}$$

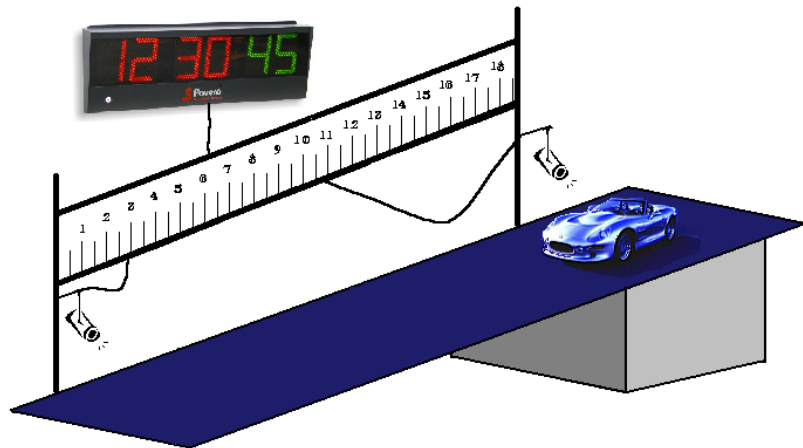
$$b) \vec{a}_{media-x} = \frac{\vec{v}_{1x} - \vec{v}_{2x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{media-x} = \frac{7 \text{ m/s} - 3 \text{ m/s}}{14 \text{ s} - 6 \text{ s}} = \frac{4 \text{ m/s}}{8 \text{ s}}$$

$$\vec{a}_{media-x} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

2.3. MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración constante. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, aun cuando ocurre a menudo en la naturaleza; un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera.



El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un jet de combate es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones

2.4 EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Es una situación importante. En este caso, el vector aceleración es constante y su línea de acción está a lo largo del vector desplazamiento, así que las direcciones de los vectores x y a se pueden indicar con signos positivos o negativos. Si el desplazamiento se representa con s (positivo si va en sentido positivo, y negativo si el sentido es negativo), el movimiento puede describirse con las cinco ecuaciones de movimiento para el movimiento uniformemente acelerado:

$$\begin{aligned} s &= v_{prom} t \\ v_{prom} &= \frac{v_f + v_i}{2} \\ a &= \frac{v_f - v_i}{t} \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2as \\ s &= v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

Con frecuencia s se reemplaza con y o con x y algunas veces y_f y y_i se escriben como y y y_0 , respectivamente.

1) Un cohete parte del reposo con aceleración constante y logra alcanzar en 30 una velocidad de 588 m/s. Calcular:

a) Aceleración.

b) ¿Qué espacio recorrió en esos 30 s?

Datos:

$$V_0 = 0 \text{ m/s}$$

$$V_f = 588 \text{ m/s}$$

$$t = 30 \text{ s}$$

Ecuaciones:

$$(1) V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$(2) x = V_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

a) De la ecuación (1):

$$V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$V_f = a \cdot t$$

$$a = V_f / t$$

$$a = (588 \text{ m/s}) / (30 \text{ s})$$

$$a = 19,6 \text{ m/s}^2$$

b) De la ecuación (2):

$$x = V_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

$$x = a \cdot t^2 / 2$$

$$x = (19,6 \text{ m/s}^2) \cdot (30 \text{ s})^2 / 2$$

$$x = 8820 \text{ m}$$

2. Un móvil que se desplaza con velocidad constante aplica los frenos durante 25 s y recorre 400 m hasta detenerse. Calcular:

a) ¿Qué velocidad tenía el móvil antes de aplicar los frenos?

b) ¿Qué desaceleración produjeron los frenos?

Datos:

$$t = 25 \text{ s}$$

$$x = 400 \text{ m}$$

$$V_f = 0 \text{ m/s}$$

Ecuaciones:

$$(1) V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$(2) x = V_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

a) De la ecuación (1):

$$V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = V_0 + a \cdot t$$

$$a = -V_0/t \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$x = V_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

$$x = V_0 \cdot t + (-V_0/t) \cdot t^2 / 2$$

$$x = V_0 \cdot t - V_0 \cdot t / 2$$

$$x = V_0 \cdot t / 2$$

$$V_0 = 2 \cdot x / t$$

$$V_0 = (2 \cdot 400 \text{ m}) / (25 \text{ s})$$

$$V_0 = 32 \text{ m/s}$$

b) De la ecuación (3):

$$a = (-32 \text{ m/s}) / (25 \text{ s})$$

$$a = -1,28 \text{ m/s}^2$$

¿Cuánto tiempo tardará un móvil en alcanzar una velocidad de 60 km/h, si parte del reposo acelerando constantemente con una aceleración de 20 km/h²?

Datos:

$$V_0 = 0 \text{ km/h}$$

$$V_f = 60 \text{ km/h}$$

$$a = 20 \text{ km/h}^2$$

Aplicando:

$$V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$V_f = a \cdot t$$

$$t = V_f / a$$

$$t = (60 \text{ km/h}) / (20 \text{ km/h}^2)$$

$$t = 3 \text{ h}$$

4. En el cañón de electrones de un tubo de Tv, un electrón experimenta una aceleración de 10^{14} m/s^2 mientras recorre 1cm. Después recorre 10cm hasta la pantalla con aceleración constante.

a) ¿Cuál es su aceleración tras recorrer 1cm?

b) ¿Cuánto tarda en recorrer su 1cm?

c) ¿Cuánto tarda en recorrer los 10cm adicionales hasta la pantalla?

a) $V_f - V_0 = 2 \cdot a \cdot \Delta x$

$$V_f = 2 \cdot 10^{14} \cdot 10^{-2}$$

$$V_f = 2 \cdot 10^{12} \text{ (m/s)}^2$$

$$V_f = \sqrt{2 \cdot 10^{12}} = 1,41 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$b) x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$10^{-2} = \frac{1}{2} 10^{14} \cdot t^2 = \frac{10^{-2} \cdot 2}{10^{14}} = t^2$$

$$t^2 = 2 \cdot 10^{-16} s^2$$

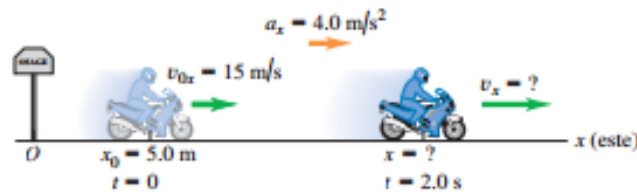
$$t = \sqrt{2 \cdot 10^{-16}} = 1,41 \cdot 10^{-8} s$$

$$c) x = v_0 t$$

$$0,1 = 1,41 \cdot 10^6 \cdot t = \frac{0,1}{1,41 \cdot 10^6}$$

$$t = 7,07 \cdot 10^8 s$$

5. Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad. Su aceleración constante es de 4.0 m/s^2 . En $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s . a) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0 \text{ s}$ b) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s ?



Podemos hallar la velocidad v_x

$$a) x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$= 5.0 \text{ m} + (15 \text{ m/s})(2.0 \text{ s}) + \frac{1}{2} (4.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 = 43 \text{ m}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$= 15 \text{ m/s} + (4.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s}) = 23 \text{ m/s}$$

$$b) v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

$$= 5.0 \text{ m} + \frac{(25 \text{ m/s})^2 - (15 \text{ m/s})^2}{2(4.0 \text{ m/s}^2)} = 55 \text{ m}$$

6) Un ciclista comienza su paseo matutino y al cabo de 10 segundos su velocidad es de 7.2 km/h . En ese instante ve aproximarse un perro y comienza a frenar durante 6 segundos hasta que la bicicleta se detiene.

Calcular:

a) La aceleración hasta que comienza a frenar.

b) La aceleración con la que frena la bicicleta.

c) El espacio total recorrido.

a) Transformando la velocidad a unidades del S.I., tenemos que la velocidad a los 10 s es:

$$V = 7.2 \text{ km/h} * \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} * \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

$$a) v = v_0 + a \cdot t$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a = \frac{2 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{10 \text{ s}}$$

$$a = 0.2 \text{ m/s}^2$$

$$b) v = v_0 + a \cdot t$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a = \frac{0 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s}}{6 \text{ s}}$$

$$a = -0.33 \text{ m/s}^2$$

c) Espacio recorrido en la 1ª fase

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$x = 0 \text{ m} + 0 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} + \frac{(0.2) \text{ m/s}^2 \cdot (10 \text{ s})^2}{2}$$

$$x = 10 \text{ m}$$

Espacio recorrido en la 2ª fase
recorrido es:

Por tanto el espacio total

$$x = 0 \text{ m} + 2 \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} + \frac{(-0.33) \text{ m/s}^2 \cdot (6 \text{ s})^2}{2}$$

$$x = 10 \text{ m} + 6.06 \text{ m} = 16.6 \text{ m}$$

$$x = 12 \text{ m} - 5.94 \text{ m} = 6.06 \text{ m}$$

7. Un móvil parte del reposo con una aceleración de 20 m/s^2 constante.

Calcular:

a) ¿Qué velocidad tendrá después de 15 s?

b) ¿Qué espacio recorrió en esos 15 s?

Datos:

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

$$a = 20 \text{ m/s}^2$$

$$t = 15 \text{ s}$$

$$\text{a) } v_f = (20 \text{ m/s}^2) \cdot (15 \text{ s})$$

$$v_f = 300 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } x = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

$$x = a \cdot t^2 / 2$$

$$x = (20 \text{ m/s}^2) \cdot (15 \text{ s})^2 / 2$$

$$x = 2250 \text{ m}$$

8. Un auto parte del reposo, a los 5 s posee una velocidad de 90 km/h, si su aceleración es constante,

Calcular:

a) ¿Cuánto vale la aceleración?

b) ¿Qué espacio recorrió en esos 5 s?

c) ¿Qué velocidad tendrá los 11 s?

Datos:

$$v_0 = 0 \text{ km/h} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_f = 90 \text{ km/h} = (90 \text{ km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 25 \text{ m/s}$$

$$t = 5 \text{ s}$$

$$\text{a) } v_f = a \cdot t$$

$$t = v_f / a$$

$$a = (25 \text{ m/s}) / (5 \text{ s})$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } x = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

$$x = a \cdot t^2 / 2$$

$$x = (5 \text{ m/s}^2) \cdot (5 \text{ s})^2 / 2$$

$$x = 62,5 \text{ m}$$

$$\text{c) } v_f = (5 \text{ m/s}^2) \cdot (11 \text{ s})$$

$$v_f = 55 \text{ m/s}$$

9. Un motociclista parte del reposo y tarda 10 s en recorrer 20 m. ¿Qué tiempo necesitará para alcanzar 40 km/h?

Datos:

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$x = 20 \text{ m}$$

$$v_{f2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(40 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot \left(1000 \frac{\text{m}}{1 \text{ km}}\right) \cdot \left(1 \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}}\right) = 11,11 \text{ m/s}$$

$$x = (v_f/t) \cdot t^2/2$$

$$a = (4 \text{ m/s})(10 \text{ s})$$

$$x = v_f \cdot t/2$$

$$a = 0,4 \text{ m/s}^2$$

$$v_f = 2 \cdot x/t$$

$$v_f = 2 \cdot (20\text{m})/(10 \text{ s})$$

$$v_f = 4 \text{ m/s}$$

$$v_{f2} = v_0 + a \cdot t$$

$$v_{f2} = a \cdot t$$

$$t = v_{f2}/a$$

$$t = (11,11 \text{ m/s})/(0,4 \text{ m/s}^2)$$

$$t = 27,77 \text{ s}$$

10. Un automóvil parte del reposo con una aceleración constante de 30 m/s^2 , transcurridos 2 minutos deja de acelerar y sigue con velocidad constante

Determinar:

a) ¿Cuántos km recorrió en los 2 primeros minutos?

b) ¿Qué distancia habrá recorrido a las 2 horas de la partida?

$$a) \ x_1 = (30 \text{ m/s}^2) \cdot (120 \text{ s})^2/2$$

$$x_1 = 216000 \text{ m} = 216 \text{ km}$$

b) hallamos la velocidad a los 2 min:

$$v_f = (30m/s^2)(120 s)$$

$$v_f = 36 m/s$$

A partir de ahora la velocidad es constante, por lo tanto:

$$v = 36 m/s$$

Pero $v_f = v_0$ para la segunda parte y para un tiempo de:

$$t = t_2 - t_1$$

$$t = 7200 s - 120 s$$

$$t = 7080 s$$

Primero calculamos la distancia recorrida con una velocidad constante:

$$x_2 = v \cdot t$$

$$x_2 = (3600 m/s) \cdot (7080s)$$

$$x_2 = 25488000 m = 25488 km$$

Ahora calculamos la distancia recorrida durante los 7200 s sumando ambas distancias:

$$x = x_1 + x_2 = 216000 m + 25488000 m = 257040 m$$

$$x = 25704 km$$

2.5. Caída libre

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la Antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso.

Diecinueve siglos después, Galileo afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso. Los experimentos muestran que si puede omitirse el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, sea cual fuere su tamaño o peso. Si además la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante.

El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina caída libre, aunque también incluye el movimiento ascendente.

Se le llama caída libre al movimiento que se debe únicamente a la influencia de la gravedad.

Todos los cuerpos con este tipo de movimiento tienen una aceleración dirigida hacia abajo cuyo valor depende del lugar en el que se encuentren. En la Tierra este valor es de aproximadamente 9.8 m/s^2 , es decir que los cuerpos dejados en caída libre aumentan su velocidad (hacia abajo) en 9.8 m/s cada segundo.

En la caída libre no se tiene en cuenta la resistencia del aire.

La aceleración a la que se ve sometido un cuerpo en caída libre es tan importante en la Física que recibe el nombre especial de aceleración de la gravedad y se representa mediante la letra g .

1. ¿Se lanza una pelota directamente hacia abajo, con una rapidez inicial de 8 m/s , desde una altura de 30 m . Después de que intervalo de tiempo llega la pelota al suelo?

$$h = 30 \text{ m} \quad V_0 = 8 \text{ m/s} \quad a = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$h = V_0 t + \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$30 = 8 * t + \frac{1}{2} * 9,8 * t^2$$

$$30 = 8t + 4,9t^2$$

Ordenando la ecuación

$$4,9t^2 + 8t - 30$$

$$a = 4,9 \quad b = 8 \quad C = -30$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 * 4,9 * (-30)}}{2(4,9)}$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 588}}{9,8} = \frac{-8 \pm \sqrt{652}}{9,8}$$

$$t = 1,79 \text{ s}$$

2 Una estudiante lanza un llavero verticalmente hacia arriba a su hermana del club femenino de estudiantes, que está en una ventana 4 m arriba. Las llaves son atrapadas $1,5 \text{ s}$. Después por el brazo extendido de la hermana. a) ¿Con que velocidad inicial fueron lanzadas las llaves? b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes que fueran atrapadas? ¿Con que velocidad inicial fueron lanzadas las llaves?

$$h = 4 \text{ m} \quad t = 1,5 \text{ s} \quad V_0 = ? \quad a = 9,8 \text{ m/s}^2$$

a)

$$t = 1,5 \text{ s}$$

$$h = V_0 * t + \frac{1}{2} * g * t^2$$

$$4 = V_0 * 1,5 - \frac{1}{2} * 9,8 * 1,5^2$$

$$4 = 1,5V_0 - 11,025$$

$$4 + 11,025 = 1,5V_0$$

$$15,025 = 1,5V_0$$

$$V_0 = \frac{15,025}{1,5} = 10 \text{ m/s}$$

b) $V_0 = 10 \text{ m/s} \quad a = 9,8 \text{ m/s}^2$

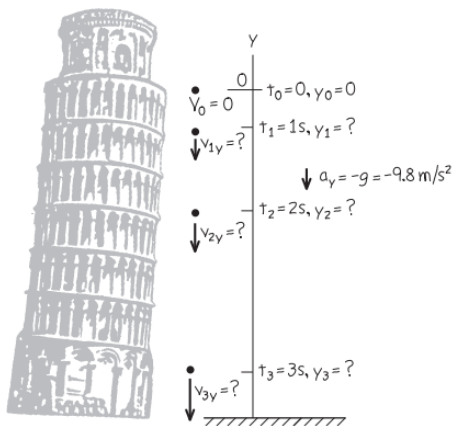
$$V_f = V_0 - g t$$

$$V_f = 10 - 9,8 (1,5)$$

$$V_f = 10 - 14,7$$

$$V_f = -4,7 \text{ m/s}$$

3. Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1, 2 y 3 s.



$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$= 0 + (-g)t = (-9.8 \text{ m/s}^2)t$$

La posición y la velocidad a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. ¿Puede usted demostrar que $y = -19.6 \text{ m}$ y $v_y = -19.6 \text{ m/s}$ en $t = 2.0 \text{ s}$, y que $y = -44.1 \text{ m}$ y $v_y = -29.4 \text{ m/s}$

En $t = 3.0 \text{ s}$?

4. Determina la aceleración de la gravedad en la Luna sabiendo que si dejas caer un objeto desde una altura de 5m, este tarda 2.47 s en llegar al suelo.

Datos:

$$h = 5 \text{ m}$$

$$t = 2.47$$

Aplicando la fórmula de la posición en caída libre, cuando el objeto se encuentra en el suelo ($y = 0$), obtenemos que:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$0 \text{ m} = 5 \text{ m} - 0.5 \cdot g \cdot (2.47 \text{ s})^2$$

$$g = \frac{5 \text{ m}}{3.05 \text{ s}^2}$$

$$g = 1.63 \text{ m/s}^2$$

5) Un vaso de agua situado al borde de una mesa cae hacia el suelo desde una altura de 1.5 m. Considerando que la gravedad es de 10 m/s, calcular:

a) El tiempo que está el vaso en el aire.

b) La velocidad con la que impacta en el suelo.

Datos:

$$h = 1.5 \text{ m}$$

$$g = 10 \text{ m/s}$$

$$a) \quad y = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{-2 \cdot (y - h)}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{-2 \cdot (0 - 1.5)}{10}}$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$t = 0.55 \text{ s}$$

$$b) \quad v = -g \cdot t$$

$$v = -10 \text{ m/s}^2 \cdot 0.55 \text{ s}$$

$$v = 5.5 \text{ m/s}$$

6. Determina la profundidad de un pozo sobre el que se deja caer una piedra, y en el que se escucha el impacto sobre el agua después de transcurridos 1.5 s, teniendo en cuenta que la velocidad del sonido es 340 m/s.

Datos:

$$t = 1.5 \text{ s}$$

$$v_{\text{sonido}} = 340 \text{ m/s}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$h = ?$$

Vamos a considerar dos partes en este ejercicio:

- Parte 1. La piedra desciende hasta impactar con el agua del fondo del pozo
- Parte 2. El sonido avanza desde el agua hasta la superficie del pozo.

Si llamamos t_1 al tiempo en que tarda en caer la piedra y t_2 el tiempo que tarda en subir el sonido desde el fondo del pozo, tenemos que:

$$t = t_1 + t_2$$

Estudiaremos cada una de las partes por separado:

Parte 1

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$0 = h - 0.5 \cdot 9.8 \cdot t_1^2$$

$$h = 4.9 \cdot t_1^2$$

Parte 2

$$x = v \cdot t$$

$$h = v_{\text{sonido}} \cdot t_2$$

$$h = 340 \cdot t_2$$

Si igualamos h en ambas ecuaciones y sabiendo que $t = t_1 + t_2$:

$$4.9 \cdot t_1^2 = 340 \cdot t_2$$

$$1.5 = t_1 + t_2$$

$$4.9 \cdot t_1^2 - 340 \cdot t_2 = 0$$

$$t_2 = 1.5 - t_1$$

$$4.9 \cdot t_1^2 - 340 \cdot (1.5 - t_1) = 0$$

$$4.9 \cdot t_1^2 - 340 \cdot t_1 - 510 = 0$$

$$t_1 = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 - 4 \cdot 4.9 \cdot (-510)}}{2 \cdot 4.9}$$

$$t_1 = 1.47 \text{ s}$$

Sustituyendo ahora t_1 en la ecuación de la parte 1:

$$h = 4.9 \cdot (1.47)^2$$

$$h = 10.59 \text{ m}$$

7. Un grifo estropeado deja escapar gotas de agua cada $1/4$ de segundo. Si el grifo se encuentra a 3 metros de altura sobre el suelo, y en este instante sale una, determinar cuál es la posición de las gotas que se encuentran en el aire en este momento.

Datos:

$$h = 3 \text{ m}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Tiempo que llevan en el aire cada una de las gotas

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

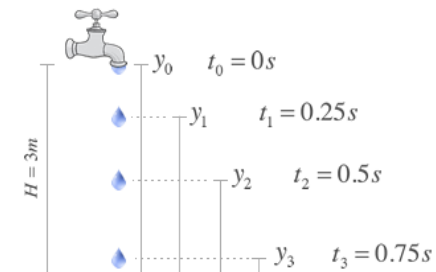
$$y_0 = 3 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (0)^2 = 3 \text{ m}$$

$$y_1 = 3 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (0.25)^2 = 2.69 \text{ m}$$

$$y_2 = 3 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (0.5)^2 = 1.77 \text{ m}$$

$$y_3 = 3 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (0.75)^2 = 0.24 \text{ m}$$

$$y_4 = 3 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (1)^2 = -1.9 \text{ m}$$



Como puedes comprobar, la posición de la gota y_4 es un número negativo, por tanto si el suelo se encuentra en $y = 0$, dicha gota se estrelló contra el suelo hacía tiempo y por tanto no se encuentra en el aire en este momento. De aquí se deduce que hay tan solo 4 gotas flotando.

8. Se deja caer libremente una piedra desde cierta altura. ¿Cuál será la velocidad de la piedra a los 8 segundos de comenzar su caída si nunca llega a tocar el suelo? ¿Cuántos metros habrá recorrido durante ese tiempo?

Datos:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$t = 8 \text{ s}$$

$$v = -g \cdot t$$

$$v = -9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 8 \text{ s}$$

$$v = -78.4 \text{ m/s}$$

Para conocer cuantos metros habrá recorrido, debemos calcular el desplazamiento de la piedra (Δy). Dicho desplazamiento se calcula resta la posición a los 8 segundos (y_8) y la posición en el instante 0 (y_0). Si desarrollamos las ecuaciones de la posición en ambos casos:

$$\Delta y = y_8 - y_0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_8^2 - \left(h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2 \right)$$

$$\Delta y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 8^2 - \left(h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 8^2 \right)$$

$$\Delta y = h - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 8^2 - h$$

$$\Delta y = 313.6 \text{ m}$$

9) Desde la parte alta de este moderno edificio se deja caer una pelota, si tarda 3 segundos en llegar al piso ¿cuál es la altura del edificio? ¿Con qué velocidad impacta contra el piso?

Datos:

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

$$t = 3 \text{ s}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$h = x$$



Desde lo alto dejamos caer una pelota.

$$v_f = v_0 + g \cdot t$$

$$v_f = 0 \text{ m/s} + 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s}$$

$$v_f = 29.43 \text{ m/s}$$

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h = 0 \text{ m/s} \cdot 3 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (9.8 \text{ m/s}^2) \cdot (3 \text{ s})^2$$

$$h = 0 + \frac{1}{2} \cdot (9.8 \text{ m/s}^2) \cdot 9 \text{ s}^2$$

$$h = \frac{1}{2} (88.29 \text{ m})$$

$$h = \frac{88.29}{2} \text{ m}$$

$$h = 44.15 \text{ m}$$

10) Una pelota, que parte del reposo, se deja caer durante 5 segundos.

a) ¿Cuál es su posición en ese instante?

b) ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

Datos:

$$t = 5 \text{ s}$$

$$v_0 = 0$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\text{a) } d = v_0 \cdot t + g \cdot t^2$$

$$0(5\text{s})/2 + 9.8 \text{ m/s}^2 (5 \text{ s})^2 / 2$$

$$= 122.5 \text{ m}$$

$$\text{b) } v_f = g \cdot t + v_0$$

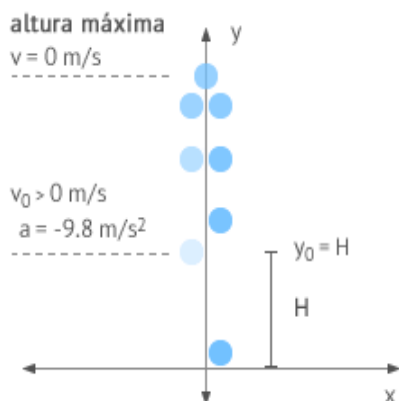
$$9.8 \text{ m/s}^2 (5\text{s}) + 0$$

$$= 49 \text{ m/s}$$

2.6. Lanzamiento vertical hacia arriba

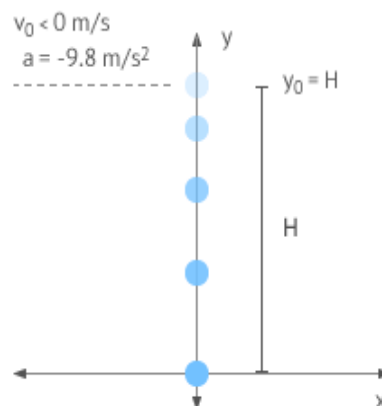
En el **lanzamiento vertical** un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba o hacia abajo desde cierta *altura* H despreciando cualquier tipo de rozamiento con el aire o cualquier otro obstáculo. Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) o movimiento rectilíneo uniformemente variado (m.r.u.v.) en el que *la aceleración coincide con el valor de la gravedad*. En la superficie de la Tierra, la aceleración de la gravedad se puede considerar constante, dirigida hacia abajo, se designa por la letra g y su valor es de 9.8 m/s^2 .

Para estudiar el movimiento de **lanzamiento vertical** normalmente utilizaremos un sistema de referencia cuyo origen de coordenadas se encuentra en el pie de la vertical del punto desde el que lanzamos el cuerpo y



Lanzamiento Vertical hacia Arriba

El cuerpo se lanza hacia arriba desde una altura H y con una velocidad mayor que 0. A medida que asciende su velocidad va descendiendo hasta que llega a 0 (altura máxima). Desde ese momento su velocidad es negativa y comienza a descender.



Lanzamiento Vertical hacia Abajo

El cuerpo se lanza hacia abajo desde una altura H y con una velocidad menor que 0 que se mantendrá negativa durante todo el recorrido.

consideraremos el *sentido positivo del eje y apuntando hacia arriba*, tal y como puede verse en la figura:

1. Una estudiante lanza un llavero verticalmente hacia arriba a su hermana del club femenino de estudiantes, que está en una ventana 4m arriba. Las llaves son atrapadas 1.5seg. Después por el brazo extendido de la hermana.

Calcular:

- a) ¿Con que velocidad inicial fueron lanzadas las llaves?
b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes que fueran atrapadas?

Datos:

$$h = 4m$$

$$t = 1,5m$$

$$v_o = ?$$

a) $h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$

$$4 = v_o(1,5) - \frac{1}{2}(9,8)(1,5)^2$$

$$4 = (1,5)v_o - 11,025$$

$$4 + 11,025 = 1,5v_o$$

$$15,025 = 1,5v_o$$

$$v_o = \frac{15,025}{1,5}$$

$$v_o = 10 \text{ m/seg}$$

b) $v_f = v_o - g t$

$$v_f = 10 - (9,8)(1,5)$$

$$v_f = 10 - (14,7)$$

$$v_f = -4,7 \text{ m/seg}$$

2. Una pelota de béisbol es golpeada de modo que sube directamente hacia arriba después de ser tocada por el bat. Un aficionado observa que la pelota tarda 3 seg. en alcanzar su máxima altura.

Encuentre:

- a) Su velocidad inicial.
b) La altura que alcanza.

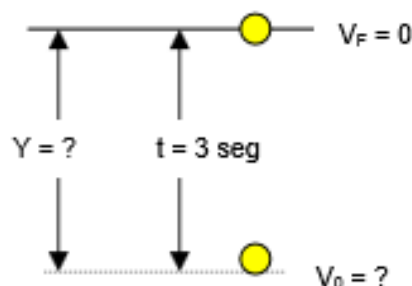
Datos:

$$v_o = ?$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}$$

$$t = 3 \text{ seg}$$

Su velocidad inicial es:



$$v_f = v_o - gt$$

$$gt = v_o$$

$$v_o = (9,8)(3)$$

$$v_o = 29,4 \text{ m/seg}$$

$$h = \frac{864,36}{19,6} \text{ m}$$

$$h = 44,1 \text{ m}$$

Su altura que alcanza es:

$$v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

$$v_o^2 = 2gh$$

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

$$h = \frac{(29,4 \text{ m/seg})^2}{2(9,8 \text{ m/seg}^2)}$$

3. Es posible disparar una flecha a una rapidez de hasta 100 m/seg. ¿A qué altura subiría una flecha lanzada a esta velocidad si se dispara directamente hacia arriba?

Datos:

$$v_o = 100 \text{ m/seg}$$

$$v_f = 0$$

$$h = ?$$

$$v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

$$v_o^2 = 2gh$$

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

$$h = \frac{(100 \text{ m/seg})^2}{2(9,8 \text{ m/seg}^2)}$$

$$h = \frac{10000}{19,6} \text{ m}$$

$$h = 510,2 \text{ m}$$

4. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 15 m/seg .

- a) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la pelota alcanza su altitud máxima?
 b) ¿Cual es su altitud máxima

Datos:

$$v_o = 15 \text{ m/seg.}$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}^2$$

Tiempo transcurrido
 Altitud maxima

$$v_f = v_o - gt$$

$$gt = v_o$$

$$t = \frac{v_o}{g}$$

$$t = \frac{15 \text{ m/seg}}{9,8 \text{ m/seg}^2}$$

$$t = 1,53 \text{ seg}$$

$$h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = (15)(1,53) - \frac{1}{2} (9,8)(1,53)^2$$

$$h = 22,95 - 11,47$$

$$h = 11,48 \text{ m}$$

5. Una pelota lanzada verticalmente hacia arriba es capturada por el lanzador después de 20 seg.

Determine:

- a) La velocidad inicial de la pelota.
 b) La altura máxima que alcanza.

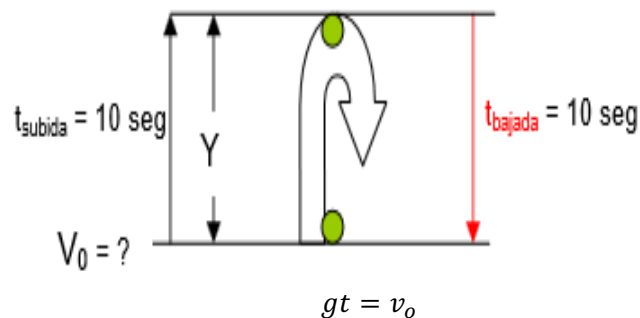
Datos:

$$v_f = 0$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}^2$$

$$t_s = 10 \text{ seg}$$

$$v_f = v_o - gt$$



$$gt = v_o$$

$$v_o = 9,8 \text{ m/seg}^2 * 10 \text{ seg}$$

$$v_o = 98 \text{ m/seg}$$

$$v_o^2 = 2gh$$

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

$$h = \frac{(98 \text{ m/seg})^2}{2(9,8 \text{ m/seg}^2)}$$

$$h = \frac{9604}{19,6}$$

$$= 490 \text{ m}$$

$$a) \quad v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

6. Un armadillo salta hacia arriba alcanzando 0,544 m en 0,25 seg.

- a) ¿Cuál es su velocidad inicial?
 b) ¿Cuál es su velocidad a esta altura?
 c) ¿Qué altura puede alcanzar?

Datos:

$$h = 0,544 \text{ m}$$

$$t = 0,25 \text{ seg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}^2$$

$$a) \quad h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h + \frac{1}{2} g t^2 = v_o t$$

$$0,544 \text{ m} + \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/seg}^2) (0,25 \text{ seg})^2 = v_o (0,25 \text{ seg})$$

$$0,544 \text{ m} + (4,905 \text{ m/seg}^2) (0,0625 \text{ seg}^2) = v_o (0,25 \text{ seg})$$

$$0,544 \text{ m} + 0,307 \text{ m} = v_o (0,25 \text{ seg})$$

$$0,85 \text{ m} = v_o (0,25 \text{ seg})$$

$$v_o = \frac{0,85 \text{ m}}{0,25 \text{ seg}}$$

$$v_o = 3,40 \text{ m/seg}$$

$$b) \quad v_f = v_o - g t$$

$$v_f = 3,4 \text{ m/seg} - (9,8 \text{ m/seg}^2) (0,25 \text{ seg})$$

$$v_f = 3,4 \text{ m/seg} - 2,45 \text{ m/seg}$$

$$v_f = 0,95 \text{ m/seg}$$

$$c) \ v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

$$v_o^2 = 2gh$$

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

$$h = \frac{(3,4 \text{ m/seg})^2}{2(9,8 \text{ m/seg}^2)}$$

$$h = \frac{11,56}{19,6}$$

$$h = 0,59 \text{ m}$$

7. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una $v_o = 100 \text{ m/seg}$, luego de 4 seg de efectuado el lanzamiento su velocidad es de 60 m/seg .

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Datos:

$$v_o = 100 \text{ m/seg}$$

$$t = 4 \text{ seg}$$

$$v_f = 60 \text{ m/seg}$$

$$a) \ v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

$$v_o^2 = 2gh$$

$$h_{max} = \frac{v_o^2}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{(100 \text{ m/seg})^2}{2(9,8 \text{ m/seg}^2)} \quad h_{max} =$$

$$510,2 \text{ m}$$

2.7. Lanzamiento vertical hacia abajo

Todos los cuerpos con este tipo de movimiento tienen una aceleración dirigida hacia abajo cuyo valor es de aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$, es decir que los cuerpos dejados en caída libre aumentan su velocidad (hacia abajo) en $9,8 \text{ m/s}$ cada segundo.

CARACTERÍSTICAS.

La caída libre es un movimiento con aceleración constante o uniforme. La fuerza de gravedad es la que produce la aceleración constante en la caída libre.

Todos los cuerpos en caída libre tienen la misma aceleración. El valor de g (aceleración) es de 9.81 m/s^2

La velocidad final debe ser diferente de 0 y la velocidad inicial es igual a 0.
ECUACIONES.

$$V_f = V_o + at \rightarrow V_f = gt$$

$$x = V_o t + at^2/2 \rightarrow y = gt^2/2$$

$$2ax = V_f^2 - V_o^2 \rightarrow 2gy = V_f^2$$

1. Desde una altura de 25 m se lanza una piedra en dirección vertical contra el suelo con una velocidad inicial de 3 m/s .

Calcular:

- a) El tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo.
- b) La velocidad con que llega a él.

Datos:

$$h = 25 \text{ m}$$

$$v_o = 3 \text{ m/seg}$$

$$v_f^2 = v_o^2 + 2gh$$

$$v_f^2 = (3)^2 + 2(9,8)(25)$$

$$v_f^2 = 499 \text{ m}^2/\text{seg}^2$$

$$v_f = 22,34 \text{ m/seg}$$

$$a) \quad v_f = v_o + gt$$

$$t = \left(\frac{v_f - v_o}{g} \right)$$

$$t = \left(\frac{22,34 - 3}{9,8} \right)$$

$$t = 1,97 \text{ seg}$$

2. En Mostar, Bosnia, la prueba máxima del valor de un joven era saltar de un puente de 400 años de antigüedad (ahora destruido) hacia el río Neretva, 23 m abajo del puente.

Determinar:

- ¿Cuanto duraba el salto?
- ¿Con que rapidez caía el joven al impacto con el agua?
- Si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/seg. ¿Cuánto tiempo, después de saltar el clavadista, un espectador sobre el puente escucha el golpe en el agua?

Datos:

$$h = 23 \text{ m}$$

$$v_o = 0$$

$$v_s = 340 \text{ m/seg}$$

$$\text{a) } h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$23 = \frac{1}{2} (9,8) t^2$$

$$23 = 4,8 t^2$$

$$t^2 = \frac{23}{4,8}$$

$$t^2 = 4,69$$

$$t = 2,16 \text{ seg}$$

$$\text{b) } v_f = v_o + at$$

$$v_f = at$$

$$v_f = (9,8)(2,16)$$

$$v_f = 21,23 \text{ m/seg}$$

$$\text{c) } h = v_{\text{sonido}} * t_{\text{sonido}}$$

$$t_{\text{sonido}} = \frac{h}{v_{\text{sonido}}}$$

$$t_{\text{sonido}} = \frac{23 \text{ m}}{340 \text{ m/seg}}$$

$$t_{\text{sonido}} = 0,07 \text{ seg}$$

$$t_{\text{total}} = t + t_{\text{sonido}}$$

$$t_{\text{total}} = 2,16 \text{ seg} + 0,07 \text{ seg}$$

$$t_{\text{total}} = 2,09 \text{ seg}$$

3. Se lanza una pelota directamente hacia abajo, con una rapidez inicial de 8 m/seg., desde una altura de 30 m.

Calcular:

¿Después de que intervalo de tiempo llega la pelota al suelo?

Datos:

$$h = 30 \text{ m}$$

$$v_o = 8 \text{ m/seg}$$

$$h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$30 = 8 \text{ m/seg } t + \frac{1}{2} (9,8) t^2$$

$$30 = 8t + 4,9t^2$$

$$4,9t^2 + 8t - 30 = 0$$

$$a = 4,9t^2$$

$$b = 8t$$

$$c = -30$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(4,9)(-30)}}{2(4,9)}$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 588}}{9,8}$$

$$t = \frac{-8 \pm 25,53}{9,8}$$

$$t = 1,79 \text{ seg}$$

2. Un osado ranchero, sentado en la rama de un árbol, desea caer verticalmente sobre un caballo que galopa abajo del árbol. La rapidez constante del caballo es 10 m/seg. y la distancia de la rama al nivel de la silla de montar es 3 m.

- ¿Cual debe ser la distancia horizontal entre la silla y la rama cuando el ranchero hace su movimiento?**
- ¿Cuanto tiempo estará el en el aire?**

Datos:

$$h = 3 \text{ m}$$

$$v_c = 10 \text{ m/seg}$$

$$v_o = 0$$

$$a) h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$2h = g t^2$$

$$t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(3m)}{9,8 m/seg^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{6 m}{9,8 m/seg^2}}$$

$$t = \sqrt{0,61 seg}$$

$$t = 0,78 seg$$

$$b) x = v_{caballo} * t$$

$$x = 10 m/seg * 0,78 seg$$

$$x = 7,8m$$

3. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 7 m/seg.

- a) ¿Cuál será su velocidad luego de haber descendido 3 seg?
- b) ¿Qué distancia habrá descendido en esos 3 seg?.
- c) ¿Cuál será su velocidad después de haber descendido 14 m?.
- d) Si el cuerpo se lanzó desde una altura de 200 m, ¿en cuánto tiempo alcanzará el suelo?.
- e) ¿Con qué velocidad lo hará?.

Datos:

$$v_0 = 7 m/seg$$

$$t = 3 seg$$

$$h = 14 m$$

$$g = 9,8 m/seg^2$$

$$a) v_f = v_0 + g t$$

$$v_f = 7 m/seg + (9,8 m/seg^2)(3 seg)$$

$$v_f = 7 m/seg + 29,4 m/seg$$

$$v_f = 36,4 m/seg$$

$$b) h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 7 m/seg (3 seg) + \frac{1}{2} (9,8 m/seg^2) (3 seg)^2$$

$$h = 21m + (4,9 \text{ m/seg}^2)(9\text{seg}^2)$$

$$h = 21m + 44,1m$$

$$h = 65,1m$$

$$\text{c) } v_f^2 = v_o^2 + 2gh$$

$$v_f = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$$

$$v_f = \sqrt{(7 \text{ m/seg})^2 + 2(9,8 \text{ m/seg}^2)(14 \text{ m})}$$

$$v_f = \sqrt{49 \text{ m}^2/\text{seg}^2 + 274,4 \text{ m}^2/\text{seg}^2}$$

$$v_f = \sqrt{323,4 \text{ m}^2/\text{seg}^2}$$

$$v_f = 17,98 \text{ m/seg}$$

$$\text{d) } h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$200 = 7t + 4,9t^2$$

$$4,9t^2 + 7t - 200 = 0$$

$$a = 4,9$$

$$b = 7$$

$$c = -200$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(4,9)(-200)}}{2(4,9)}$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 3920}}{(9,8)}$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{3969}}{(9,8)}$$

$$t = \frac{-7 \pm 63}{(9,8)}$$

$$t = \frac{-7 + 63}{(9,8)}$$

$$t = \frac{56}{9,8}$$

$$t = 5,71 \text{ seg}$$

$$e) v_f^2 = v_o^2 + 2gh$$

$$v_f = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$$

$$v_f = \sqrt{(7 \text{ m/seg})^2 + 2(9,8 \text{ m/seg}^2)(200 \text{ m})}$$

$$v_f = \sqrt{49 \text{ m}^2/\text{seg}^2 + 3920 \text{ m}^2/\text{seg}^2}$$

$$v_f = \sqrt{3969 \text{ m}^2/\text{seg}^2}$$

$$v_f = 63$$

4. Una chica lanza un pelota en línea recta hacia abajo desde la parte más alta de un edificio de 50 *pies* de altura con una rapidez de 20 *m/seg*.

Calcular:

- a) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar el suelo?
 b) ¿Qué velocidad tiene en el instante anterior al choque contra el suelo?

Datos:

$$h = 50 \text{ ft} * \frac{0,305 \text{ m}}{1 \text{ ft}} = 15,25 \text{ m}$$

$$v_o = 20 \text{ m/seg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}^2$$

$$a) h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$15,25 = 20t + 4,9t^2$$

$$4,9t^2 + 20t - 15,25 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 4,9$$

$$b = 20$$

$$c = -15,25$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(4,9)(-15,25)}}{2(4,9)}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{698,9}}{9,8}$$

$$t = \frac{-20 \pm 26,44}{9,8}$$

$$t = 0,66 \text{ seg}$$

$$b) v_f = v_o + gt$$

$$v_f = 20 \text{ m/seg} + (9,8 \text{ m/seg}^2)(0,66 \text{ seg})$$

$$v_f = 26,47 \text{ m/seg}$$

5. Se deja caer un cuerpo libremente al suelo y llega con una velocidad de $29,4 \text{ m/seg}$.

Determinar:

- a) El tiempo empleado en caer.
- b) La altura del punto de partida.

Datos:

$$v_o = 0$$

$$v = 29,4 \text{ m/seg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}^2$$

$$a) v_f^2 = v_o^2 + 2gh$$

$$2gh = v_f^2$$

$$h = \frac{v_f^2}{2g}$$

$$h = \frac{(29,4)^2}{2(9,8)}$$

$$h = \frac{864,36 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{19,6}$$

$$h = 44,1 \text{ m}$$

$$b) v_f = v_o + gt$$

$$v_f = gt$$

$$t = \frac{v_f}{g}$$

$$t = \frac{29,4 \text{ m/seg}}{9,8 \text{ m/seg}^2}$$

$$t = 3 \text{ seg}$$

*La mente es igual que un paracaídas, solo funciona
sí se abre
Albert Einstein*

CAPITULO III

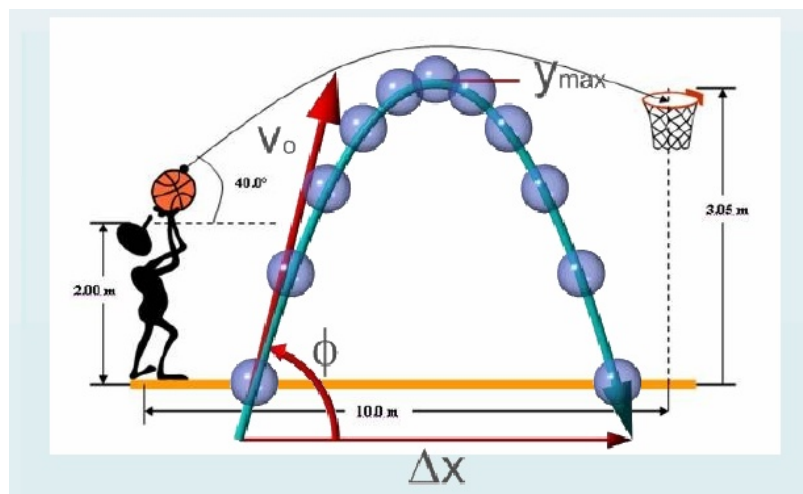
OBJETIVOS

- Identificar el movimiento en dos dimensiones, y la independencia de sus vectores. Un objeto que se lanza al espacio sin fuerza de propulsión propia recibe el nombre de proyectil. Si se desprecia la resistencia ejercida por el aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, que hace que su trayectoria se desvíe de la línea recta.
- Encontrar la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado horizontalmente.
- Determinar la velocidad del proyectil
- Tener una mejor visión en cuanto al movimiento de 2 dimensiones.



CAPITULO III

Identificar el movimiento en dos dimensiones, y la independencia de sus vectores.



INTRODUCCIÓN

Se le llama en dos dimensiones, porque la posición de la partícula en cada instante, se puede representar por dos coordenadas, respecto a unos ejes de referencia. El movimiento en 2 dimensiones es cuando la partícula se mueve tanto horizontal como verticalmente.

El movimiento de una partícula en dos dimensiones es la trayectoria de la partícula en un plano (vertical, horizontal, o en cualquier otra dirección del plano). Las variables a las que está sometida la partícula son dos y por eso se le denomina movimiento en dos dimensiones.

CARACTERÍSTICAS

El movimiento en dos dimensiones se caracteriza por dos movimientos uno ascendente, y otro descendente, como caso particular, un objeto o móvil.

Esto puede desarrollar dentro de un espacio el movimiento descendente desde un punto alto, esto se llama, movimiento semi-parabólico.

Las trayectorias de rifles o cánones no son realmente parabólicas debido a la fricción del proyectil en el aire. Por ende la parábola es una aproximación muy burda que no sirve para calcular trayectorias de artillería.

COMPONENTES

Velocidad

Desplazamiento

La altura máxima que alcanza un cuerpo que se mueve según movimiento parabólico

El tiempo que está en el aire

El alcance

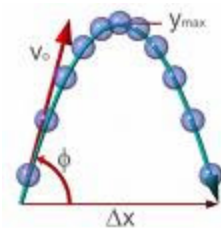
El ángulo de la trayectoria

CAPITULO III

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

3.1. Tiro Parabólico

Se denomina movimiento parabólico al realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme.



Puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos: un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical.

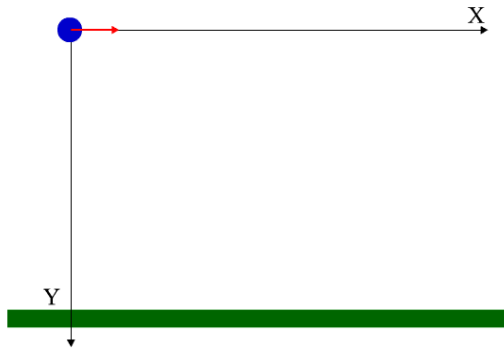
OBJETIVOS

1. Estudiar los conceptos básicos del movimiento parabólico descrito en la experiencia realizada en el laboratorio.
2. Describir las características del movimiento parabólico que realiza el balón.
3. Desarrollar los conceptos de velocidad, distancia y gravedad descritos por el movimiento y la distancia del balón al ser lanzados hacia distancias cada vez mayores.
4. Analizar por medio de los datos el movimiento y determinar su comportamiento con respecto al plano coordenado (abscisa x, ordenada y).

3.2 Tipos de movimiento parabólico

Movimiento de media parábola

El movimiento de media parábola o semiparabólico (lanzamiento horizontal) se puede considerar como la composición de un avance horizontal rectilíneo uniforme y la caída libre.



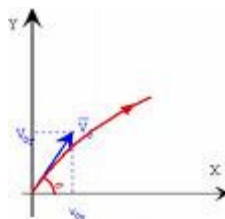
Movimiento de media parábola

El movimiento parabólico completo

Puede considerarse como la composición de un avance horizontal rectilíneo uniforme y un lanzamiento vertical hacia arriba, que es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado hacia abajo (MRUA) por la acción de la gravedad.

En condiciones ideales de resistencia al avance nulo y campo gravitatorio uniforme, lo anterior implica que:

1. Un cuerpo que se deja caer libremente y otro que es lanzado horizontalmente desde la misma altura tardan lo mismo en llegar al suelo.
2. La independencia de la masa en la caída libre y el lanzamiento vertical es igual de válida en los movimientos parabólicos.
3. Un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba y otro parabólicamente completo que alcance la misma altura tarda lo mismo en caer.



3.3 Ecuaciones del movimiento parabólico

Hay dos ecuaciones que rigen el movimiento parabólico:

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \phi \mathbf{i} + v_0 \sin \phi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{j}$$

Donde:

v_0 es el módulo de la velocidad inicial.

ϕ es el ángulo de la velocidad inicial sobre la horizontal.

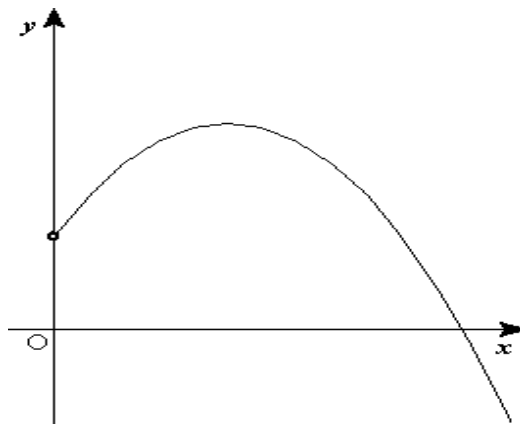
g es la aceleración de la gravedad.

La velocidad inicial se compone de dos partes:

$v_0 \cos \phi$ que se denomina componente horizontal de la velocidad inicial.

En lo sucesivo v_{0x}

$v_0 \sin \phi$ que se denomina componente vertical de la velocidad inicial.



En lo sucesivo v_{0y}

La velocidad inicial se compone de dos partes:

$v_0 \cos \phi$ que se denomina componente horizontal de la velocidad inicial.

En lo sucesivo v_{0x}

$v_0 \sin \phi$ que se denomina componente vertical de la velocidad inicial.

En lo sucesivo v_{0y}

Será la que se utilice, excepto en los casos en los que deba tenerse en cuenta el ángulo de la velocidad inicial.

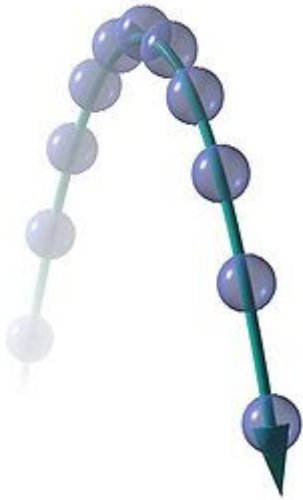
Ecuación de la aceleración

La única aceleración que interviene en este movimiento es la de la gravedad, que corresponde a la ecuación:

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{j}$$

Ecuación de la velocidad

La velocidad de un cuerpo que sigue una trayectoria parabólica se puede obtener integrando la siguiente ecuación:

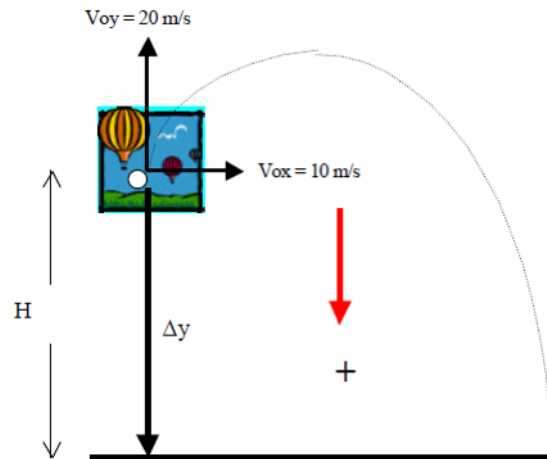


La integración es muy sencilla por tratarse de una ecuación diferencial de primer orden y el resultado final es:

$$\mathbf{v}(t) = v_{0x} \mathbf{i} + (v_{0y} - gt) \mathbf{j}$$

Cuando un objeto es lanzado con cierta inclinación respecto a la horizontal y bajo la acción solamente de la fuerza gravitatoria su trayectoria se mantiene en el plano vertical y es parabólica.

1. Un globo asciende con velocidad constante de 20 m/s . A los cinco segundos de su partida se lanza desde el globo un objeto horizontalmente con una velocidad de 10 m/s . El tiempo que tardará el objeto en llegar al suelo desde el instante en que fue lanzado es:



Solución:

Aun cuando el objeto se lanza horizontalmente, observe que este se mueve verticalmente junto con el globo, es decir, el objeto describirá una trayectoria parabólica donde los 10 m/s corresponde a V_{ox} y los 20 m/s corresponde a V_{oy} .

Para determinar el tiempo que tarda en llegar al suelo, necesitamos saber desde que altura fue lanzado. Conociendo la altura, ya podremos calcular el tiempo que tarda el objeto en experimentar un desplazamiento vertical igual en magnitud a la altura determinada anteriormente.

Determinación de la altura desde donde fue lanzado el objeto:

$$h = V_{oy}t ; \text{ el globo asciende con velocidad constante}$$

$$h = 20(5)$$

Determinación del tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo:

Tomemos como sistema de referencia el suelo y consideremos que todas las cantidades vectoriales que apuntan hacia abajo son positivas.

Desde que el objeto parte hasta que llega al suelo experimenta un desplazamiento vertical de 100 metros.

$$\begin{aligned} \Delta y &= V_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 \\ 100 &= -20t + 4,9t^2 \\ 4,9t^2 - 20t - 100 &= 0 \\ &= \frac{-(-20) \pm \sqrt{20^2 - 4(4,9)(-100)}}{2(4,9)} \end{aligned}$$

$$t = \frac{20 \pm 48,58}{9,8}$$

$$t = 7,0 \text{ s}$$

2. Utilizando los datos dados en la figura, la altura h desde donde fue lanzado el proyectil con un $\theta = 40^\circ$ es:

Solución:

Determinemos el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, este tiempo lo encontramos conociendo el desplazamiento horizontal, y recordando que la componente horizontal del movimiento parabólico es un movimiento rectilíneo uniforme.

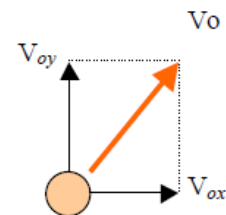
$$\Delta x = V_{ox} t$$

$$V_{ox} = V_o \cos 40^\circ$$

$$V_{ox} = 72 \text{ m/s}$$

$$t = 1000/72$$

$$t = 13,89 \text{ s}$$



Tomemos como sistema de referencia el suelo y consideremos que todas las cantidades vectoriales que apuntan hacia abajo son positivas.

$$\Delta y = V_{oy} t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$V_{oy} = -V_o \sin 40^\circ$$

$$V_{oy} = -60,4 \text{ m/s}$$

$$\Delta y = (-60,4)(13,89) + \frac{1}{2} (9,8)(13,89)^2$$

$$\Delta y = 106,4 \text{ m}$$

3. La altura máxima que alcanza el proyectil medida desde el punto donde fue lanzado es:

Solución:

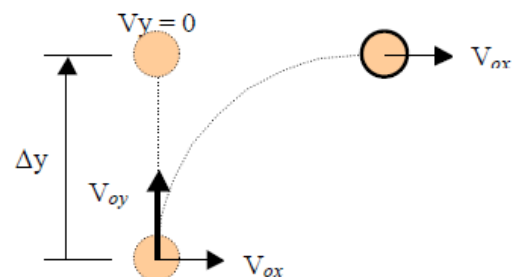
Cuando el objeto alcanza la altura máxima la componente de la velocidad en "y" es cero ($V_y = 0$).

$$V_y^2 = V_{oy}^2 + 2g\Delta y$$

$$0 = (-60,4)^2 + 2(9,8)\Delta y$$

$$\Delta y = -186 \text{ m}$$

la altura máxima es de 18 m.



4. La rapidez del proyectil al llegar al suelo es:**Solución:**

Ya conocemos la componente horizontal de la velocidad del proyectil al llegar al suelo (V_{ox}), recordemos que la componente horizontal del movimiento parabólico es un movimiento uniforme. Nos queda por determinar la componente vertical de la velocidad al instante de impactar el suelo (V_y). Una vez conocida esta componente, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la velocidad del proyectil al impactar el suelo.

$$V_y = V_{oy} + gt$$

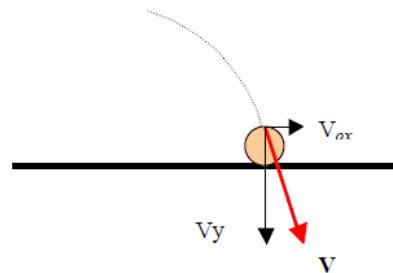
$$V_y = -60,4 + (9,8)(13,89)$$

$$V_y = 75,7 \text{ m/s}$$

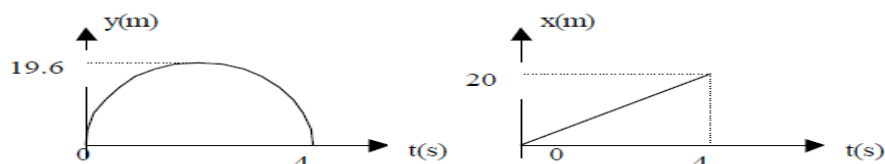
$$V = \sqrt{V_{ox}^2 + V_y^2}$$

$$V = \sqrt{(72)^2 + (75,7)^2}$$

$$V = 104,5 \text{ m/s}$$



5. En un partido de fútbol un jugador cobra un tiro libre. Los gráficos representan los movimientos de la pelota. Despreciando la resistencia del aire. La rapidez con que la pelota llega al suelo es

**Solución:**

Los gráficos representan las diferentes posiciones de la pelota en “y” y en “x” con respecto al tiempo.

Analicemos el gráfico “y” $V_y t$. Nos podemos dar cuenta que el balón alcanza una altura máxima de 19,6 m, y lo logra en 2 segundos.

Al analizar el gráfico “x” $V_x t$. Nos podemos dar cuenta que el balón experimenta un alcance horizontal máximo de 20 metros en 4 segundos.

Para este tipo de parábola, la velocidad (magnitud) con que es disparado el balón es la misma con la que impacta el suelo.

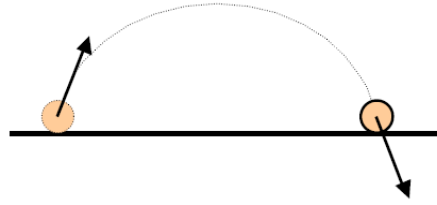
Determinemos la componente en "x" de la velocidad inicial (V_{ox})

$$\Delta x = V_{ox} t$$

$$V_{ox} = \Delta x / t$$

$$V_{ox} = 20 / 4$$

$$V_{ox} = 5 \text{ m/s}$$



Determinemos la componente en "y" de la velocidad inicial (V_{oy}).

$$\Delta y = V_{oy} t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$19,6 = V_{oy}(2) - 4,9(2)^2$$

$$V_{oy} = 19,6$$

$$V_o = \sqrt{V_{ox}^2 + V_{oy}^2}$$

$$V_o = 20,2 \text{ m/s}$$

6. Jimmy está en la parte inferior de la colina, mientras que Billy se encuentra 30 metros arriba de la misma. Jimmy de un sistema de coordenadas está en el origen de un sistema de coordenadas x,y y la línea que sigue la pendiente de la colina está dada por la ecuación $Y = 0,4 X$. Si Jimmy lanza una manzana a Billy con un ángulo de 50° respecto de la horizontal. Con que velocidad debe lanzar la manzana para que pueda llegar a Billy?

Datos del problema:

Distancia entre Jimmy y Billy = 30 met
 $\theta =$

Pendiente de la colina $Y = 0,4 X$.

Solución:

$$Y_b = 0,4 X_b$$

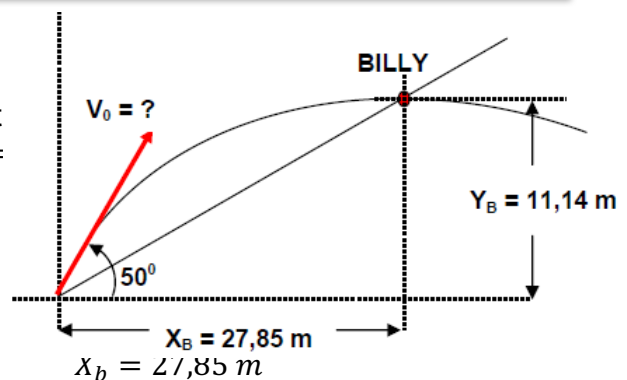
$$(Y_b)^2 = 0,16(X_b)^2$$

$$(30)^2 = (X_b)^2 + (Y_b)^2$$

$$900 = (X_b)^2 + (X_b)^2$$

$$900 = 1,16(X_b)^2$$

$$X_b = \sqrt{\left(\frac{900}{1,16}\right)}$$



Pero:

$$Y_b = 0,4 X_b$$

$$Y_b = 0,4 (27,85)$$

$$Y_b = 11,14 \text{ m}$$

Alcance Horizontal

$$x = V_x t$$

$$x = (V_o \cos \theta) t \quad (\text{Ecuación 1})$$

$$t = \frac{x}{V_o \cos \theta}$$

Pero:

$$Y = V_{oy} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$Y = V_o \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} \quad (\text{Ecuación 2})$$

Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2.

$$Y = V_o \sin \theta t - \frac{gt^2}{2}$$

$$Y = V_o \sin \theta$$

$$\left(\frac{x}{V_o \cos \theta} \right) - \frac{g \left(\frac{x}{V_o \cos \theta} \right)^2}{2}$$

$$Y = \frac{V_o \sin \theta}{V_o \cos \theta} (x) - \frac{g(x)^2}{2V_o^2 (\cos \theta)^2}$$

$$Y = \tan \theta (x) - \frac{g(x)^2}{2V_o^2 (\cos \theta)^2}$$

Reemplazando:

$$x = 27,85 \text{ m}$$

$$y = 11,14 \text{ m}$$

$$\theta = 50^\circ$$

$$11,14 = \tan 50 (27,85) - \frac{9,8(27,85)^2}{2V_o^2 (\cos 50)^2}$$

$$11,14 = 33,19 - \frac{7756,22}{V_o^2 (0,8263)}$$

$$11,14 = 33,19 - \frac{9386,68}{V_o^2}$$

$$\frac{9386,68}{V_o^2} = 33,19 - 11$$

$$V_o^2 = \frac{9386,68}{22,19}$$

$$V_o = \sqrt{\left(\frac{9386,68}{22,19} \right)}$$

$$V_o = 20,56 \text{ m/seg}$$

7. En un bar local, un cliente hace deslizar un tarro vacío de cerveza sobre la barra para que vuelvan a llenarlo. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, el cual cae de la barra y golpea el piso a 1,4 metros de la base de la misma.

Si la altura de la barra es 0,86 metros.

- Con que velocidad abandono el tarro la barra?
- Cual fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de chocar con el piso?

Se halla el t_{vuelo} :

Solución:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$2y = gt^2$$

$$\frac{2y}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$t_{vuelo} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$t_{vuelo} = \sqrt{\frac{2(0,86)}{9,8}}$$

$$t_{vuelo} = \sqrt{0,1755} = 0,42 \text{ seg}$$

1. Con que velocidad abandono el tarro la barra?

Datos:

$$X = 1,4 \text{ m}$$

$$t_{vuelo} = 0,4189 \text{ seg.}$$

$$x = V_o t_{vuelo}$$

$$V_o = \frac{x}{t_{vuelo}}$$

$$V_o = \frac{1,4}{0,42} = 3,34 \text{ m/s}$$

2. ¿Cual fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de chocar con el piso?

Datos:

$$V_o = V_x = 3,34 \text{ m/seg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$t_{vuelo} = 0,42 \text{ seg}$$

$$V_y = gt_{vuelo}$$

$$V_y = 9,8 \text{ m/seg}^2 (0,42) \text{ seg}$$

$$V_y = 4,105 \text{ m/seg}$$

$$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2$$

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

$$V = \sqrt{(3,34)^2 + (4,105)^2}$$

$$V = 5,29 \text{ m/seg}$$

$$tg\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$tg\theta = \frac{-4,105}{3,34} = -1,229$$

$$\theta = \arctan(-1,229)$$

$$\theta = -50,86^\circ$$

8. Un jugador de soccer patea una roca horizontalmente desde el borde de una plataforma de 40 metros de altura en dirección a una fosa de agua. Si el jugador escucha el sonido de contacto con el agua 3 seg. Después de patear la roca. Cual fue la velocidad inicial? . Suponga que la velocidad del sonido en el aire es 343 m/seg.

Se halla el t_{vuelo}

Solución:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

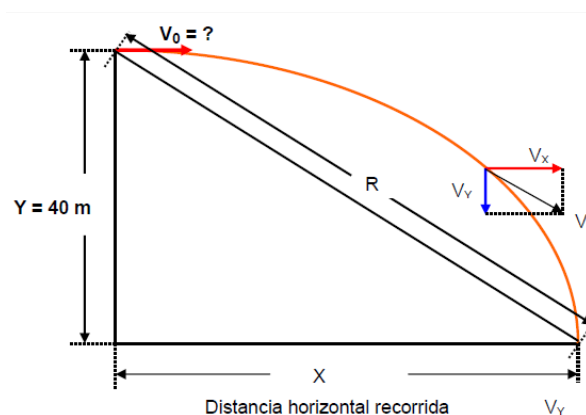
$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$t_{vuelo} = \sqrt{\frac{2(40)}{9,8}}$$

$$t_{vuelo} = \sqrt{8,16} \text{ seg}$$

$$t_{vuelo} = 2,86 \text{ seg}$$

$$3 \text{ seg} - t_{vuelo} = 3 - 2,86 = 0,14 \text{ seg}$$



Se halla la distancia recorrida por la pelota.

Datos:

$$t = 0,14 \text{ seg}$$

$$V_x = \text{veloc. del sonido en el agua} = 343 \text{ m/seg}$$

$$R = V_o t$$

$$R = (343)(0,14) = 48,02 \text{ m}$$

$$R^2 = (y)^2 + (x)^2$$

$$x^2 = (R)^2 - (y)^2$$

$$x = \sqrt{(R)^2 - (y)^2}$$

$$x = \sqrt{(48,02)^2 - (40)^2}$$

$$x = \sqrt{705,92}$$

$$x = 26,56 \text{ m/seg}$$

¿Su velocidad inicial?

$$V_o = V_x$$

Datos:

$$x = 26,56 \text{ m}$$

$$t_{vuelo} = 2,86 \text{ seg}$$

$$x = V_o t_{vuelo}$$

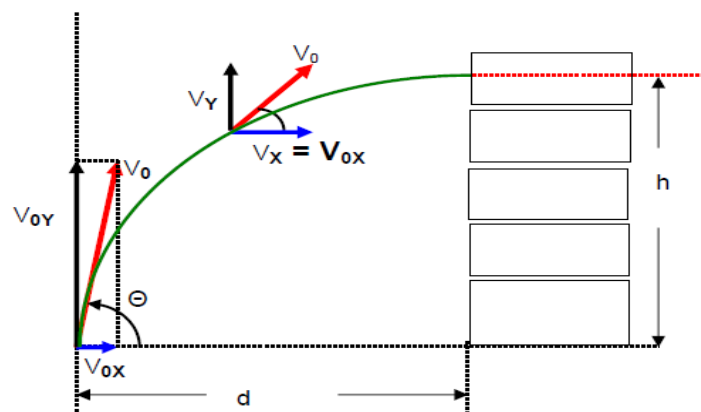
$$V_o = \frac{x}{t_{vuelo}}$$

$$V_o = \frac{26,56}{2,86}$$

$$V_o = 9,28 \text{ m/seg}$$

$$V_o = V_x = 9,28 \text{ m/seg}$$

9. Un bombero a una distancia d metros de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo de θ sobre la horizontal, como se muestra en la figura. Si la velocidad inicial de la corriente es V_o . A que altura el agua incide en el edificio?



PERO:

$$d = (V_o \cos\theta) t \quad \text{Despejamos } t$$

Solución:

$$t = \frac{d}{V_o \cos\theta}$$

$$h = V_{oy}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$h = V_o \sin\theta t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{reemplazamos } t \text{ en la ecuación}$$

$$h = (V_o \sin\theta) \left(\frac{d}{V_o \cos\theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{V_o \cos\theta} \right)^2$$

$$h = \sin\theta \left(\frac{d}{\cos\theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{V_o \cos\theta} \right)^2$$

$$h = \tan\theta d - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{V_o \cos\theta} \right)^2$$

$$h = \tan\theta d - \frac{gd^2}{2(V_o)^2 \cos^2\theta}$$

$$h = \frac{2(V_o)^2 \cos^2\theta \tan\theta d - gd^2}{2(V_o)^2 \cos^2\theta}$$

$$h = \frac{2(V_o)^2 \cos^2\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \theta d - gd^2}{2(V_o)^2 \cos^2\theta}$$

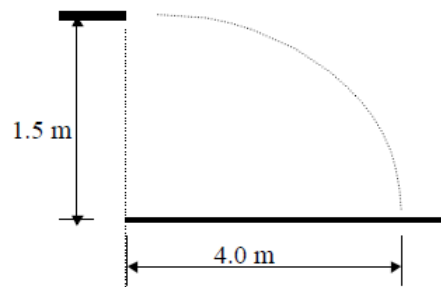
$$h = \frac{(V_o)^2 2 \cos\theta \sin\theta d - gd^2}{2(V_o)^2 \cos^2\theta}$$

Pero:

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$$

$$h = \frac{(V_o)^2 \sin 2\theta d - gd^2}{2(V_o)^2 \cos^2\theta}$$

10.-El chorro de agua de la manguera en posición horizontal como se indica en la figura, tiene un alcance de 4 m. Cuando el extremo de la manguera se inclina un ángulo de 30° el alcance horizontal del chorro de agua será:



Solución:

Determinemos primeramente con los datos del problema la velocidad del chorro de agua.

Si el chorro sale horizontalmente, el tiempo que le toma en llegar al suelo es:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(1,5)}{9,8}} = 0,55 \text{ Seg}$$

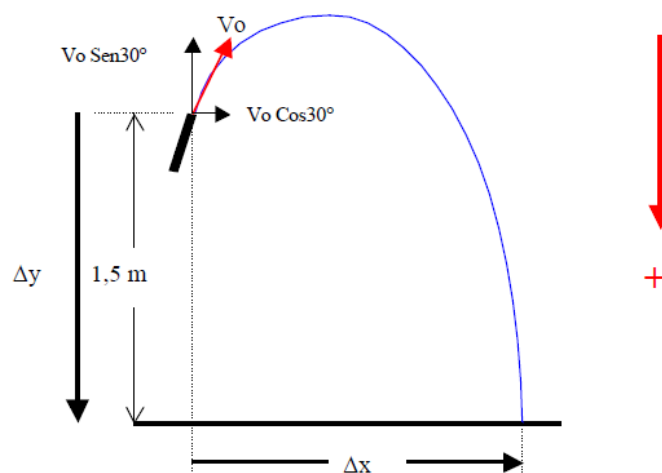
Con este tiempo y el desplazamiento horizontal determinemos la velocidad del chorro de agua:

$$V_o = \Delta x / t$$

$$V_o = 4 / 0,55$$

$$V_o = 7,27 \text{ m/s}$$

Determinemos ahora el alcance horizontal con el chorro a 30° de elevación.



Tomemos el suelo como nuestro sistema de referencia y determinemos el tiempo que tarda el chorro en alcanzar un desplazamiento vertical de 1,5 m, cuando es lanzado con una velocidad inicial vertical de $-V_o \text{ Sen } 30^\circ$.

$$\Delta y = V_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$1,5 = -3,64t + 4,9t^2$$

$$4,9t^2 - 3,64t - 1,5 = 0$$

$$t = \frac{-(-3,64) \pm \sqrt{(3,64)^2 - 4(4,9)(-1,5)}}{2(4,9)}$$

$$t = \frac{3,64 \pm 6,53}{9,8}$$

$$t = 1,04 \text{ seg}$$

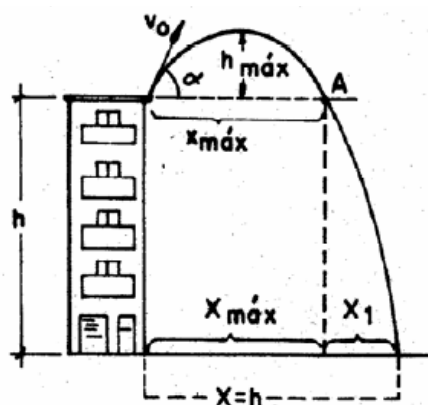
Con este tiempo podemos determinar el desplazamiento horizontal del chorro de agua:

$$\Delta x = V_{ox} t$$

$$\Delta x = 7,27 \text{ Cos } 30^\circ (1,04)$$

$$\Delta x = 6,5 \text{ m}$$

11.-De lo alto de un edificio se lanza un proyectil con una inclinación de 40° por encima de la horizontal. Al cabo de 5sg el proyectil encuentra el plano horizontal que pasa por el pie del edificio, a una distancia de este pie igual a la altura del edificio. Calcular la velocidad inicial del proyectil y la altura del edificio. Se sabe que la máxima altura de trayectoria del proyectil respecto a la parte superior del edificio es de 10 metros.



Datos:

$$\theta = 40^\circ$$

$t = 5 \text{ seg.}$ (Para $X = H$) (Es decir el proyectil demora en el aire 5 seg.)

$$h_{\text{max}} = 10 \text{ metros.}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

Como tenemos el valor de h_{max} se puede hallar la V_{oy} (Velocidad inicial en el eje vertical).

$$y_{max} = \frac{(V_{oy})^2}{2g}$$

$$(V_{oy})^2 = 2g y_{max}$$

$$V_{oy} = \sqrt{2g y_{max}} = 14,14 \text{ m/seg}$$

$$V_{oy} = V_o \text{Sen}\theta$$

$$V_o = \frac{V_{oy}}{\text{Sen } 40} = \frac{14,14}{0,6427} = 22 \text{ m/seg}$$

Datos:

$$V_o = 22 \text{ m/seg}$$

$$\theta = 40^\circ$$

$$V_{ox} = \text{Cos}\theta$$

$$V_{ox} = 22(\text{Cos}40)$$

$$V_x = V_{ox} = 16,85 \text{ m/seg}$$

Como $V_x = V_{ox} = 1685 \text{ m/seg}$ es constante en todo el recorrido del proyectil, y el tiempo de vuelo del proyectil es de 5 seg. se halla el recorrido horizontal ($X = h$).

$$x = h = V_x t$$

$$x = h = 16,85(5)$$

$$x = h = 84,25 \text{ metros}$$

La altura del edificio (h) es de 84,25 metros.

12.-Un astronauta sobre la luna dispara una pistola de manera que la bala abandona el cañon moviéndose inicialmente en una posición horizontal.

a) Cual debe ser la velocidad de orificio si la bala va a recorrer por completo el derredor de la luna y alcanzara al astronauta en un punto 10 cm debajo de su altura inicial.

b) Cuanto permanece la bala en vuelo? Suponga que la aceleración en caída libre sobre la luna es un sexto de la de la tierra. Gravedad de la luna $a = 1/6 * 9,8 = 1,6333 \text{ m/s}^2$ (Aceleración de la luna) La realidad es que la bala describe un movimiento circular alrededor de la luna, para esto necesitamos el *radio de la luna* = $1,74 * 10^6 \text{ metros}$, los 10 cm no inciden sobre el calculo del radio de la luna. hallamos la velocidad.

$$a_l = v^2 / r_l$$

$$v^2 = a_l * r_l$$

$$v = \sqrt{(a_l)(r_l)}$$

$$v = \sqrt{(1,63) * (1,74) * (10^6)}$$

$$v = \sqrt{2841999,99}$$

$$v = 1685,82 \text{ m/seg}$$

b) ¿Cuánto permanece la bala en vuelo?

$$v = 2\pi r_l$$

$$f = 2\pi r_l \frac{1}{T}$$

Se despeja el periodo T

$$T = \frac{2\pi r_l}{v}$$

$$T = \frac{2 * \pi * 1,74 * 10^6 \text{ m}}{1685,82 \text{ m/s}}$$

$$T = 6485,11 \text{ seg}$$

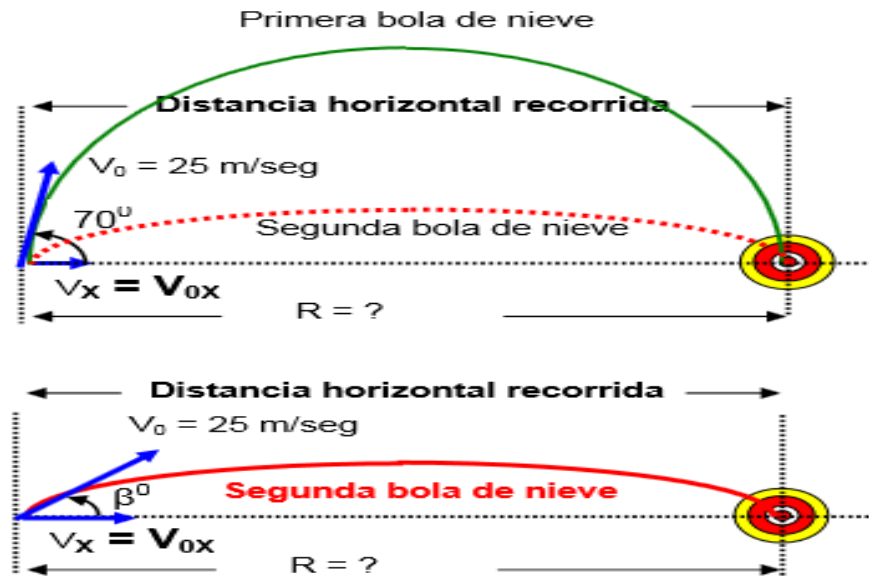
$$T = 6485,11 \text{ seg} * \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ seg}}$$

$$T = 1,8 \text{ horas}$$

13.-Una estrategia en las guerras con bolas de nieve es lanzarlas a un gran ángulo sobre el nivel del suelo. Mientras su oponente esta viendo esta primera bola de nieve, usted lanza una segunda bola a un ángulo menor lanzada en el momento necesario para que llegue a su oponente ya sea antes o al mismo tiempo que la primera. Suponga que ambas bolas de nieve se lanzan con una velocidad de 25 m/sg. La primera se lanza a un ángulo de 70° respecto de la horizontal.

a) A que ángulo debe lanzarse la segunda bola de nieve para llegar al mismo punto que la primera?

b) ¿Cuántos segundos después debe lanzarse la segunda bola después de la primera para que llegue al blanco al mismo tiempo?



PRIMERA BOLA DE NIEVE

Se halla el tiempo de vuelo.

Datos:

$$\theta = 70^\circ$$

$$V_0 = 25 \text{ m/seg}$$

$$y = V_{0y} * t * \frac{g * t^2}{2} \quad \text{pero: } V_{0y} = V_0 \sin \theta$$

$$y = V_0 \sin \theta * t * \frac{g * t^2}{2} \quad \text{pero: } y = 0$$

$$0 = V_0 \sin \theta * t * \frac{g * t^2}{2}$$

$$V_0 \sin \theta * t = \frac{g * t^2}{2} \quad \text{cancelando } t \text{ a ambos lados de la igualdad}$$

$$V_0 \sin \theta = \frac{g * t}{2}$$

$$2V_0 \sin \theta = gt$$

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2V_0 \sin \theta}{g}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 * 25 \sin 70^\circ}{9,8}$$

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{46,98}{9,8}$$

$$t_{vuelo} = 4,79 \text{ seg} \quad (\text{de la primera bola de nieve})$$

Con el tiempo de vuelo de la primera bola de nieve, se halla el alcance horizontal.

$$R = V_{ox} * t_{vuelo} \quad \text{pero: } V_{ox} = V_o \cos \theta$$

$$R = V_o \cos \theta * t_{vuelo}$$

$$R = 25 * \cos 70^\circ * 4,79$$

$$R = 41 \text{ m}$$

Con el tiempo de vuelo de la primera bola de nieve, se halla el alcance horizontal.

$$R = V_{ox} * t_{vuelo} \quad \text{pero: } V_{ox} = V_o \cos \theta$$

$$R = V_o \cos \theta * t_{vuelo}$$

$$R = 25 * \cos 70^\circ * 4,79$$

$$R = 41 \text{ m}$$

Ahora hallamos el tiempo de vuelo de la segunda bola de nieve en función del ángulo de disparo.

Datos:

$$\beta = \text{ángulo de disparo de la segunda bola}$$

$$V_o = 25 \text{ m/seg}$$

$$R = 41 \text{ m}$$

$$t_{vuelo 2} = \frac{2 V_o \sin \beta}{g}$$

$$t_{vuelo 2} = \frac{2 * 25 * \sin \beta}{9,8}$$

$$t_{vuelo 2} = \frac{50 \sin \beta}{9,8}$$

$$t_{vuelo 2} = 5,1 \sin \beta \quad (\text{de la segunda bola de nieve})$$

Con este dato procedemos a hallar el ángulo β de disparo de la segunda bola de nieve.

$$R = V_{ox} * t_{vuelo 2} \quad \text{pero: } V_{ox} = V_o \cos \beta$$

$$R = V_o \cos \beta * t_{vuelo 2} \quad \text{pero: } t_{vuelo 2} = 5,1 \sin \beta$$

$$R = V_o \cos \beta * 5,1 \sin \beta$$

$$R = 25 * \cos\beta * 5,1 \operatorname{sen}\beta$$

$$R = 127,5 * \cos\beta * \operatorname{sen}\beta \quad \text{pero: } R = 41$$

$$41 = 63,72 * (2 \cos\beta * \operatorname{sen}\beta) \quad \text{pero: } 2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta = \operatorname{sen} 2\beta$$

$$41 = 63,72 * (\operatorname{sen} 2\beta)$$

$$\operatorname{sen} 2\beta = \frac{41}{63,75}$$

$$\operatorname{sen} 2\beta = 0,64$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} 2\beta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,64$$

$$2\beta = 40^\circ$$

$$\beta = \frac{40}{2}$$

$$\beta = 20^\circ$$

Con el valor del ángulo de disparo de la segunda bola de nieve, se halla el tiempo de vuelo.

$$t_{\text{vuelo } 2} = 5,1 \operatorname{sen}\beta \quad (\text{de la segunda bola de nieve})$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 5,1 \operatorname{sen} 20^\circ$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 5,1 * 0,34$$

$$t_{\text{vuelo } 2} = 1,74 \operatorname{seg} \quad (\text{de la segunda bola de nieve})$$

b) ¿Cuántos segundos después debe lanzarse la segunda bola después de la primera para que llegue al blanco al mismo tiempo?

$$t_{\text{vuelo}} = 4,79 \operatorname{seg} \quad (\text{de la primera bola de nieve})$$

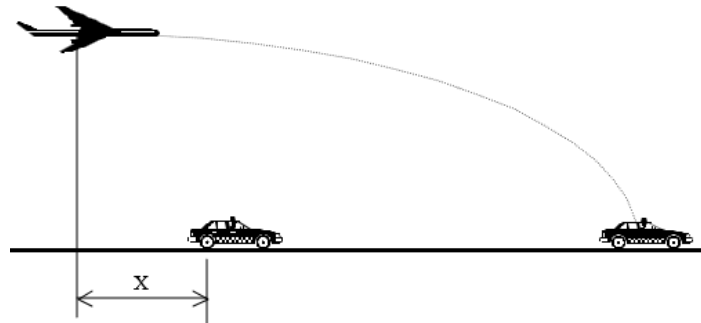
$$t_{\text{vuelo } 2} = 1,74 \operatorname{seg} \quad (\text{de la segunda bola de nieve})$$

$$\Delta t = t_{\text{vuelo}} - t_{\text{vuelo } 2}$$

$$\Delta t = 4,79 \operatorname{seg} - 1,74 \operatorname{seg}$$

$$\Delta t = 3,05 \operatorname{seg}$$

14.-Desde un avión que vuela a 70 m de altura y que se mueve a una velocidad de 200 km/h se suelta una bomba. Si el proyectil hace impacto sobre un automóvil que se desplaza a una velocidad constante de 80 km/h, como se muestra en la figura. La distancia x inicial entre el avión y el automóvil es:



Solución:

Determinemos el desplazamiento horizontal del auto y del proyectil para poder calcular la distancia X.

Si el avión vuela horizontalmente, el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo es:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(70)}{9,8}}$$

$$t = 3,78 \text{ seg}$$

Con este tiempo determinemos el desplazamiento del proyectil.

$$D_{xp} = V_{\text{avión}}(t)$$

$$V_{\text{avión}} = 200 \text{ Km/h}$$

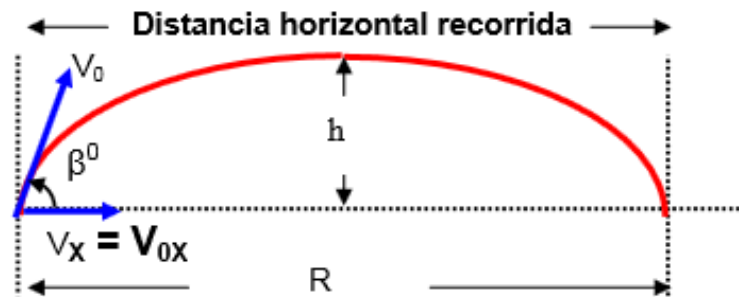
$$V_{\text{avión}} = 55,55 \text{ m/seg}$$

$$D_{xp} = 84 \text{ m}$$

Por lo tanto la distancia X es de: $210 - 84 = 126 \text{ m}$

15.-Una pulga puede brincar una altura vertical h .

- a) Cual es la máxima distancia horizontal que puede saltar.
b) Cual es el tiempo en el aire en ambos casos?



- a) Cuál es la máxima distancia horizontal que puede saltar. El máxima alcance horizontal se logra cuando el ángulo es de $\beta = 45^\circ$

$$R = \frac{\text{sen } 2\beta (V_o)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2 * 45 (V_o)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 90 (V_o)^2}{g}$$

$$R = \frac{(V_o)^2}{g} \quad \text{Ecuación 1}$$

$$h = \frac{(v_{oy})^2}{2g}$$

$$2gh = (V_{oy})^2$$

$$2gh = (V_o \text{ Sen}\beta)^2$$

$$2gh = (V_o)^2 \text{sen}^2 \beta$$

$$2gh = 0,5 * (V_o)^2$$

$$4gh = (V_o)^2 \quad \text{Ecuación 2}$$

Reemplazando en la ecuación 1

$$R = \frac{(V_o)^2}{g}$$

$$R = \frac{4 gh}{g}$$

$$R = 4h$$

16.-Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de 8 m/sg . a un ángulo de 20° debajo de la horizontal. La pelota golpea el suelo 3 sg después.

- a) ¿A qué distancia horizontal a partir de la base del edificio la pelota golpea el suelo?**
- b) ¿Encuentre la altura desde la cual se lanzó la pelota?**
- c) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota para alcanzar un punto 10 metros abajo del nivel de lanzamiento?**

Datos:

$$V_o = 8 \text{ m/seg}$$

$$\theta = 20^\circ$$

$$t_{\text{vuelo}} = 3 \text{ seg}$$

a) ¿A qué distancia horizontal a partir de la base del edificio la pelota golpea el suelo?

$$x = v_x * t_{\text{vuelo}}$$

$$x = (v_o \cos \theta) * t_{\text{vuelo}}$$

$$x = (8 \cos 20^\circ) * 3$$

$$x = 22,55 \text{ m}$$

b) Mientras el cuerpo vaya bajando, ($+\uparrow$) la ecuación es positiva.

$$y = v_o \sin \theta * t + \frac{g * t^2}{2}$$

$$y = 8 \sin 20^\circ * 3 + \frac{9,8 * 3^2}{2}$$

$$y = 24 \sin 20^\circ + \frac{9,8 * 9}{2}$$

$$y = 8,21 + 44,1$$

$$y = 52,31 \text{ m}$$

- a) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota para alcanzar un punto 10 metros abajo del nivel de lanzamiento? Mientras el cuerpo vaya bajando, (+↑) la ecuación es positiva.

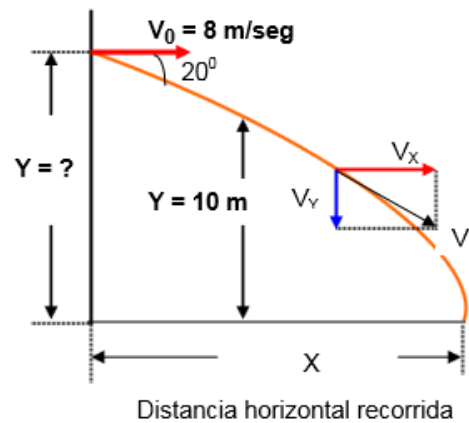
$$y = v_0 \sin \theta * t + \frac{g * t^2}{2}$$

$$10 = 8 \sin 20^\circ * t + \frac{9,8 * t^2}{2}$$

$$10 = 2,74t + 4,9t^2$$

$$4,9t^2 + 2,74t - 10 = 0$$

$$a = 4,9 \quad b = 2,74 \quad c = -10$$



$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2,74) \pm \sqrt{(2,74)^2 - 4(4,9)(-10)}}{2(4,9)}$$

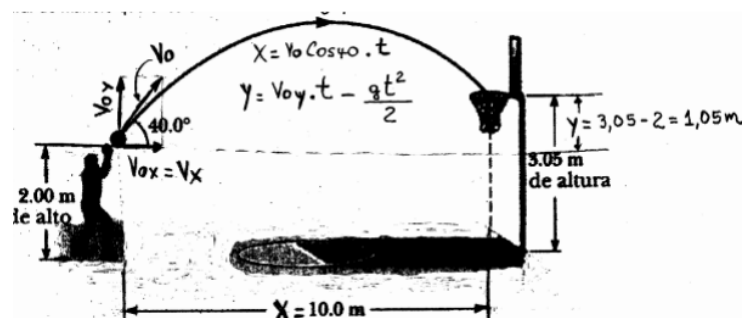
$$t = \frac{-2,74 \pm \sqrt{7,45 + 196}}{9,8}$$

$$t = \frac{-2,74 \pm \sqrt{203,45}}{9,8} = \frac{-2,74 \pm 14,26}{9,8}$$

$$t_1 = \frac{-2,74 + 14,26}{9,8} = \frac{11,53}{9,8}$$

$$t = 1,17$$

17.-Un jugador de básquetbol de 2 metros de altura lanza un tiro a la canasta desde una distancia horizontal de 10 metros. Si tira a un ángulo de 40° con la horizontal, ¿Con que velocidad inicial debe tirar de manera que el balón entre al aro sin golpear el tablero?



Datos del problema:

Altura del lanzador: 2 m

Altura de la canasta: 3,05 m

$$x = 10 \text{ m}$$

$$y = 3,05 - 2,0 = 1,05 \text{ m}$$

$$\theta = 40^\circ$$

Alcance horizontal

$$x = v_x * t$$

$$x = (v_o \cos \theta) t \quad (\text{Ecuación 1})$$

$$t = \frac{x}{v_o \cos \theta}$$

Pero:

$$y = v_{oy} * t - \frac{g * t^2}{2}$$

$$y = v_o \sin \theta * t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{Ecuación 2}$$

Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2

$$y = v_o \sin \theta * t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y = v_o \sin \theta * \left(\frac{x}{v_o \cos \theta} \right) - \frac{g * \left(\frac{x}{v_o \cos \theta} \right)^2}{2}$$

$$y = \frac{v_o \sin \theta}{v_o \cos \theta} * (x) - \frac{g * (x)^2}{2(v_o)^2 (\cos \theta)^2}$$

$$y = \tan \theta * (x) - \frac{g * (x)^2}{2(v_o)^2 (\cos \theta)^2}$$

Reemplazando

$$x = 10 \text{ m}$$

$$y = 3,05 - 2 = 1,05 \text{ m}$$

$$\theta = 40^\circ$$

$$1,05 = \tan 40^\circ * (10) - \frac{10 * (10)^2}{2(v_o)^2 (\cos 40^\circ)^2}$$

$$1,05 = 8,39 - \frac{100}{(v_o)^2 (1,17)}$$

$$1,05 = 8,39 - \frac{852,07}{v_o^2}$$

$$\frac{852,07}{v_o^2} = 8,39 - 1,05$$

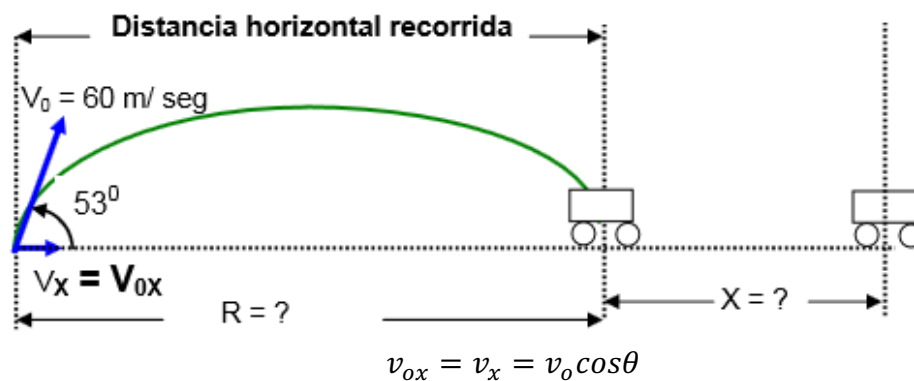
$$\frac{852,07}{v_o^2} = 7,34$$

$$v_o^2 = \frac{852,07}{7,34}$$

$$v_o = \sqrt{\left(\frac{852,07}{7,34}\right)}$$

$$V_o = 10,77 \text{ m/seg}$$

18.-Un mortero de trinchera dispara un proyectil con un ángulo de 53° por encima de la horizontal y una velocidad inicial $v_o = 60 \text{ m/seg}$. Un tanque avanza directamente hacia el mortero, sobre un terreno horizontal, a la velocidad de 3 m/seg . ¿Cual deberá ser la distancia desde el mortero al tanque en el instante en que el mortero es disparado para lograr hacer blanco?



$$v_{0x} = v_x = 60 \cos 53^\circ$$

$$v_{0x} = v_x = 36,1 \text{ m/seg}$$

Se halla el alcance horizontal del mortero.

$$R = \frac{\text{sen } 2\theta (v_o)^2}{g}$$

$$R = \frac{\text{sen } 2(53)(60)^2}{9,8}$$

$$R = \frac{\text{sen } (106) * (3600)}{9,8} = \frac{3460,54}{9,8}$$

$$R = 353,11m$$

Se halla el tiempo de vuelo del mortero.

$$R = v_x * t_v$$

$$t_v = \frac{R}{v_x}$$

$$t_v = \frac{353,11}{36,1}$$

$$t_v = 9,78 \text{ seg}$$

El tiempo de vuelo del mortero es el mismo tiempo que necesita el tanque para llegar al objetivo.

Se halla el desplazamiento del tanque.

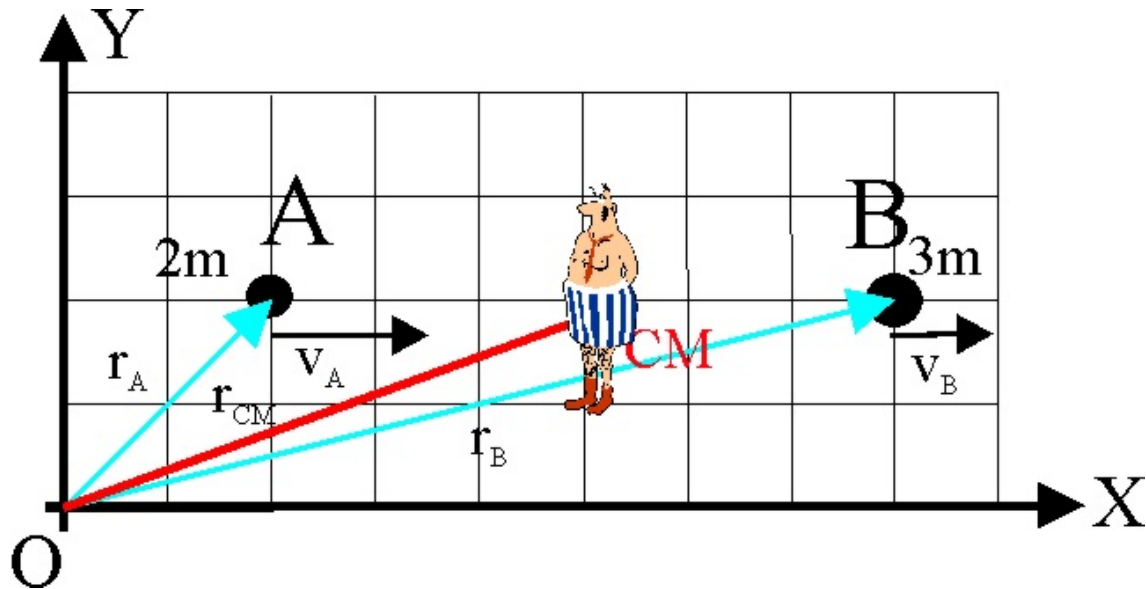
$$x = v * t$$

$$x = 3 * 9,78$$

$$x = 29,34 m$$

3.4 Velocidad Relativa

El concepto de movimiento siempre es un concepto relativo, pues debe referirse a un sistema de referencia particular, escogido por el observador. Como diferentes observadores pueden elegir distintos sistemas de referencia, es importante estudiar que relación hay entre las observaciones de uno y otro. Por



ejemplo, la mayor parte de las observaciones de nuestra vida cotidiana están referidas a la Tierra, es decir, a un sistema de referencia que se mueve con ella (de forma muy compleja).

Sin embargo, los astrofísicos prefieren considerar como sistema de referencia, las denominadas estrellas fijas (estrellas tan lejanas que su movimiento es inapreciable desde la Tierra) y en física atómica el movimiento de los electrones se refiere al núcleo atómico. La posibilidad de elegir un sistema de referencia absoluto preocupó durante mucho tiempo a físicos y filósofos. Y de hecho durante algunos siglos se supuso la existencia de un extraño sistema, llamado 'éter' que era una sustancia que llenaba el espacio vacío y se podía considerar como un sistema de referencia absoluto. Hoy en día la búsqueda de un sistema absoluto es innecesaria e irrelevante

EJEMPLOS:

1. Dos automovilistas A y B se desplazan por una carretera con las siguientes velocidades $v_a = 120 \text{ Km/h}$ y $v_b = 100 \text{ Km/h}$.
Determinese la velocidad relativa:
 - a) Cuando viajan en el mismo sentido y
 - b) Cuando lo hacen en sentidos contrarios.

Solución:**a) Cuando viajan en el mismo sentido**

Las velocidades $\vec{v}_a$ y $\vec{v}_b$ son respecto de los ejes en $O = (x, y, z)$ fijos en tierra, sin embargo lo que se pide es una velocidad relativa.

Para calcular la velocidad de B respecto de A, debemos considerar en A los ejes móviles $O' = (x', y', z')$ y considerar a la velocidad de éste $\vec{v}_a$ como si fuera la velocidad de arrastre. Si llamamos con $\vec{v}_{b,a}$ a la velocidad relativa de B respecto de A, resulta de aplicar la ecuación (2).

$$\vec{v}_{relativa} = \vec{v}_{absoluta} - \vec{v}_{arrastra}$$

$$\vec{v}_{b,a} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$$

$$\vec{v}_{b,a} = 100\vec{i} - 120\vec{i}$$

$$\vec{v}_{b,a} = -20\vec{i} \text{ Km/h}$$

Para el conductor B, la velocidad relativa es $\vec{v}_{a,b}$ y por las mismas razones.

$$\vec{v}_{a,b} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$$

$$\vec{v}_{a,b} = 120\vec{i} - 100\vec{i}$$

$$\vec{v}_{a,b} = 20\vec{i} \text{ Km/h}$$

a) Cuando viajan en sentidos contrarios, es ahora $\vec{v}_b = -100\vec{i} \text{ Km/h}$



La velocidad de B respecto de A, vale.

$$\vec{v}_{relativa} = \vec{v}_{absoluta} - \vec{v}_{arrastra}$$

$$\vec{v}_{b,a} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$$

$$\vec{v}_{b,a} = -100\vec{i} - 120\vec{i}$$

$$\vec{v}_{a,b} = -220\vec{i} \text{ Km/h}$$

La velocidad de A con respecto de B, vale:

$$\vec{V}_{a,b} = \vec{V}_a - \vec{V}_b$$

$$\vec{V}_{a,b} = 120\vec{i} - (-100)\vec{i}$$

$$\vec{V}_{a,b} = 220\vec{i} \text{ Km/h}$$

2. Un pasillo mecánico de un aeropuerto, se mueve respecto de unos ejes situados en el suelo a una velocidad de $1,5\text{m/s}$. Si un joven corre por el mismo a una velocidad de 3m/s y en el mismo sentido, ¿cuánto valen la velocidad de arrastre, la relativa y la absoluta?

Solución:

La velocidad de arrastre es la del pasillo mecánico, es decir la de los ejes en O' , como se muestra en la figura.

$$\vec{V}_{O'} = 1,5\vec{i} \text{ m/s}$$

La velocidad relativa es la que lleva el joven respecto de los ejes móviles en O' .

$$\vec{V}' = 3\vec{i} \text{ m/seg}$$

La velocidad absoluta.

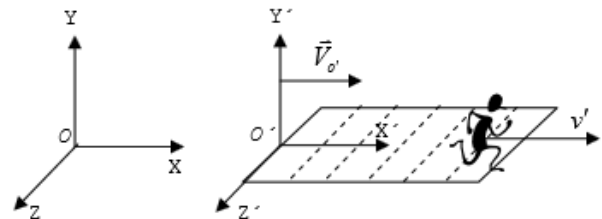
$$\vec{V}_{absoluta} = \vec{V}_{arrastre} + \vec{V}_{relativa}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}'$$

$$\vec{V} = 1,5\vec{i} + 3\vec{i}$$

$$\vec{V} = 4,5\vec{i} \text{ m/seg}$$

Compruébese que cuando el joven corra por el pasillo en sentido contrario, la velocidad absoluta es de $-1,5\vec{i} \text{ m/seg}$

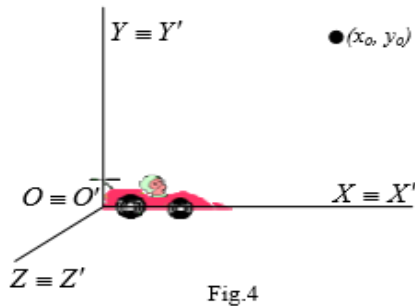


3. Cuando no sopla viento, las gotas de lluvia caen verticalmente sobre el suelo alcanzando una velocidad constante V_0 . Un automovilista circula horizontalmente con velocidad constante V_0 . Determinése:

- La ecuación de la trayectoria de las gotas de lluvia para el observador en el automóvil.
- La velocidad de una gota de lluvia para el conductor, sabiendo que se ha formado en un punto de coordenadas (X_0, Y_0) respecto de unos ejes fijos en tierra.

Solución:

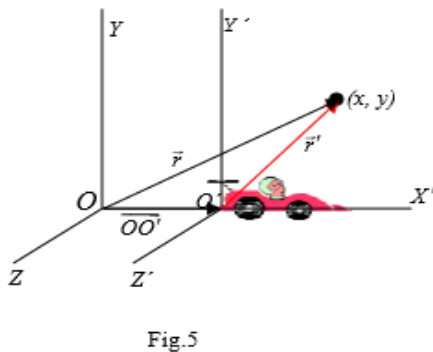
a) Consideramos que el tiempo que van a medir ambos observadores es el mismo $t = t'$ y que en el instante inicial es $t_0 = t_0' = 0$ y que los ejes O' ligados al automóvil y los ejes fijos en el suelo O , coinciden en el mismo punto, como se muestra en la fig. 4.



En un instante posterior t , la situación viene indicada en la fig. 5. en la que el automóvil se ha desplazado respecto de los ejes fijos el vector $OO' = \vec{V}_{O'} * t$

Entre los vectores de posición de la gota de lluvia respecto de los sistemas de ejes en O y en O' , se cumple la relación vectorial.

$$\vec{r} = \vec{r}' - OO' = \vec{r}' - \vec{V}_{O'} * t \vec{i}$$



El vector de posición de la gota respecto de los ejes fijos en O .

$$\vec{r} = x_o \vec{i} + (y_o - V_o * t) \vec{j}$$

El vector de posición de la gota respecto de los ejes móviles en O' .

$$\vec{r} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}'; \text{ pero } \vec{i}' = \vec{i} \quad \vec{j}' = \vec{j}$$

Sustituyendo en la primera:

$$x' \vec{i} + y' \vec{j} = (x_o - V_o * t) \vec{i} + (y_o - V_o * t) \vec{j}$$

Igualando las componentes resulta:

$$x' = x_o - V_o * t; \quad y' = y_o - V_o * t$$

Y la ecuación de la trayectoria de las gotas de lluvia para el observador en el automóvil, se obtiene eliminando el tiempo entre las dos ecuaciones anteriores.

$$y' = y_o - \frac{V_o X_o}{V_{O'}} + \frac{V_o}{V_{O'}} * x' = c + \frac{V_o}{V_{O'}} * x'$$

Que es la ecuación de una línea recta de pendiente $\frac{V_o}{V_{O'}}$. El ángulo que forma la trayectoria de las gotas de lluvia con la horizontal es $\alpha = \arctan\left(\frac{V_o}{V_{O'}}\right)$ y para el conductor llueve sesgado.

b) La velocidad respecto del automovilista que está en movimiento es una velocidad relativa $\vec{V}'$

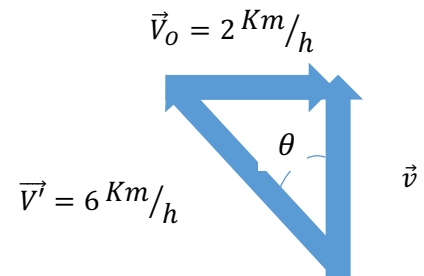
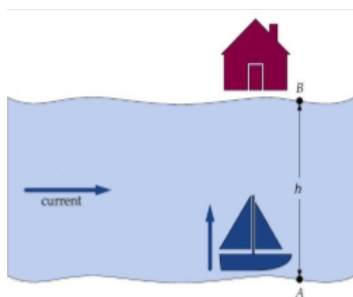
$$\vec{v}' = -\vec{V}_{O'} + \vec{V}_O = -V_o \vec{i} - V_o \vec{j}$$

Considerando que las gotas de lluvia caen a una velocidad de 23 Km/h y que el automóvil lleva una velocidad de 90 Km/h . El ángulo con el que cae la lluvia para el conductor es de $14,3^\circ$ y la velocidad de la lluvia $\vec{V}' = -25\vec{i} - 6,4\vec{j} \text{ m/seg}$. El módulo de esta velocidad es $25,8 \text{ m/s} = 93 \text{ Km/h}$.

4. Queremos atravesar perpendicularmente un río de anchura $h = 76 \text{ m}$ entre A y B con una barca que desarrolla una velocidad relativa de $v = 6 \text{ km/h}$. Si la corriente del río es de 2 km/h , Determinar:

- a) El ángulo con el que se debe dirigir la barca.
b) El tiempo que empleará en atravesar el río.

a) El ángulo.



$$\vec{V}_{absoluta} = \vec{V}_{arrastre} + \vec{V}_{relativa} \quad \vec{V} = \vec{V}_O + \vec{V}'$$

$$\text{sen} \theta = \frac{V_o}{V'} = \frac{2}{6}$$

$$\theta = \arcsen \frac{2}{6}$$

$$\theta = 19,5^\circ$$

$$v = v' \cos(\theta)$$

$$v = 6 \text{ Km/h} \cos(19,5^\circ)$$

$$v = 5,66 \text{ Km/h} = 1,56 \text{ m/s}$$

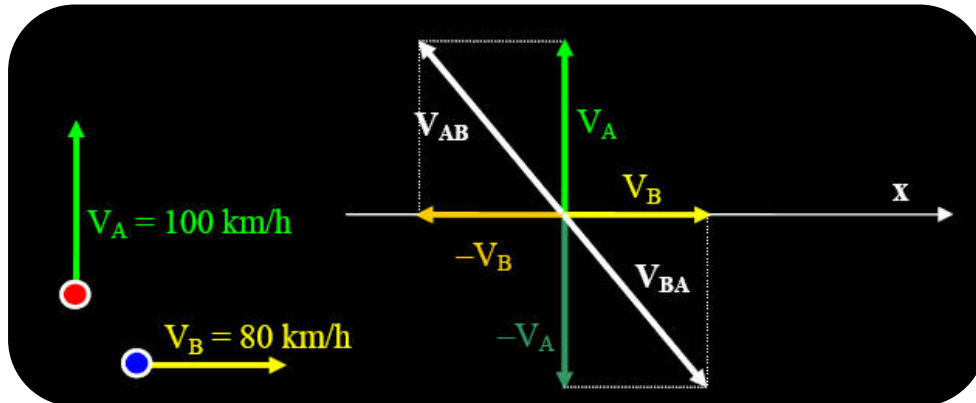
b) El tiempo empleado en atravesar el río.

$$t = \frac{h}{v}$$

$$t = \frac{76}{1,56}$$

$$t = 48,4 \text{ se}$$

Hallar la velocidad relativa $V_{a,b}$ y $V_{b,a}$ de dos móviles que llevan distintas direcciones cuyas velocidades son: $V_a = 100 \text{ Km/h}$ y $V_b = 80 \text{ Km/h}$



$$V_{ab} = V_a - V_b$$

$$V_{ab} = V_a + (-V_b)$$

$$V_{ba} = V_b - V_a$$

$$V_{ba} = V_b + (-V_a)$$

$$\|V_{ab}\| \|V_{ba}\| = \sqrt{(V_b)^2 + (V_a)^2}$$

$$\|V_{ab}\| \|V_{ba}\| = \sqrt{(80)^2 + (100)^2}$$

$$\|V_{ab}\| \|V_{ba}\| = \sqrt{16400}$$

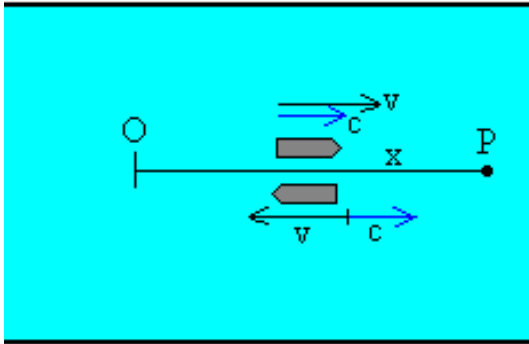
$$\|V_{ab}\| \|V_{ba}\| = 128 \text{ Km/h}$$

- En este caso el móvil "B" observa al móvil "A" alejarse a 128 Km/h en una dirección oblicua que forma un ángulo obtuso con la dirección $+x$ (medido en forma anti horaria).
- En cambio, para el móvil "A", el objeto "B" se aleja a 128 Km/h formando un ángulo agudo con la dirección $+x$ (medido en forma horaria).

5. Un río fluye hacia el este con velocidad de $c = 3 \text{ m/seg}$. Un bote se dirige hacia el este (aguas abajo) con velocidad relativa al agua de $v = 4 \text{ m/seg}$. Calcular:

- La velocidad del bote respecto de tierra cuando el bote se dirige hacia el este (río abajo) y cuando se dirige hacia el oeste (río arriba).
- El tiempo que tarda el bote en desplazarse $d = 100 \text{ m}$ hasta el punto P y regresar de nuevo al punto de partida O.

- a) La velocidad del bote respecto de tierra cuando el bote se dirige hacia el este (río abajo) y cuando se dirige hacia el oeste (río arriba).



Cuando el bote navega aguas abajo la velocidad del bote respecto de tierra es:

$$V_{bote} = c + v$$

$$V_{bote} = 3 \text{ m/seg} + 4 \text{ m/seg}$$

$$V_{bote} = 7 \text{ m/seg}$$

Cuando el bote navega en sentido contrario a la corriente la velocidad del bote respecto de tierra es:

$$V_{bote} = c - v$$

$$V_{bote} = 3 \text{ m/seg} - 4 \text{ m/seg}$$

$$V_{bote} = -1 \text{ m/seg}$$

- b) El tiempo que tarda el bote en desplazarse $d = 100 \text{ m}$ hasta el punto P y regresar de nuevo al punto de partida O.

El tiempo que tarda el barquero en hacer el viaje de ida es:

$$t_1 = \frac{d}{(v+c)}$$

$$t_1 = \frac{100 \text{ m}}{7 \text{ m/seg}}$$

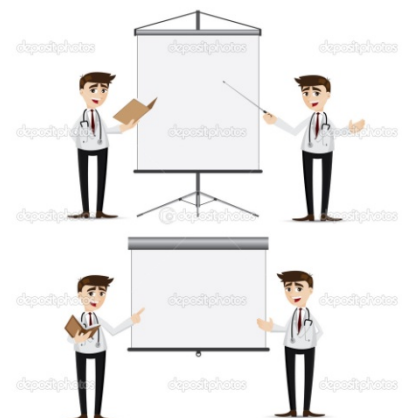
$$t_1 = 14,29 \text{ seg}$$

El tiempo que tarda en hacer el viaje de vuelta es:

$$t_2 = \frac{d}{(v - c)}$$

$$t_2 = \frac{100 \text{ m}}{-1 \text{ m/seg}}$$

$$t_2 = -100 \text{ seg}$$



El tiempo total es:

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = \frac{2vd}{v^2 - c^2}$$

$$t = \frac{2(4)(100)}{(4)^2 - (3)^2}$$

$$t = \frac{800}{7}$$

$$t = 114,29 \text{ seg}$$

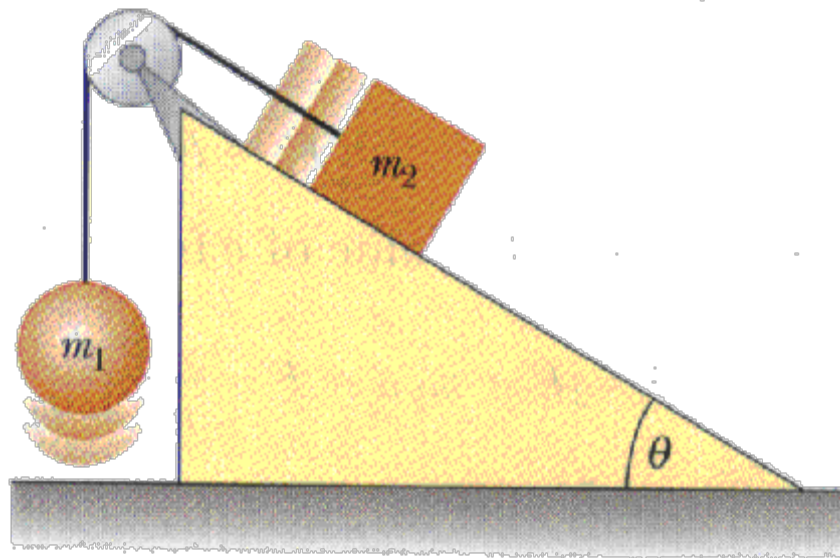
CAPITULO IV

OBJETIVOS

- Conocer las Leyes de Newton
- Comprender la relevancia de las leyes.
- Entender la dinámica de los cuerpos.
- Analizar críticamente y describir los efectos que produce la fuerza en un cuerpo.

CAPITULO IV

LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON



Durante muchos siglos se intentó encontrar leyes fundamentales que se apliquen a todas o por lo menos a muchas experiencias cotidianas relativas al movimiento. Fue un tema central de la filosofía natural.

No fue sino hasta la época de Galileo y Newton cuando se efectuaron dramáticos progresos en la resolución de esta búsqueda.

Las tres leyes de Newton del movimiento son las llamadas leyes clásicas del movimiento.

Ellas iluminaron por 200 años el conocimiento científico y no fueron objetadas hasta que Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad en 1905.

INTRODUCCIÓN

Las Leyes de Newton , también conocidas como Leyes del movimiento de Newton , son tres principios a partir de los cuales se explican la mayor parte de los problemas planteados por la dinámica , en particular aquellos relativos al movimiento de los cuerpos.

Las Leyes de Newton permiten explicar tanto el movimiento de los astros como los movimientos de los proyectiles artificiales creados por el ser humano, así como toda la mecánica de funcionamiento de las máquinas.

4.1 Fundamentos teóricos de las leyes

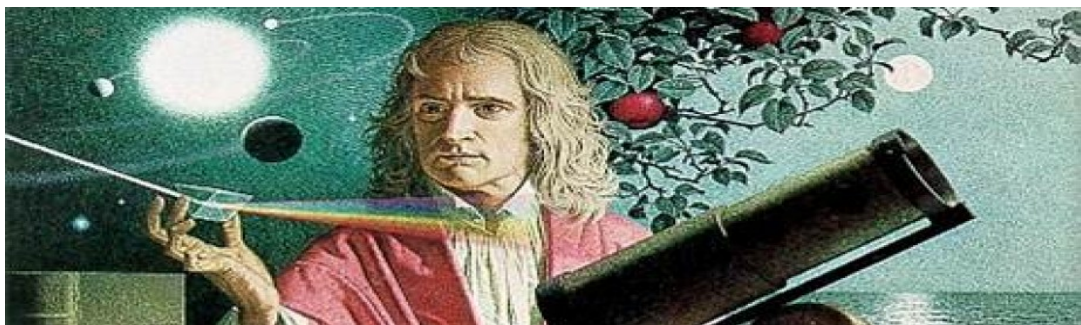
El primer concepto que maneja Newton es el de masa, que identifica con "cantidad de materia".

Newton asume a continuación que la cantidad de movimiento es el resultado del producto de la masa por la velocidad.

En tercer lugar, precisa la importancia de distinguir entre lo absoluto y relativo siempre que se hable de tiempo, espacio, lugar o movimiento.

En este sentido, Newton, que entiende el movimiento como una traslación de un cuerpo de un lugar a otro, para llegar al movimiento absoluto y verdadero de un cuerpo compone el movimiento (relativo) de ese cuerpo en el lugar (relativo) en que se lo considera, con el movimiento (relativo) del lugar mismo en otro lugar en el que esté situado, y así sucesivamente, paso a paso, hasta llegar a un lugar inmóvil , es decir, al sistema de referencias de los movimientos absolutos.

De acuerdo con esto, Newton establece que los movimientos aparentes son las diferencias de los movimientos verdaderos y que las fuerzas son causas y



efectos de estos. Consecuentemente, la fuerza en Newton tiene un carácter absoluto, no relativo.

Estas leyes enunciadas por Newton y consideradas como las más importantes de la mecánica clásica son tres: la ley de inercia , relación entre fuerza y aceleración , y ley de acción y reacción.

Newton planteó que todos los movimientos se atienen a estas tres leyes principales formuladas en términos matemáticos. Un concepto es la fuerza, causa del movimiento; otro es la masa, la medición de la cantidad de materia puesta en movimiento; los dos son denominados habitualmente por las letras F y m .

4.1.1 PRIMERA LEY DE NEWTON O LEY DE LA INERCIA

Esta indica que si un cuerpo dado no está sujeto a la acción de fuerzas, mantendrá sin cambio su velocidad (en magnitud y dirección). Esta propuesta se le debe originalmente a Galileo, pero Newton la adoptó como la primera de sus leyes para describir el movimiento de cuerpos.

A primera vista, esta ley parece ser menos compleja que las otras dos, pues carece de una expresión matemática y para colmo parece un corolario de su segunda ley ($F = m a$), pues la aceleración de un objeto es nula (o sea, su velocidad es constante) cuando no hay fuerzas actuando sobre él. El sentido original de la primera ley de Newton (conocida como Ley de la inercia), es que no se requieren fuerzas para mantener sin variación el movimiento de los cuerpos, sino solamente para cambiar la magnitud o la dirección de su velocidad. En otras palabras, no es necesario que haya una fuerza para que un cuerpo se encuentre en movimiento, sino únicamente para que cambie el estado del movimiento en sí. Este enunciado resultó fundamental cuando Galileo y Newton lo propusieron, pues según la percepción antigua y contradictoria a este principio, sustentada sobre todo un famoso libro de Aristóteles titulado precisamente Física, se requiere un "agente activo", o sea una fuerza, para mantener en movimiento un cuerpo, pues su "estado natural" es el de reposo.

INERCIA

La inercia es la propiedad que tienen los cuerpos de permanecer en su estado de reposo o movimiento, mientras no se le aplique sobre ellos alguna fuerza, o la resistencia que opone la materia al modificar su estado de reposo o movimiento. Como consecuencia un cuerpo conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme si no hay una fuerza actuando sobre él. De ser así el cuerpo dejara su estado original y tomara uno nuevo. En física se dice que un sistema tiene más inercia cuando resulta más difícil lograr un cambio en estado físico del mismo.

Los dos usos más frecuentes en física son la inercia mecánica y la inercia térmica. La primera de ellas en mecánica y es una medida de dificultad para cambiar el estado de movimiento o reposo de un cuerpo. La inercia mecánica depende de la cantidad de masa y del tensor de inercia. La inercia térmica mide la dificultad con la que un cuerpo cambia su temperatura al estar en contacto con otros cuerpos o ser calentado. La inercia térmica depende de la cantidad de masa y de la capacidad calorífica. Las llamadas fuerzas de inercia son fuerzas ficticias o aparentes que un observador percibe en un sistema de referencia no-inercial

4.1.2 Segunda ley de Newton o ley de aceleración o ley de fuerza

La segunda ley del movimiento de Newton dice que “Cuando se aplica una fuerza a un objeto, éste se acelera. Dicha aceleración es en dirección a la fuerza y es proporcional a su intensidad y es inversamente proporcional a la masa que se mueve”.

Esta ley explica qué ocurre si sobre un cuerpo en movimiento (cuya masa no tiene por qué ser constante) actúa una fuerza neta: la fuerza modificará el estado de movimiento, cambiando la velocidad en módulo o dirección.

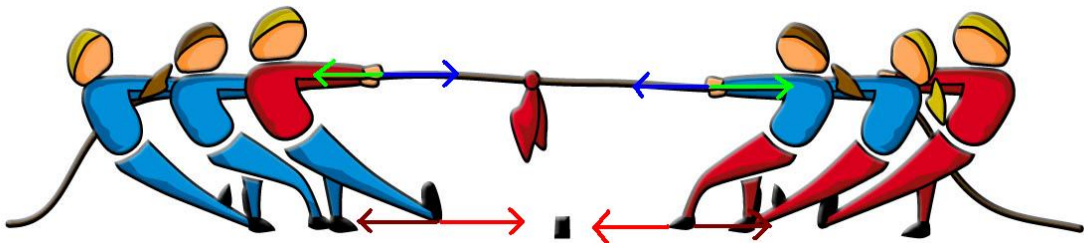
En concreto, los cambios experimentados en la cantidad de movimiento de un cuerpo son proporcionales a la fuerza motriz y se desarrollan en la dirección de esta; esto es, las fuerzas son causas que producen aceleraciones en los cuerpos.

4.1.3 Tercera Ley de Newton o Ley de acción y reacción

Enunciada algunas veces como que "para cada acción existe una reacción igual y opuesta".

En términos más explícitos: La tercera ley expone que por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, éste realiza una fuerza de igual intensidad y dirección pero de sentido contrario sobre el cuerpo que la produjo.

Dicho de otra forma, las fuerzas siempre se presentan en pares de igual magnitud, sentido opuesto y están situadas sobre la misma recta.



4.2. FUERZAS E INTERACCIONES

En el lenguaje cotidiano, fuerza es un empujón o un tirón. Una mejor definición es que una fuerza es una interacción entre dos cuerpos o entre un cuerpo y su ambiente. Es la causa de por qué siempre nos referimos a la fuerza que un cuerpo ejerce sobre un segundo cuerpo.

Cuando empujamos un automóvil atascado en la nieve, ejercemos una fuerza sobre el auto; un cable de acero ejerce una fuerza sobre la viga que levanta en una construcción, etcétera. Cuando una fuerza implica contacto directo entre dos cuerpos, como un empujón o un tirón que usted ejerce con la mano sobre un objeto, la llamamos fuerza de contacto. El adjetivo normal significa que la fuerza siempre actúa perpendicular a la superficie de contacto, sin importar el ángulo de esa superficie. En cambio, la fuerza de fricción ejercida sobre un objeto por una superficie actúa paralela a la superficie, en la dirección opuesta al deslizamiento.



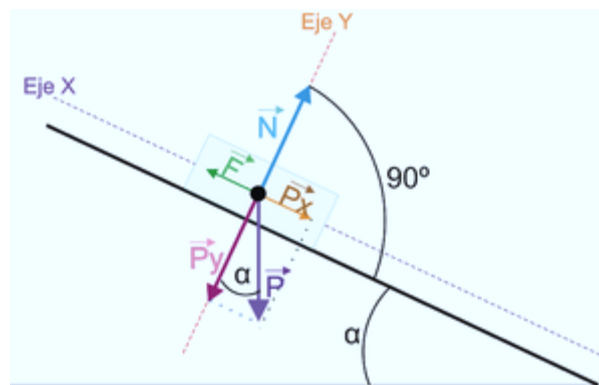
La fuerza de tirón ejercida por una cuerda o por un cordel estirado sobre un objeto al cual se ata se llama fuerza de tensión. Cuando usted tira de la correa de su perro, la fuerza que tira del cuello de la mascota es una fuerza de tensión. Además de las fuerzas de contacto, también hay fuerzas de largo alcance que actúan aunque los cuerpos estén separados. La fuerza entre dos imanes es un ejemplo de este tipo de fuerza, así como la gravedad; la Tierra atrae hacia sí cualquier objeto que se deje caer, incluso cuando no haya contacto directo entre el objeto y la Tierra.

La fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre un cuerpo se llama peso del cuerpo. Por lo tanto, para describir una fuerza vectorial debemos indicar su dirección de acción y su magnitud, la cantidad que describe "cuánto" o "qué tan tanto" la fuerza empuja o tira. La unidad SI de magnitud de fuerza es el newton, que se abrevia N.

En el sentido más simple, una fuerza es un empujón o un tirón; sin embargo, observando con más detenimiento, Newton comprendió que una fuerza no es algo aislado sino parte de una acción mutua, es decir de una interacción entre una cosa y otra. Por ejemplo, considera la interacción entre un martillo y un clavo.

Un martillo ejerce una fuerza sobre el clavo y lo introduce en la tabla. Pero esta fuerza es solo la mitad del cuento, porque debe existir además una fuerza que detenga el martillo. ¿Qué es lo que ejerce esta fuerza?, ¡El clavo! Newton dedujo que cuando el martillo ejerce una fuerza en el clavo, el clavo ejerce una fuerza en el martillo. Así pues, en la interacción entre el martillo y el clavo hay un par de fuerzas: una que actúa sobre el clavo y otra que lo hace sobre el martillo. Observaciones de ésta índole llevaron a Newton a formular su tercera ley: la ley de la acción y la reacción.

En física, la fuerza es una magnitud de la física que mide la intensidad del intercambio de momento lineal entre dos partículas o sistemas de partículas (en lenguaje de la física de partículas se habla de interacción). Según una definición clásica, fuerza es todo agente capaz de modificar la cantidad en movimiento o la forma de los materiales. No debe confundirse con los conceptos de esfuerzo o de energía.



4.2.1 Interacción por contacto:

Cuando jugamos al baloncesto, se produce una interacción entre el balón y la mano del jugador. El jugador realiza un esfuerzo muscular y lanza el balón aplicándole una fuerza por contacto en el momento del lanzamiento.

4.2.2 Interacción a distancia:

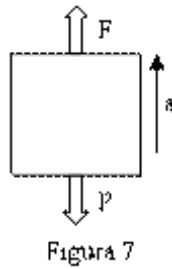
La fuerza de atracción que ejerce la bola sobre el imán actúa a través del espacio sin necesidad de que ambos objetos estén en contacto. Observa que también la bola atrae al imán. Y así, si sujetáramos el imán y dejáramos suelta la bola, sería esta la que se movería hacia el imán.

La fuerza es una medida de la interacción entre dos o más cuerpos. Según cómo se produzca esa interacción existen dos tipos de fuerzas: fuerzas por contacto y fuerzas de acción a distancia.

1.-Un ascensor pesa 400 Kp. ¿Qué fuerza debe ejercer el cable hacia arriba para que suba con una aceleración de 5 m/s²? Suponiendo nulo el roce y la masa del ascensor es de 400 Kg.

Solución

Como puede verse en la figura 7, sobre el ascensor actúan dos fuerzas: la fuerza F de tracción del cable y la fuerza P del peso, dirigida hacia abajo.



La fuerza resultante que actúa sobre el ascensor es $F - P$

Aplicando la ecuación de la segunda ley de Newton tenemos:

$$F - P = m * a$$

Al transformar 400 Kp a N nos queda que:

$$400 \text{ Kp} = 400 * 9,8 \text{ N} = 3920 \text{ N}$$

Sustituyendo los valores de P , m y a se tiene:

$$F - 3920 \text{ N} = 400 \text{ Kg} * 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F - 3920 \text{ N} = 200 \text{ N}$$

Si despejamos F tenemos:

$$F = 200 \text{ N} + 3920 \text{ N}$$

$$F = 4120 \text{ N}$$

2.-Un móvil cuya masa es de 600 kg acelera a razón de 1,2 m/s². ¿Qué fuerza lo impulsó?

Datos:

$$m = 600 \text{ kg}$$

$$a = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = m * a$$

$$F = 600 \text{ kg} * 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = 720 \text{ N}$$

3.-Un móvil de 100 kg recorre 1 km en un tiempo de 10 s partiendo del reposo. Si lo hizo con aceleración constante, ¿qué fuerza lo impulsó?

Datos:

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$d = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$F = m * a$, pero se desconoce la aceleración a , por lo tanto:

$$d = v$$

$$t + \frac{(at^2)}{2}$$

$$a = \frac{2(d - vt)}{t^2}$$

$$a = \frac{2 * (1000 \text{ m} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 10 \text{ s})}{(10 \text{ s})^2}$$

$$a = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ahora, $F = m * a$

$$F = 100 \text{ kg} * 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = 2000 \text{ N}$$

4.-Tenemos dos fuerzas concurrentes $\vec{F}_1 = 60\vec{i} + 20\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = -40\vec{i} + 30\vec{j}$ cuyas componentes están expresadas en unidades del SI. Calcula:

- La intensidad y dirección de cada una de ellas.
- La intensidad y dirección de la fuerza resultante.

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{60^2 + 20^2}$$

$$|\vec{F}_1| = 63,2 \text{ N}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{20}{60}$$

$$\alpha_1 = 18,4^\circ$$

$$|\vec{F}_2| = \sqrt{(-40)^2 + 30^2}$$

$$|\vec{F}_2| = 50 \text{ N}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{30}{40}$$

$$\alpha_1 = 36,9^\circ$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_R = (60 - 40)\vec{i} + (20 + 30)\vec{j}$$

$$\vec{F}_R = 20\vec{i} + 50\vec{j}$$

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{20^2 + 50^2}$$

$$|\vec{F}_R| = 53,8 \text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{50}{20}$$

$$\alpha = 68,2^\circ$$

5.-Las siguientes fuerzas coplanarias tiran de un anillo: 200N a 30°, 500N a 80°, 300N a 240° y una fuerza desconocida. Determina la magnitud y la dirección de la fuerza desconocida si el anillo se halla en equilibrio. Sol 350 30N a 251 69°

$$\sum F_x = 0$$

$$200 \text{ N} \cos 30^\circ + 500 \text{ N} \cos 80^\circ - 300 \text{ N} \cos 60^\circ + F_{Ex} = 0$$

$$F_{Ex} = -110,03 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$200 \sin 30^\circ + 500 \sin 80^\circ - 300 \text{ N} \sin 60^\circ + F_{Ey} = 0$$

$$F_{Ey} = -332,51 \text{ N}$$

$$F^2 = F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2$$

$$F^2 = (-110,03)^2 + (-332,51)^2$$

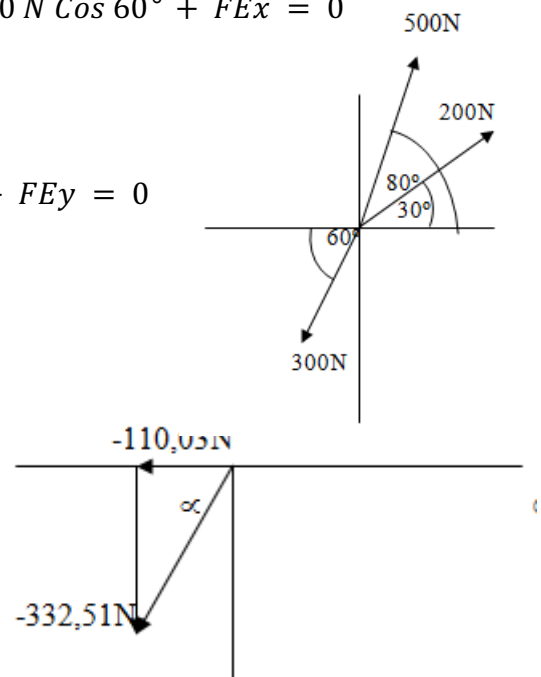
$$F = 350,3 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{-332,51}{-110,03}$$

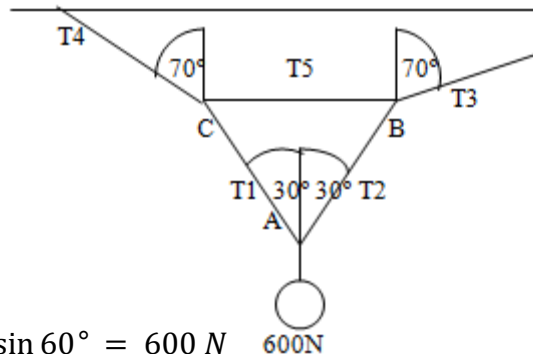
$$\alpha = 71,69^\circ$$

$$\theta = 180^\circ + 71,69^\circ$$

$$\theta = 251,69^\circ$$



6.-Determina el valor de las tensiones de las cuerdas mostradas, si el objeto soportado pesa 600N. Sol. 346, 346N, 877N, 651N.



$$\sum F_y = 0$$

$$T_2 \sin 60^\circ - T_1 \sin 60^\circ = 600 \text{ N}$$

$$0,866 T_2 + 0,866 T_1 = 600 \text{ N}$$

$$1,732 T_2 = 600 \text{ N}$$

$$T_2 = 346,42 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

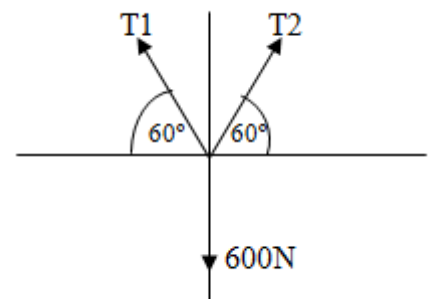
$$T_2 \cos 60^\circ - T_1 \cos 60^\circ = 0$$

$$0,5 T_2 - 0,5 T_1 = 0$$

$$0,5 T_2 = 0,5 T_1$$

$$T_1 = T_2$$

$$T_1 = 346,42 \text{ N}$$



$$\sum F_y = 0$$

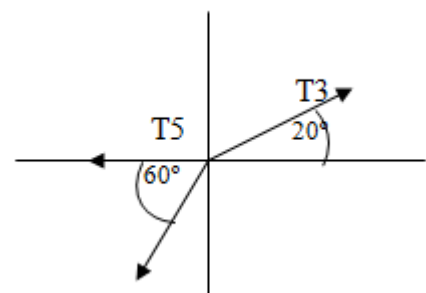
$$T_3 \sin 20^\circ - 346,42 \text{ N} \sin 60^\circ = 0$$

$$0,342 T_3 - 300 \text{ N} = 0$$

$$T_3 = 877,22 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$877,22 \text{ N} \cos 20^\circ - T_5 - 346,42 \text{ N} \cos 60^\circ = 0$$



$$824,58 \text{ N} - T5 - 173,21 \text{ N} = 0$$

$$T5 = 877,22 \text{ N} - 173,21 \text{ N}$$

$$T5 = 651,37 \text{ N}$$

$$T2 = 346,42 \text{ N}$$

$$T4 = T3 \text{ por oponerse a ángulos iguales, es decir, } T4 = 877,21 \text{ N}$$

7.-El objeto de la Fig.4 está en equilibrio y sostiene un peso $W = 80 \text{ N}$. Encuentra las tensiones $T1$, $T2$, $T3$, $T4$. Sol. $37,30 \text{ N}$, $88,27 \text{ N}$, $76,80 \text{ N}$, $139,32 \text{ N}$.

$$\sum F_y = 0$$

$$T2 \sin 35^\circ - 80 \text{ N} = 0$$

$$T2 = \frac{80 \text{ N}}{\sin 65^\circ}$$

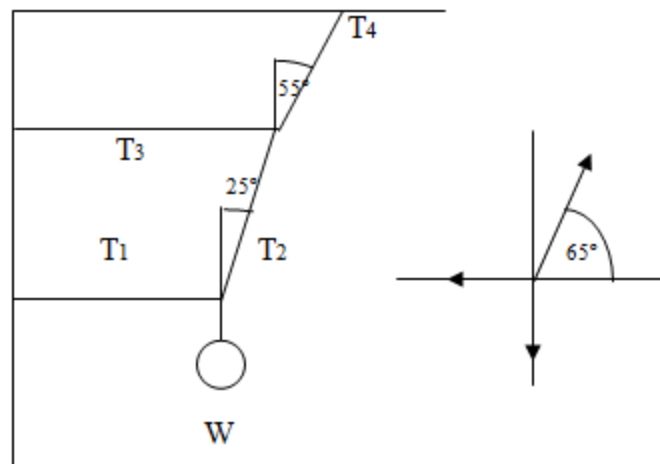
$$T2 = 88,27 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T2 \cos 65^\circ - T1 = 0$$

$$88,27 \text{ N} (0,423) - T1 = 0$$

$$T1 = 37,2 \text{ N}$$



8.-Supóngase que $W1$ en la Fig.2 es de 500 N . Halle los valores de $W2$ y $W3$ si el sistema está colgado en equilibrio como se muestra en la figura. Sol $288,15 \text{ N}$, $384,53 \text{ N}$.

$$\sum F_x = 0$$

$$W3 \cos 55^\circ - W2 \cos 40^\circ = 0$$

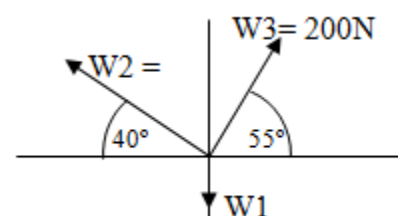
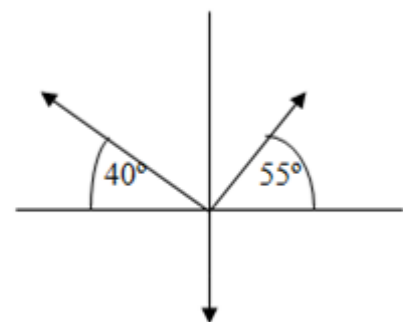
$$0,574 W3 - 0,766 W2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$W3 \sin 55^\circ + W2 \sin 40^\circ = 500 \text{ N} \quad (2)$$

$$0,819 W3 + 0,643 W2 = 500 \text{ N}$$

Sustituyo $W2$ en (1)



$$\begin{aligned}
 0,574 W_3 - 0,766 (288,15 N) &= 0 \\
 0,574 W_3 - 220,72 N &= 0 \\
 W_3 &= 384,53 N
 \end{aligned}$$

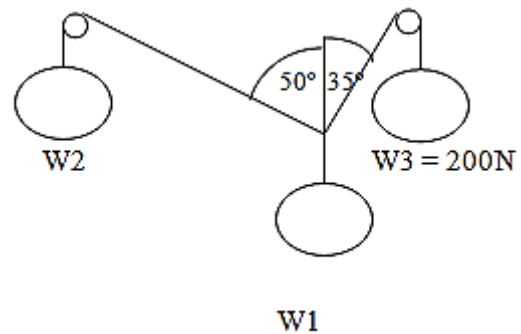
Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}
 0,574 W_3 - 0,766 W_2 &= 0 \\
 0,819 W_3 + 0,643 W_2 &= 500 N \\
 \hline
 0,996 W_2 &= 287 N \\
 W_2 &= 288,15 N
 \end{aligned}$$

9.-En la Figura las poleas no presentan fuerza de fricción y el sistema cuelga en equilibrio. Si el peso de W_3 es de 200N, ¿Cuáles son los valores de W_1 y W_2 ? Sol. 260N, 150N.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \\
 200 \cos 55^\circ - W_2 \cos 40^\circ &= 0 \\
 W_2 &= 150 N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= 0 \\
 200 \sin 55^\circ + 150 \sin 40^\circ &= W_1 \\
 W_1 &= 260 N
 \end{aligned}$$



10.-Una bala de 5 gr sale del cañón de un rifle con una rapidez de 320 m/seg. ¿Qué fuerza ejercen los gases en expansión tras la bala mientras se mueve por el cañón del rifle de 0,82 m de longitud? Suponga aceleración constante y fricción despreciable.

$$m = 5 \text{ gr}$$

$$V_F = 320 \frac{m}{s}$$

$$x = 0,82 \text{ m}$$

$$(V_F)^2 = (V_0)^2 + 2ax$$

$$2ax = (V_F)^2$$

$$a = \frac{(V_F)^2}{2x} = -\frac{(320)^2}{2 * (0,82)} = -\frac{102400}{1,64}$$

$$a = 62439,02 \frac{m}{s^2}$$

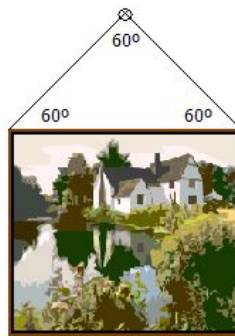
$$m = 5 \text{ gr} * \frac{1 \text{ Kg}}{1000 \text{ gr}} = 0,005 \text{ Kg}$$

$$F = m * a$$

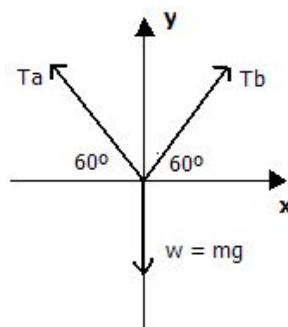
$$F = 0,005 * 62439,02 = 312,91 \text{ N}$$

Primera Ley de Newton

1. Un cuadro de 2 Kg se cuelga de un clavo como se muestra en la figura, de manera que las cuerdas que lo sostienen forman un ángulo de 60° . ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda?



Se debe determinar la situación del problema. Una cuerda sostiene un cuadro de 2 Kg, en dos segmentos, cada segmento tiene una tensión T_a y T_b respectivamente, como se ilustra en el DCL.



De las tres fuerzas planteadas, solamente se puede determinar el valor de su peso w .

$$\sum F_y = 0 = T_a \sin 60^\circ + T_b \sin 60^\circ - w$$

$$T_a \sin 60^\circ + T_b \sin 60^\circ = w = m * g \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0 = -T_a \cos 60^\circ + T_b \cos 60^\circ$$

$$T_a \cos 60^\circ = T_b \cos 60^\circ, \text{ entonces } T_a = T_b \text{ (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$2 T_b \sin 60^\circ = m * g$$

Despejando T_b :

$$T_b = \frac{m * g}{2 * \sin(60^\circ)}$$

$$T_b = \frac{(2 \text{ Kg}) * (9,8 \frac{m}{s^2})}{2 * \sin(60^\circ)}$$

$$T_b = 11,31 \text{ N}$$

Segunda Ley de Newton

1. Una fuerza le proporciona a la masa de 2,5 Kg. una aceleración de 1,2 m/s². Calcular la magnitud de dicha fuerza en Newton y dinas.

Datos

$$m = 2,5 \text{ Kg}$$

$$a = 1,2 \frac{m}{s^2}$$

$$F = ?$$

Solución

Para calcular la fuerza usamos la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$F = m * a$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$F = (2,5 \text{ Kg}) * (1,2 \frac{m}{s^2})$$

$$F = 3 \text{ Kg} * \frac{m}{s^2}$$

$$F = 3 \text{ N}$$

Como nos piden que lo expresemos en dinas, bastará con multiplicar por 10^5 , luego:

$$3 \text{ N} = 3 * 10^5 \text{ dyn}$$

2. ¿Qué aceleración adquirirá un cuerpo de 0,5 Kg; cuando sobre él actúa una fuerza de 200000 dinas?

Datos

$$a = ?$$

$$m = 2,5 \text{ Kg.}$$

$$F = 200000 \text{ dyn}$$

Solución:

$$200000 \text{ dyn a N} = \frac{200000}{10^5} \text{ N}$$

$$200000 \text{ dyn a N} = 2 \text{ N}$$

La ecuación de la segunda ley de Newton viene dada por:

$$F = m * a$$

Despejando **a** tenemos:

$$a = \frac{F}{m}$$

Sustituyendo sus valores se tiene:

$$a = \frac{2 \text{ N}}{0,5 \text{ Kg}} = 4 \frac{\text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{Kg}}$$

$$a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3. Un ascensor pesa 400 Kp. ¿Qué fuerza debe ejercer el cable hacia arriba para que suba con una aceleración de 5 m/s²? Suponiendo nulo el roce y la masa del ascensor es de 400 Kg.

Solución

Como puede verse en la figura 7, sobre el ascensor actúan dos fuerzas: la fuerza **F** de tracción del cable y la fuerza **P** del peso, dirigida hacia abajo.

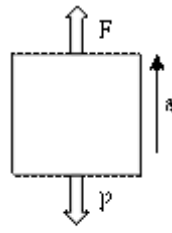


Figura 7

La fuerza resultante que actúa sobre el ascensor es $F - P$

Aplicando la ecuación de la segunda ley de Newton tenemos:

$$F = m * a$$

Al transformar 400 Kp a N nos queda que:

$$400 \text{ Kp} = 400 (9,8 \text{ N}) = 3920 \text{ N}$$

Sustituyendo los valores de **P**, **m** y **a** se tiene:

$$F - 3920 \text{ N} = 400 \text{ Kg.} (0,5 \frac{m}{s^2})$$

$$F - 3920 \text{ N} = 200 \text{ N}$$

Si despejamos F tenemos:

$$F = 200 \text{ N} + 3920 \text{ N}$$

$$F = 4120 \text{ N}$$

4. Calcular la masa de un cuerpo, que estando de reposo se le aplica una fuerza de 150 N durante 30 s, permitiéndole recorrer 10 m. ¿Qué rapidez tendrá al cabo de ese tiempo?

Datos

$$m = ?$$

$$V_o = 0$$

$$F = 150 \text{ N}$$

$$t = 30 \text{ s}$$

$$x = 10 \text{ m}$$

$$V_f = ?$$

Solución

Como nos piden la masa, despejamos la segunda la segunda ley de Newton:

$$F = m * a$$

Como no se conoce la aceleración y nos dan la distancia que recorre partiendo de reposo, usamos la ecuación de la distancia en función del tiempo y despejamos (a)

Sustituyendo valores tenemos:

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

$$x = \frac{a * t^2}{2} \text{ de donde } 2x = a * t^2$$

Sustituyendo los valores de X y t en (II) tenemos:

$$a = \frac{2*(10 \text{ m})}{(30\text{s})^2} = \frac{20 \text{ m}}{900\text{s}^2} = 0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ Sustituyendo a y F por sus valores en (I):}$$

$$m = \frac{150 \text{ N}}{0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7500 \frac{150 \text{ Kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$m = 7500\text{Kg}$$

5. Calcular la aceleración que produce una fuerza de 5 N a un cuerpo cuya masa es de 1000g

➤ **Expresar el resultado en $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.**

DATOS

$$A = ?$$

$$F = 5 \text{ N}$$

$$m = 2000\text{g} = 2\text{Kg}$$

$$a = \frac{F}{m}$$

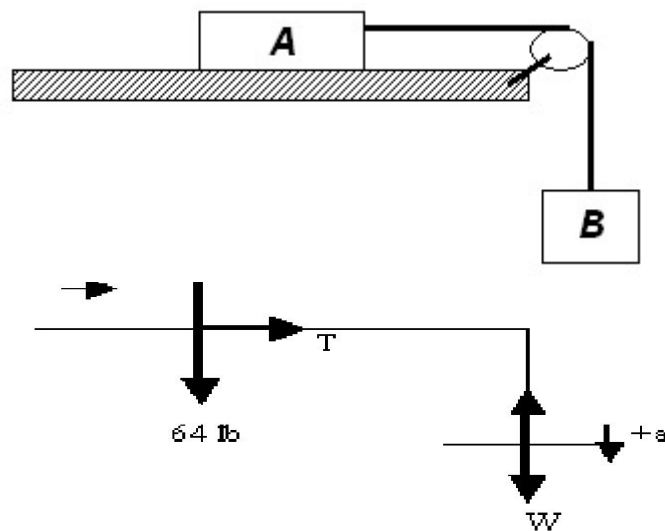
$$a = \frac{5 \text{ Kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2\text{Kg}}$$

$$a = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

6. Considere el sistema que muestra la siguiente figura. El bloque A de 64 lb en reposo sobre una masa sin fricción y está atado en su otro extremo a un peso W,

Calcule:

- ¿Cuál debe ser el valor de W para impartir al sistema una aceleración de $16 \frac{ft}{s^2}$?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda?



Puesto que las fuerzas verticales en el bloque de 64 lb están equilibradas, la fuerza neta en el sistema total es solo el peso W. aplicamos la ley de Newton:

$$W = \left[\frac{64 \text{ lb}}{g} + \frac{W}{g} \right] * a$$

$$W = \frac{64 \text{ lb} + W}{g} * a$$

$$W = (64 \text{ lb} + W) \frac{a}{g}$$

$$W = (64 \text{ lb} + W) \frac{16 \frac{ft}{s^2}}{32 \frac{ft}{s^2}}$$

$$W = \frac{64 \text{ lb} + W}{2}$$

$$2 * W = 64 \text{ lb} + W$$

$$2 * W - W = 64 \text{ lb}$$

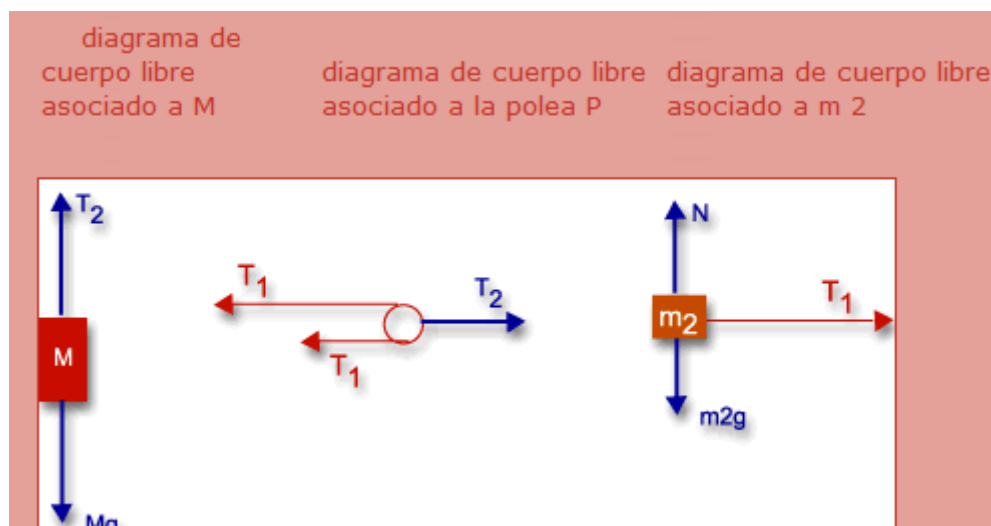
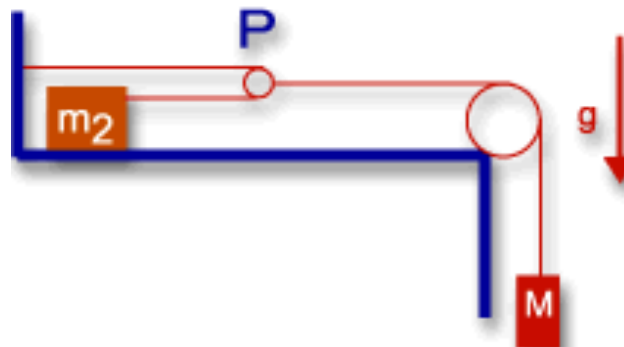
$$W = 64 \text{ lb}$$

$$T = \frac{64 \text{ lb}}{32 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} * (16 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2})$$

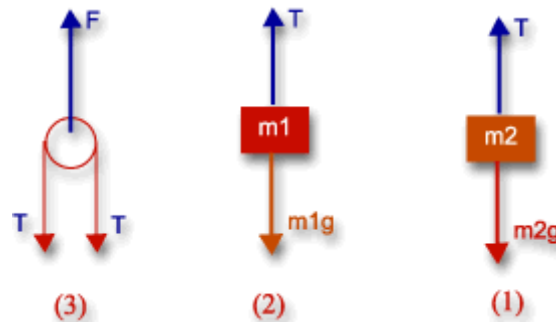
$$T = 32 \text{ lb}$$

7. En el diagrama de la siguiente figura se pide que:

- Dibuje el diagrama de cuerpo libre asociado a: la masa M, la polea P y la masa m_2
- ¿Cuál es la relación entre la aceleración de la masa m_2 y la de M?
- Encuentre la aceleración de M.
- ¿Cuál es el valor de las tensiones?



Veamos el diagrama de cuerpo libre de la polea y de las dos masas.



$$\begin{aligned} \text{Relación para } m_2: \quad x &= \frac{a_2 * t^2}{2} \\ \frac{a_2 * t^2}{2} &= a_M * t^2 \\ \text{Relación para } M: \quad \frac{x}{2} &= \frac{a_M * t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad T_1 &= m_2 * a^2 \\ (2) \quad m * g &= M * a_M \\ (3) \quad T_2 - 2 * T_1 &= 0 \end{aligned}$$

Además, sobre m_2 : $N - m_2 * g = 0$, ya que no hay movimiento en ese eje.

Reemplazando (1) en (3), se tiene:

$$T_2 - 2 m_2 * a^2 = M * a_M \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (2), se tiene:

$$m * g - 2 m_2 * a^2 = M * a_M \text{ pero, } a^2 = 2 a_M$$

$$m * g - 2 m_2 * a^2 = M * a_M$$

$$m * g = (M + 4 m_2) * a_M$$

$$a_M = \frac{m * g}{M + 4 m_2}$$

Reemplazando en expresión $a^2 = 2 a_M$ en expresión (1), se obtiene

$$T_1 = \frac{2 m_2 * m * g}{M + 4 m_2}$$

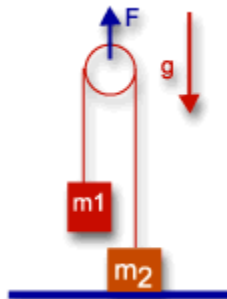
$T_1 = m_2 * a_M$, por lo tanto: de la expresión (3), $T_2 = 2 T_1$, por lo tanto, reemplazando el valor obtenido;

$$T_2 = \frac{4 m_2 * m * g}{M + 4 m_2}$$

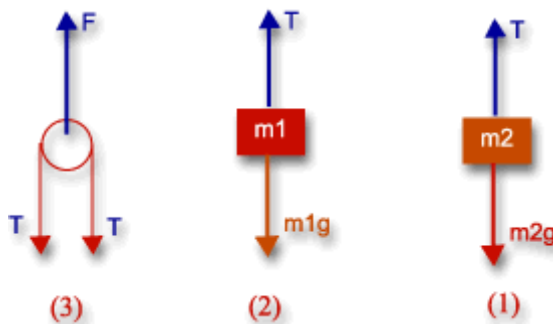
8. Una fuerza F se ejerce directamente hacia arriba sobre el eje de la polea sin masa. Considere que la polea y el cable carecen de masa. Dos objetos, de masas:

$m_1 = 1,2 \text{ kg}$ y $m_2 = 1,9 \text{ kg}$, están unidos a los extremos opuestos del cable, el cual pasa por la polea. El objeto m_2 está en contacto con el piso.

- ¿Cuál es el valor más grande que la fuerza F puede tener de modo que m_2 permanezca en reposo sobre el piso?
- ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la fuerza F hacia arriba sea de 110 N? ¿Cuál es la aceleración de m_1 ?



Veamos el diagrama de cuerpo libre de la polea y de las dos masas.



Solución

-Para que m_2 permanezca en reposo sobre la superficie, debe ser mayor que m_1 .

Fuerzas sobre m_2 :

$$m_1 * g - T - N = 0,$$

pero $N = 0$ cuando está a punto de despegar.

$$\text{Luego: } m_2 * g - T = 0 \quad (1)$$

Fuerzas sobre m_1 :

$$T - m_1 * g = m_1 * a_1 \quad (2),$$

Donde es la aceleración con que sube. Aquí existe una aceleración, porque si la masa 2 tiene que estar en reposo y la cuerda es inextensible, obvia que la masa m_1 se mueve.

Fuerzas sobre la polea:

$$F - 2T = 0 \quad (3)$$

De la expresión (3)

Reemplazando T en (1) queda

$$m_2 * g - \frac{F}{2} = 0; \text{ por lo tanto } F = 2 m_2 * g \quad (4)$$

Reemplazando $m_2 = 1,9 \text{ kg}$ y $g = 10 \frac{M}{s^2}$ queda $F = 38 \text{ N}$

Calculo de la tensión del cable:

Reemplazando $F = 110 \text{ N}$ en la expresión (3):

$$110 - 2T = 0, \text{ luego: } T = 55 \text{ N}$$

Calculo de a_1 :

Reemplazando T, m_1 y g en (2):

$$55 - 12 = 1,2a_1,$$

$$\text{Luego: } a_1 = 35,8 \frac{M}{s^2}$$

9. ¿Cuál es la fuerza necesaria para que un móvil de 1500 Kg, partiendo de reposo adquiera una rapidez de $2 \frac{m}{s^2}$ en 12 s?

Datos

$$F = ?$$

$$m = 1500 \text{ Kg}$$

$$V_o = 0$$

$$V_f = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$t = 12 \text{ s}$$

$$F = m * a$$

De esa ecuación conocemos la masa, pero desconocemos la aceleración. Esta podemos obtenerla a través de la ecuación:

$$a = \frac{V_f}{t} \quad \text{Porque partió de reposo.}$$

Sustituyendo V_f y t por sus valores tenemos:

$$a = \frac{2 \frac{m}{s}}{12s} = 0,16 \frac{m}{s^2}$$

Si sustituimos el valor de a y de m en la ecuación (I) tenemos que:

$$F = 1500Kg * \frac{0,16m}{s^2}$$

$$F = 240N$$

10. Una fuerza le proporciona a la masa de 2,5 Kg. una aceleración de $1,2 \frac{m}{s^2}$. Calcular la magnitud de dicha fuerza en Newton y dinas.

Datos

$$m = 2,5 Kg$$

$$a = 1,2 \frac{m}{s^2}$$

$$F = ?$$

Nótese que los datos aparecen en un mismo sistema de unidades (M.K.S.). Para calcular la fuerza usamos la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{F}{m}$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$F = 2,5Kg \cdot 1,2 \frac{m}{s^2} = 3Kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Como nos piden que lo expresemos en dinas, bastará con multiplicar por 10⁵, luego:

$$3N = 3 \cdot 10^5 dyn$$

Tercera Ley de Newton

1. Consideramos un cuerpo con una masa $m = 2 \text{ Kg.}$ que está en reposo sobre un plano horizontal, como el indicado.

- Haz un diagrama de cuerpo libre.
- Calcular la fuerza con que el plano reacciona contra el bloque.

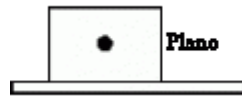


Figura 17

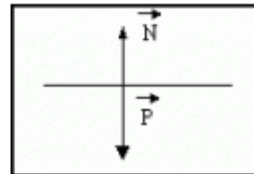


Figura 18

Solución

Las fuerzas que actúan sobre el bloque están representadas en la figura, donde se elige un eje de coordenadas cuyo origen es el centro del cuerpo, mostrándose las fuerzas verticales: el peso

$\vec{P}$ y la normal $\vec{N}$; $\vec{P}$ El peso del cuerpo, dirección vertical y sentido hacia abajo. $\vec{N}$ Normal, fuerza que el plano ejerce sobre el bloque.

Al diagrama así mostrado se le llama **diagrama de cuerpo libre**.

Para calcular la fuerza que el plano ejerce sobre el bloque aplicamos la segunda ley de Newton:

Como $\vec{N}$ actúa hacia arriba y $\vec{P}$ actúa hacia abajo, la resultante viene dada en módulo por $N - P$, que al aplicar la segunda ley de Newton escribimos:

$$N - P = m * a$$

Como en la dirección vertical no hay movimiento entonces la aceleración es cero ($a = 0$), luego

$$N - P = 0$$

$$N = P$$

$$N = m * g \text{ (porque } P = m * g \text{)}$$

Sustituyendo los valores de m y g se tiene:

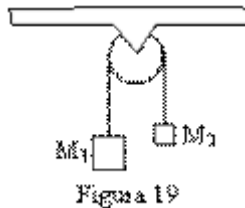
$$N = 2 \text{ Kg} * 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$N = 19,6 \text{ N}$$

Esta es la fuerza con que el plano reacciona sobre el bloque.

2. En la figura se muestran dos masas $M_1 = 3 \text{ Kg}$ y $M_2 = 5 \text{ Kg}$ colgando de los extremos de un hilo que pasa por la garganta de una polea.

- a) Hacer un diagrama de las fuerzas que actúan
b) Calcular la tensión del hilo y la aceleración con que se mueve el sistema.



$\vec{T}$ Es la tensión del hilo, actuando hacia arriba.

$\vec{P}_1$ El peso del cuerpo de masa M_1 .

En la figura 20(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo de masa M_2 .

$\vec{T}$ Es la tensión del hilo, actuando hacia arriba.

$\vec{P}_2$ El peso del cuerpo de masa M_2 .

Como el cuerpo de masa M_1 sube, la tensión T es mayor que P , por lo que podemos escribir en módulo la segunda ley de Newton así:

$$T - P_1 = M_1 * a \dots\dots\dots (A)$$

Como el cuerpo de masa M_2 baja, el peso P_2 es mayor que T , pudiéndose escribir en módulo la segunda ley de Newton así:

$$P_2 - T = M_2 * a \dots\dots\dots (B)$$

Despajando T de la ecuación (A) nos queda que:

$$T = M_1 * a + P_1$$

Sustituyendo ésta expresión en (B) tenemos:

$$P_2 - (M_1 * a + P_1) = M_2 * a$$

$$P_2 - P_1 = M_2 * a + M_1 * a$$

Sacando **a** como factor común:

$$P_2 - P_1 = a * (M_2 + M_1)$$

Despejando nos queda:

$$a = \frac{P_2 - P_1}{M_2 + M_1} \quad (C)$$

Calculemos por separado P1 y P2

$$P_1 = M_1 * g = 3 \text{ Kg} * 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P_1 = 29,4 \text{ N}$$

$$P_2 = M_2 * g = 5 \text{ Kg} * 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P_2 = 49 \text{ N}$$

Sustituyendo todos los valores conocidos en la expresión (C) nos queda que:

La tensión la obtenemos sustituyendo en la expresión:

$$T = M_1 * a + P_1$$

$$T = 3 \text{ Kg} * 2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 29,4 \text{ N}$$

$$T = 7,35 \text{ N} + 29,4 \text{ N}$$

$$\mathbf{T = 36,4 \text{ N}}$$

$$\text{Luego } a = 2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ y } T = 36,4 \text{ N}$$

3. En la figura 21 se muestran dos bloques de masa $M_2 = 2 \text{ Kg}$ que arrastra sobre el plano horizontal al cuerpo de masa $M_1 = 7 \text{ Kg}$. Calcular la aceleración del sistema y tensión de la cuerda.

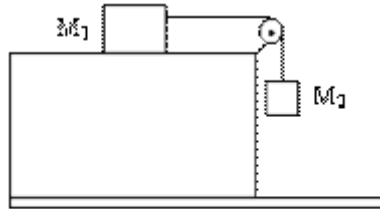


Figura 21

Solución

Antes debemos hacer un diagrama del cuerpo libre.

Para el bloque horizontal se muestra la figura 21(a) y para el bloque vertical el diagrama de la figura 21(b).

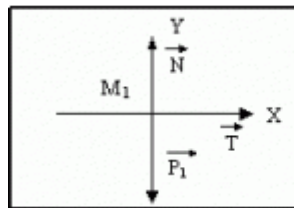


Figura 21(a)

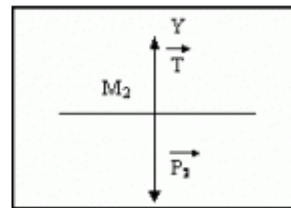


Figura 21(b)

Horizontalmente se desplaza hacia la derecha y la única fuerza que actúa es la tensión, por lo que puede escribirse de acuerdo con la segunda ley de Newton que:

$$T = M_1 * a \dots\dots\dots (I)$$

En el bloque de masa M_2 , se lleva a cabo un movimiento vertical hacia abajo, pudiéndose escribir que:

$$P_2 - T = M_2 * a \dots\dots\dots (II)$$

Sustituyendo T de la ecuación (I) en (II) se tiene:

$$P_2 - M_1 * a = M_2 (a)$$

Transponiendo términos se tiene que:

$$P_2 = M_2 * a + M_1 (a)$$

Sacando **a** como factor común:

$$P_2 = a * (M_2 + M_1)$$

Despejando nos queda:

$$a = \frac{P_2}{M_2 + M_1}$$

Sustituyendo todos los valores conocidos en la expresión (C) nos queda que:

$$a = \frac{2 \text{ Kg} * 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ Kg} + 7 \text{ Kg}} = \frac{19,6 \text{ Kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9 \text{ Kg}}$$

$$a = 2,17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La tensión de la cuerda la obtenemos sustituyendo en la expresión:

$$T = M_1 * a = 2 \text{ Kg} * (2,17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$T = 4,34 \text{ N}$$

4. Dos niños, Juan de 20kg y Pedro de 25kg, están frente a frente en una pista de hielo. Juan da un empujón a Pedro y este sale despedido con una rapidez de $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcular la rapidez con que retrocede Juan, suponiendo que los patines no ofrecen resistencia al movimiento.

Datos:

$$m_1 = 20 \text{ kg}$$

$$m_2 = 25 \text{ kg}$$

$$v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = ?$$

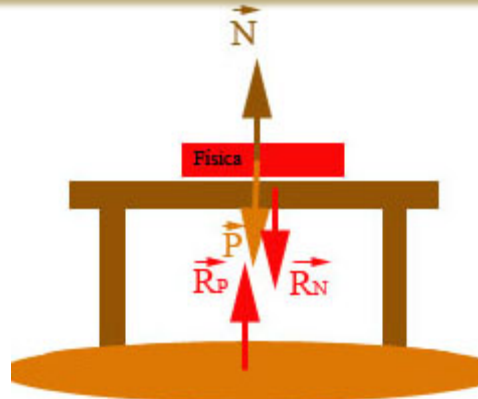
Despejamos:

$$m_1 * v_1 = m_2 * v_2 \quad \} \quad v_1 = \frac{m_2 * v_2}{m_1}$$

Resolvemos:

$$v_1 = \frac{25 \text{ Kg} * 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \text{ Kg}} = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.-Dibuja las fuerzas que actúan sobre un libro apoyado encima de una mesa. ¿Cuáles son los pares acción-reacción?

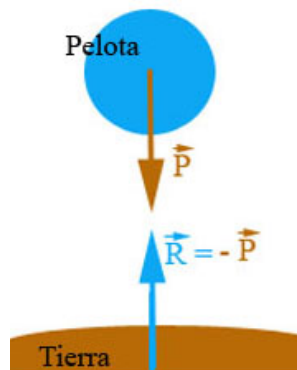


Los pares acción reacción son:

$\vec{P} = -\vec{R_P}$; peso que actúa sobre el libro (la ejerce la Tierra) y reacción al peso que actúa sobre la Tierra (la ejerce el libro).

$\vec{N} = -\vec{R_N}$; normal que actúa sobre el libro (la ejerce la mesa) y reacción a la normal que actúa sobre la mesa (la ejerce el libro).

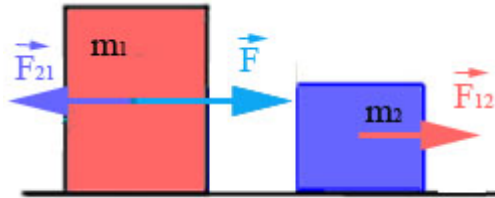
Dibuja las fuerzas que actúan sobre un libro apoyado encima de una mesa. ¿Cuáles son los pares acción-reacción?



El par acción-reacción es $\vec{P} = -\vec{R}$

El peso lo ejerce la Tierra sobre la pelota y la reacción al peso la ejerce la pelota sobre la Tierra.

2.-Dos cajas de 20 y 30 kg de masa respectivamente, se encuentran apoyadas sobre una superficie horizontal sin rozamiento, una apoyada en la otra. Si empujamos el conjunto con una fuerza de 100 N. ¿Cuál es la aceleración de cada masa? ¿Qué fuerza ejercerá cada caja sobre la otra?



En módulo $F_{21} = F_{12}$

Aplicando la 2ª ley de Newton, $F = m \cdot a$; a cada caja:

1ª caja: $F - F_{21} = m_1 \cdot a$

2ª caja: $F_{12} = m_2 \cdot a$

Sumando: $F = (m_1 + m_2) \cdot a$; $100 = (20 + 30) \cdot a$; $a = 2 \frac{m}{s^2}$

Y sustituyendo en $F_{12} = m_2 \cdot a = 30 \cdot 2 = 60 \text{ N}$, fuerza que ejerce la caja 2 sobre la 1.

La fuerza que ejerce la caja 1 sobre la 2 es igual en módulo y dirección y de sentido contrario.

4.3 Masa y peso

Todos los cuerpos están hechos de materia. Algunos tienen más materia que otros. Por ejemplo, pensemos en dos pelotas de igual tamaño (igual volumen): una de golf (hecha de un material duro como el caucho) y otra de tenis (hecha de goma, más blanda).

Aunque se vean casi del mismo tamaño, una (la de golf) tiene más materia que la otra.

Como la masa es la cantidad de materia de los cuerpos, diremos que la pelota de golf tiene más masa que la de tenis.

Lo mismo ocurre con una pluma de acero y una pluma natural. Aunque sean iguales, la pluma de acero tiene más masa que la otra.

Ahora, un ejemplo con cuerpos que no sean del mismo tamaño (que tengan distinto volumen):

Un niño de 7 años comparado con su padre de 35 años.

La diferencia es más clara. Es evidente que el pequeño tiene mucho menos masa que su padre.

Ahora bien: pon mucha atención a lo siguiente:

La UNIDAD DE MEDIDA de la MASA es el KILOGRAMO (kg)



La masa se mide usando una balanza

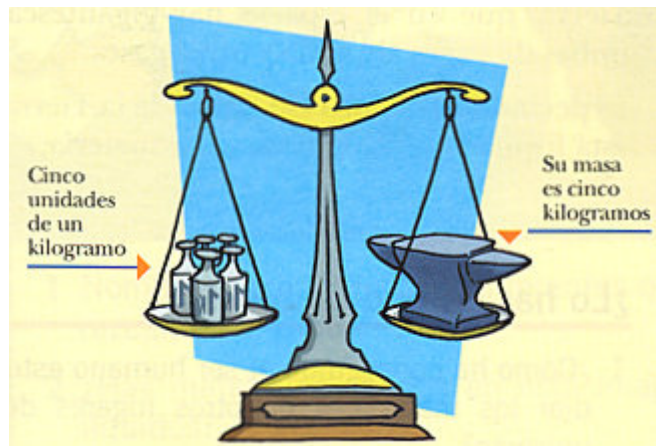
El kilogramo (unidad de masa) tiene su patrón en: la masa de un cilindro fabricado en 1880, compuesto de una aleación de platino-iridio (90 % platino - 10 % iridio), creado y guardado en unas condiciones exactas, y que se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, cerca de París.

La masa es la única unidad que tiene este patrón, además de estar en Sevres, hay copias en otros países que cada cierto tiempo se reúnen para ser regladas y ver si han perdido masa con respecto a la original.

No olvidemos que medir es comparar algo con un patrón definido universalmente.

¿Y el peso?

De nuevo, atención a lo siguiente: la **masa** (la cantidad de materia) de cada cuerpo **es atraída** por la **fuerza de gravedad** de la Tierra. Esa fuerza de atracción hace que el cuerpo (la **masa**) **tenga un peso**, que se cuantifica con una unidad diferente: el Newton (N).



La UNIDAD DE MEDIDA DEL PESO ES EL NEWTON (N)

Entonces, el **peso es la fuerza** que ejerce la gravedad sobre una masa y ambas magnitudes son proporcionales entre sí, pero no iguales, pues están vinculadas por el factor aceleración de la gravedad.

Para que entiendas que el concepto **peso** se refiere a la **fuerza de gravedad** ejercida sobre un cuerpo, piensa lo siguiente:

El mismo niño del ejemplo, cuya **masa** podemos calcular en unos 36 **kilogramos** (medidos en la Tierra, en una balanza), **pesa** (en la Tierra, pero cuantificados con un dinamómetro) 352,8 Newtons (N).

Si lo ponemos en la Luna, **su masa seguirá siendo la misma** (la cantidad de materia que lo compone no varía, sigue siendo el mismo niño, el cual puesto en una balanza allí en la Luna seguirá teniendo una **masa de 36 kilogramos**), pero **como la fuerza de gravedad de la Luna** es 6 veces menor que la de la Tierra, allí el niño **PESARÁ** 58,68 Newtons (N)

Estas cantidades se obtienen aplicando la **fórmula para conocer el peso**, que es:

$$P = m \cdot g$$

Donde

P = peso, en Newtons (N)

m = masa, en kilogramos (kg)

g = constante gravitacional, que es 9,8 en la Tierra (m/s).

Estoy seguro de que todos se sorprenderán con que un niño de 7 años **pese** 352,8 Newtons, pero en **física** es así, ése es su **peso**.

Lo que ocurre es que la costumbre nos ha hecho trabajar desde chicos solo con el concepto de **peso**, el cual hemos asociado siempre al **kilogramo**, y nos han habituado a usarlo, sin saberlo nosotros, como sinónimo de **masa**. Por eso, cuando subimos a una balanza decimos que nos estamos “**pesando**”, cuando en realidad estamos midiendo nuestra **cantidad de masa**, que se expresa en **kilogramos**

.

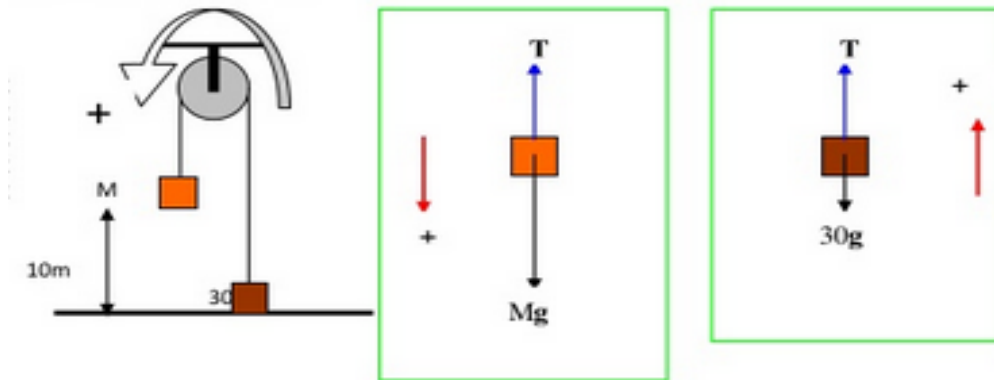
Lo que hacemos es usar nuestra medición de MASA como si fuera nuestro “PESO” y al bajar de la balanza decimos “PESE 70 KILOS” si la máquina marca esa cantidad, pero el PESO REAL SERÁ 686 Newtons (N) (70 por 9,8 es igual a 686).

Lo concreto es que, en el uso moderno del campo de la mecánica, el peso y la masa son cantidades fundamentalmente diferentes: la masa es una propiedad intrínseca de la materia mientras que el peso es la fuerza que resulta de la acción de la gravedad en la materia.

Sin embargo, el reconocimiento de la diferencia es, históricamente, un descubrimiento relativamente reciente. Es por eso que en muchas situaciones cotidianas la palabra **peso** continúa siendo usada cuando se piensa en **masa**. Por ejemplo, se dice que un objeto **pesa un kilogramo** cuando el **kilogramo** es una **unidad** de masa.



1. En el sistema mostrado en la figura se observa que partiendo del reposo el bloque de masa M, tarda 2seg en llegar al suelo. Hallar el valor de la masa M.



Utilizando la cinemática determinaremos la aceleración del sistema. El bloque parte del reposo y se desplaza 10m en dos segundos.

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = \frac{2h}{t^2}$$

$$a = \frac{2(10)}{4}$$

$$a = 5 \frac{m}{s^2}$$

Para el bloque de masa M:

$$\sum F_y = m * g$$

$$m * g - T = m * a$$

para el bloque de masa 30kg

$$\sum F_y = m * g$$

$$T - m * g = m * a$$

Procedemos a eliminar las T Sumando las dos ecuaciones

$$m * g - T = m * a$$

$$T - m * g = m * a$$

$$\underline{m * g - m * g = m * a + m * a}$$

$$m = 92.5 \text{ kg}$$

2. Un cuerpo pesa en la tierra 60 Kp. ¿Cuál será a su peso en la luna, donde la gravedad es $1,6 \frac{m}{s^2}$?

Datos

$$P_T = 60 \text{ Kp} = 588 \text{ N}$$

$$P_L = ?$$

$$g_L = 1,6 \text{ m/s}^2$$

Solución

Para calcular el peso en la luna usamos la ecuación

$$P_L = m * g_L \dots \dots \dots (I)$$

Como no conocemos la masa, la calculamos por la ecuación: $P_T = m * g_T$ que al despejar **m** tenemos:

$$m = \frac{P_T}{g_T} = \frac{588 \text{ N}_T}{9,8 \frac{m}{s^2}} = 60 \text{ Kg}$$

Esta masa es constante en cualquier parte, por lo que podemos usarla en la ecuación (I):

$$P_L = 60 \text{ Kg} * 1,6 \frac{m}{s^2}$$

$$P_L = 96 \text{ N}$$

3. ¿Qué masa debe tener un cuerpo para que una fuerza de 588 N lo acelere a razón de $9,8 \frac{m}{s^2}$?

Datos:

$$F = 588 \text{ N}$$

$$a = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = m * a \ggggg m = \frac{F}{a} = \frac{588 \text{ N}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$m = 60 \text{ Kg}$$

4. Dos niños están patinando sobre una pista de hielo. Se empujan y salen despedidos con velocidades de $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si la masa del primer niño es de 25kg, calcular la masa del segundo.

Datos:

$$v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_1 = 25 \text{ kg}$$

$$m_2 = ?$$

Formula que utilizaremos:

$$m_2 = \frac{m_1 * v_1}{v_2}$$

Resolvemos:

$$m_2 = \frac{25 \text{ Kg} * 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 21,42 \text{ Kg}$$

5. Una persona pesa 125 lb. Determine:

- Su peso en Newton
- Su masa en kg

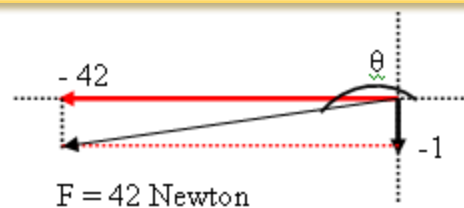
$$W = 125 \text{ lb} * \frac{4,448 \text{ N}}{1 \text{ lb}} = 556 \text{ N}$$

$$W = m g$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{556 \text{ N}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 56,73 \text{ Kg}$$

6. Tres **fuerza** dadas por $F_1 = (-2i + 2j)N$, $F_2 = (5i - 3j)N$, y $F_3 = (-45i)N$ actúan sobre un objeto para producir una aceleración de magnitud $3,75 \text{ m/seg}^2$

➤ ¿Cuál es la masa del objeto?



$$\Sigma F = m * a$$

$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$\Sigma F = (-2i + 2j) + (5i - 3j) + (-45i) = m * a = m * (3,75) a$$

Donde a representa la dirección de a

$$\Sigma F = (-42i - 1j) = m * a = m * (3,75) a$$

$$F = \sqrt{(-42)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1765} = 42 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{-42} = 2,3809 * 10^{-2}$$

$$u = \arctan 2,3809 * 10^{-2}$$

$$u = 181,360$$

$$42 = m * (3,75) a$$

$$42 = m * (3,75)$$

$$m = \frac{42}{3,75} = 11,2 \text{ Kg}$$

7. El colchón de una cama de agua mide 2 m de largo por 2 m de ancho y 30 cm de profundidad.

- Encuentre el peso del agua en el colchón.
- Hallar el volumen del agua que llena el colchón

$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{profundidad}$

$$V = 2 * 2 * 0,3 = 1,2 \text{ m}^3$$

sustancia	$\rho \text{ (kg /m}^3\text{)}$
Agua pura	1×10^3
hierro	$7,86 \times 10^3$

$$\rho = \text{densidad del agua pura} = 1 * 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$v = \text{volumen del colchón}$

$m = \text{masa del agua en el colchón}$

$$m = \rho \times v \quad m = 1 * 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} * 1,2 \text{ m}^3$$

$$m = 1,2 * 10^3 \text{ kg}$$

$$W = \text{peso del agua en el colchón} = m * g$$

$$W = 1,2 * 10^3 \text{ kg} * 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$W = 11,76 * 10^3 \text{ Newton}$$

8. Calcule la masa de una esfera de hierro sólido que tiene un diámetro de 3 cm.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho * v$$

$$\rho = \text{densidad del hierro} = 7860 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$v = \text{volumen de la esfera}$

$d = \text{diámetro de la esfera}$

r = radio de la esfera

$$d = 2r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} * (3,14159) * (0,015)^3$$

$$V = \frac{4}{3} * (3,14159) * 3,375 * 10^{-6}$$

$$V = \frac{4}{3} * (1,06) * 10^{-5}$$

$$V = 1,4136 * 10^{-5} m^3$$

$$m = \rho * v$$

$$m = 7860 \frac{Kg}{m^3} * 1,4136 * 10^{-5} m^3$$

$$m = 11110,89 * 10^{-5} kg$$

$$m = 0,1111 kg.$$

9.-Un astronauta de 80 kg de masa viaja a Marte. Calcular su peso:

- **En la Tierra**
- **En Marte, donde $g = 3,8 \frac{m}{s^2}$.**
- **¿Cuál es el valor de "g" en la cima de una montaña si el astronauta pesa 780 N?**

Dato:

$$m = 80 kg$$

El peso de un cuerpo depende de su masa y del factor g . Por tanto, variará según a la altura en la que esté situado, o en el planeta en donde se encuentre.

$$P_T = m * g = 80 Kg * 9,8 \frac{m}{s^2} = 784 N$$

$$P_M = m * g = 80 Kg * 3,8 \frac{m}{s^2} = 304 N$$

$$g = \frac{P}{m} = \frac{780 N}{80 Kg} = 9,75 \frac{Kg \frac{m}{s^2}}{Kg} = 9,75 \frac{m}{s^2}$$

9. 0.5 kg de alcohol etílico ocupan un volumen de 0.633 cm³. Calcular su densidad y peso específico.

Datos:

$$M = 0.5 kg$$

$$P = \frac{m}{V}$$

$$Pe = pg$$

$$V = 0.633 \text{ cm}^3$$

$$P = \frac{0.5 \text{ Kg}}{6,33 * 10^{-7} \text{ m}^3}$$

$$P = 789889.41 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$Pe = (789889.41 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$Pe = 7748815.11 \frac{\text{nw}}{\text{m}^3}$$

$$V = 6.33 * 10^{-7} \text{ m}^3$$

4.4. Fuerza de fricción

La fuerza de fricción es realmente la oposición al movimiento de los cuerpos y se da en todos los medios conocidos (sólidos, líquidos y gaseosos). Atendiendo a que las superficie de los cuerpos en contacto no son idealmente lisas es imposible desaparecer esta fuerza, que en unos casos resulta necesaria reducir y en otros aumentar, ya que la fricción es una fuerza con sentido contrario a la fuerza aplicada.

De no ser por la existencia de esta fuerza, no podríamos detenernos una vez puestos en marcha: los vehículos no avanzarían, pues la fricción sirve de apoyo a las ruedas para impulsarse y en su ausencia solo girarían sin avanzar.

Cómo se produce la fuerza de fricción

La fricción estática se diferencia de la cinética por ser mayor que esta, ya que un cuerpo en reposo al recibir una fuerza de aplicación que va en ascenso desde un valor cero hasta un determinado valor, permanece en reposo solo hasta que la fuerza aplicada supera el valor máximo de la fricción estática. En ese momento, el cuerpo comienza a moverse y la fricción se denomina cinética.

Cuando el cuerpo está en movimiento, es posible reducir un poco la fuerza de aplicación y el movimiento se mantiene. Esto se debe a que vencida la fricción estática, las uniones microscópicas que mantenían soldadas las superficies en contacto se rompen.



Incremento de la fuerza de fricción

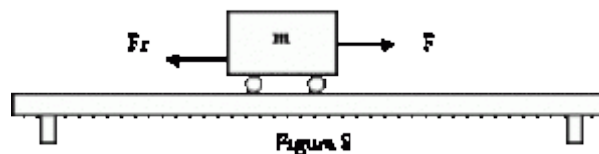
En el diseño de llantas para vehículos, es necesario que la superficie de contacto con la calzada (superficie de la carretera) sea rugosa para que el vehículo no resbale y pueda detenerse casi instantáneamente al frenar. Sucede lo mismo que con la suela de los zapatos, en muchos casos debe llevar mucho grabados para evitar resbalones, sobre todo cuando el piso es bastante liso.

Reducción de la fuerza de fricción

En el caso de patinaje, se hace necesario que la superficie del suelo esté hecha de hielo y el pie descansa sobre patines lisos de metal y delgados, lo que reduce la fricción y hace que el desplazamiento sea mayor.

1.-Un carrito con su carga tiene una masa de 25 Kg. Cuando sobre él actúa, horizontalmente, una fuerza de 80 N adquiere una aceleración de $0,5 \frac{m}{s^2}$. ¿Qué magnitud tiene la fuerza de rozamiento F_r que se opone al avance del carrito?

SOLUCIÓN



La fuerza F , que actúa hacia la derecha, es contrarrestada por la fuerza de roce F_r , que actúa hacia la izquierda. De esta forma se obtiene una resultante $F - F_r$ que es la fuerza que produce el movimiento.

Si aplicamos la segunda ley de Newton se tiene:

$$F - F_r = m \cdot a$$

Sustituyendo F , m y a por sus valores nos queda

$$80 \text{ N} - F_r = 25 \text{ Kg} \cdot (0,5 \frac{m}{s^2})$$

$$80 \text{ N} - F_r = 12,5 \text{ N}$$

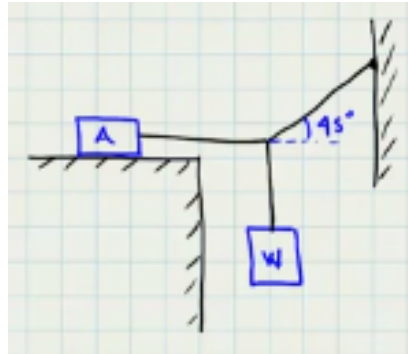
Si despejamos F_r nos queda:

$$F_r = 80 \text{ N} - 12,5 \text{ N}$$

$$F_r = 67,5 \text{ N}$$

1. El bloque A de la figura pesa 60N. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie es de 0.36. Calcular:

➤ **La fuerza de fricción ejercida en el bloque A**



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_a - fr = 0$$

$$N - W_a = 0$$

Resolución del ejercicio

Ecuación 1

$$fr = \mu_s \cdot N$$

Reemplazo el peso del bloque A

$$N - W_a = 0$$

$$N = 60N$$

Reemplazo el valor de μ_s y el valor de N

$$fr = (0.36)(60N)$$

$$fr = 21.6N$$

2. Un cuerpo de 2kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30m/s, se observa que el cuerpo se detiene después de viajar a una distancia de 40m, determine la fuerza de rozamiento que el medio ejerce sobre el cuerpo.

Utilizaremos la cinemática para determinar la aceleración del cuerpo.

$$vf^2 = vo^2 + 2ah$$

$$a = (vf^2 - vo^2)/2h$$

$$a = \frac{0 - 30^2}{2 \times 40}$$

$$a = -11.25m/s^2$$

Aplicando la segunda ley de Newton para determinar el valor de fr.

$$\Sigma fy = m \cdot a$$

$$-fr - mg = m \cdot a$$

$$fr = -m(g + a)$$

$$fr = -2 \left(\frac{9.8m}{s^2} - \frac{11.25m}{s^2} \right)$$

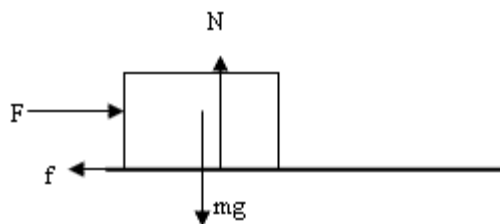
$$fr = 2.9N$$

3. Una caja de 10 kg descansa sobre un piso horizontal. El coeficiente de fricción estático es $\mu_s = 0,4$, y el de fricción cinética es $\mu_K = 0,3$. Calcule la fuerza de fricción f que obra sobre la caja si se ejerce una fuerza horizontal externa F cuya magnitud es

a) 10 N

b) 38N

c) 40 N



$$\text{Como } N - mg = 0 \rightarrow N = mg = 98 N$$

$$\mu_s N = (0.4) (98N) = 39.2 N$$

Como la fuerza aplicada es $F = 10 \text{ N}$, la caja no se moverá y $f = F = 10 \text{ N}$.

Todavía la fuerza de 38 N no supera los 39.2 N , la fuerza de fricción habrá aumentado a:

$$38 \text{ N}, f = 38 \text{ N}.$$

Una fuerza de 40 N hará que la caja comience a moverse, porque es mayor que la fuerza máxima de fricción estática, 39.2 N .

En adelante se tiene fricción cinética, en lugar de fricción estática y la magnitud de la fricción cinética es:

$$\mu_K N = 0.3 (98 \text{ N}) = 29 \text{ N}$$

Si la fuerza aplicada continúa siendo $F = 40 \text{ N}$, la aceleración que experimentará la caja será:

$$(40 \text{ N} - 29 \text{ N}) / 10 \text{ kg} = 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4. Tiramos de un bloque de masa 20 kg apoyado en una superficie horizontal con una fuerza paralela al suelo de 50 N . Sabiendo que su coeficiente de rozamiento estático es $0,5$, calcula:

- **La fuerza de rozamiento**
- **Los valores de la fuerza de rozamiento máximo y mínimo cuando arrastramos con fuerzas comprendidas entre 30 N y 120 N**
- **Recrea, en la escena que figura en la ayuda, las condiciones del problema y a partir de ellas aumenta la fuerza de tracción hasta que el cuerpo se mueva. ¿Qué valor puedes deducir de los datos de la escena para el coeficiente dinámico de rozamiento (μ')?**

$$\text{Valor de } g = \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right), 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{peso} = m * g = 20 * 9,8 = (\text{aprox. } 20 \cdot 10) = 200 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \text{peso} \\
 N &= P = 200 \text{ N} \\
 Fr_{\text{máx.}} &= m \cdot N \\
 Fr_{\text{máx.}} &= 0,5 \cdot 200 = 100 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Como la fuerza de tracción no supera los 100 N no llega a producirse la fuerza de rozamiento máxima. Por lo tanto, la Fr es igual a la de tracción y sólo alcanza los 50 N.

--La $F_{\text{roz.}}$ Máxima será de 100 N y la mínima de 30N, que se producirá cuando la fuerza de tracción sea mínima (30 N) y la máxima alcance los 100 N.

Suponer que cuando tiramos con una fuerza menor de 100 N aparece la Fr máxima (de 100 N), sería como suponer que, al tirar nosotros hacia la derecha, el cuerpo acelera hacia la izquierda por aparecer una fuerza de 100 N que se opone al movimiento. Así, cuando tiramos con 80 N, el cuerpo saldría hacia atrás arrastrado por una 20 N (y esto no sucederá jamás).

---Tal como vemos en la escena al sobrepasar la fuerza de tracción los 100 N la fuerza de rozamiento pasa a valer 80 N (la fuerza de rozamiento se hace un poco menor que la máxima).

Por lo tanto y dado que la normal no varía:

$$Fr_{\text{máx.}} = m \cdot N$$

$$80 = m' \cdot 200$$

$$m' = 0,4$$

El coeficiente de rozamiento dinámico será 0,4.

5. Un automóvil que se desplaza por una carretera con movimiento uniforme de $72 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$, toma una curva de radio 200 m. calcular:

El coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la pista para la que no deslice

$$72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

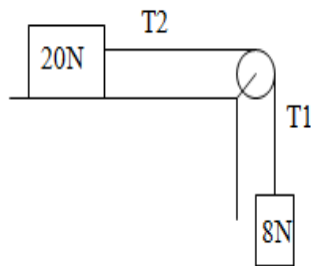
Para que el cuerpo no deslice, la fuerza de rozamiento deberá igualarse con la centrífuga:

$$F_r = m \cdot g \cdot \mu = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$g * \mu = \frac{v^2}{r}$$

$$\mu = \frac{v^2}{r * g} = 0,204$$

6. Jalado por un bloque de 8 N como se muestra en la Fig., un bloque de 20N se desliza hacia la derecha con velocidad constante. Encuentra el μ_c entre el bloque y la mesa. Supóngase que la fricción en la polea es despreciable. Sol 0,40.



$$\mu_c = \frac{8N}{20N}$$

$$\mu_c = 0,40$$

7. Un auto de carreras acelera de manera uniforme de 0 a 80 millas/hora en 8 seg. La fuerza externa que lo acelera es la fuerza de fricción entre los neumáticos y el camino. Si los neumáticos no derrapan, determine el coeficiente de fricción mínima entre los neumáticos y el camino.

$$\sum F_x = m * a$$

$$FR = m * a \text{ (Ecuación 1)}$$

$$\text{Pero: } FR = \mu N$$

$$FR = \mu m g$$

Reemplazando en la ecuación 1

$$FR = m * a \text{ (Ecuación 1)}$$

$$\mu m g = m * a$$

$$\mu g = a$$

$$a = 9,8\mu$$

$$VF = V0 + a * t \text{ pero: } V0 = 0$$

$$VF = a * t \text{ pero: } a = 9,8\mu$$

$$VF = 80 \frac{\text{milla}}{\text{hora}} * \frac{1609 \text{ metros}}{1 \text{ milla}} * \frac{1h}{3600 s} = 35,555 \frac{m}{s}$$

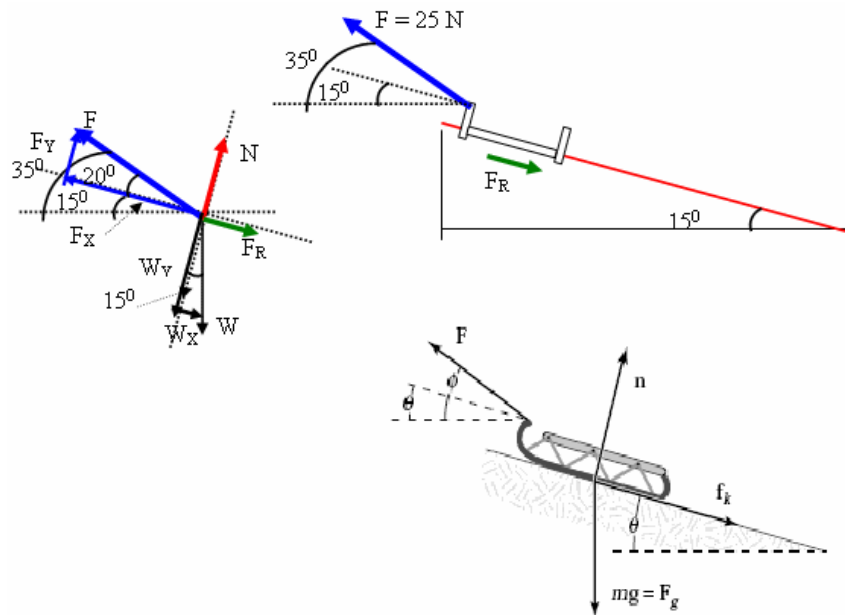
$$35,555 = 9,8 \mu * 8$$

$$35,555 = 78,4 \mu$$

$$\mu = \frac{35,555}{78,4} = 0,45$$

9.-Un muchacho arrastra un trineo de 60 Newton con rapidez constante al subir por una colina de 15° Con una cuerda unida al trineo lo jala con una fuerza de 25 Newton. Si la cuerda tiene una inclinación de 35° respecto de la horizontal.

➤ ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el trineo y la nieve?



$$\sum F_X = 0 \text{ (No existe aceleración por que se desplaza a velocidad constante)}$$

$$F_X - F_R - W_X = 0 \text{ (Ecuación 1)}$$

$$\text{Pero: } F_X = F \cos 20$$

$$F_X = 25 \cos 20$$

$$F_X = 23,492 \text{ Newton}$$

$$W_X = W \sin 15^\circ$$

$$W_X = 60 \sin 15^\circ$$

$$W_X = 15,529 \text{ Newton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N - WY + FY = 0$$

$$N = WY - FY \text{ (Ecuación 2)}$$

$$\text{Pero: } WY = W \cos 15$$

$$WY = 60 \cos 15$$

$$WY = 57,955 \text{ Newton}$$

$$FY = F \sin 20^\circ$$

$$FY = 25 \sin 20^\circ$$

$$FY = 8,55 \text{ Newton}$$

$$N = WY - FY \text{ (Ecuación 2)}$$

$$N = 57,955 - 8,55$$

$$N = 49,405 \text{ Newton}$$

$$FR = \mu N$$

$$FR = \mu 49,405$$

Reemplazando en la ecuación 1

$$FX - FR - WX = 0 \text{ (Ecuación 1)}$$

$$23,492 - \mu 49,405 - 15,529 = 0$$

$$\mu 49,405 = 23,492 - 15,529$$

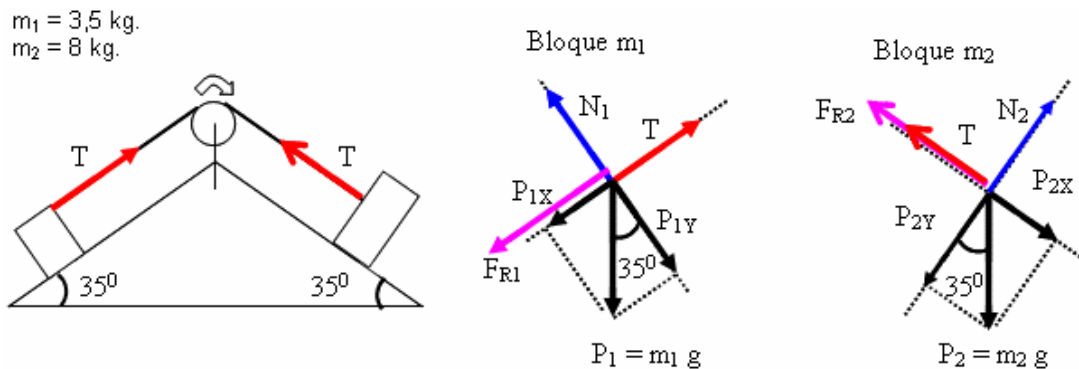
$$\mu 49,405 = 7,963$$

$$\mu = \frac{7,963}{49,405} = 0,161$$

5.-El sistema mostrado, tiene una aceleración de magnitud igual a $1,5 \text{ m/seg}^2$. Suponga que el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente es el mismo en ambas pendientes.

Encuentre:

➤ **El coeficiente de fricción cinético.**



HAY ROZAMIENTO

FR_1, FR_2 que se oponen a que el sistema se desplace hacia la derecha.

Bloque m_1

$$S F_X = T - P_{1X} - FR_1 = m_1 * a$$

$$\text{Pero: } P_{1X} = P_1 \sin 35 = m_1 g \sin 35$$

$$P_{1X} = 3,5 * 10 * \sin 35 = 20 \text{ Newton}$$

$$P_{1X} = 20 \text{ Newton}$$

$$S F_Y = P_{1Y} - N_1 = 0$$

$$P_{1Y} = N_1 \text{ Pero: } P_1 = m_1 g$$

$$P_{1Y} = P_1 \cos 35 = m_1 g \cos 35$$

$$P_{1Y} = 3,5 * 10 * \cos 35 = 28,67 \text{ Newton}$$

$$P_{1Y} = 28,67 \text{ Newton}$$

$$P_{1Y} = N_1 = 28,67 \text{ Newton}$$

$$\text{Pero: } FR_1 = \mu \sin N_1 \quad FR_1 = \mu \sin * (28,67)$$

$$T - m_1 g \sin 35 - 28,67 \text{ m cin} = m_1 a \text{ (Ecuación 1)}$$

Bloque m2

$$S F_X = P_{2X} - T - F_{R2} = m_2 * a$$

$$\text{Pero: } P_{2X} = P_2 \sin 35 = m_2 g \sin 35$$

$$P_{2X} = 8 * 10 * \sin 35 = 45,88 \text{ Newton}$$

$$S F_Y = P_{2Y} - N_2 = 0$$

$$P_{2Y} = N_2 \text{ Pero: } P_2 = m_2 g$$

$$P_{2Y} = P_2 \cos 35 = m_2 g \cos 35$$

$$P_{2Y} = 8 * 10 * \cos 35 = 65,53 \text{ Newton}$$

$$P_{2Y} = 65,53 \text{ Newton}$$

$$P_{2Y} = N_2 = 65,53 \text{ Newton}$$

$$\text{Pero: } F_{R2} = \mu \text{ cin } N_2 \quad F_{R2} = \mu \text{ cin} * (65,53)$$

$$m_2 g \sin 35 - T - F_{R2} = m_2 a$$

$$m_2 g \sin 35 - T - 65,53 \mu \text{ cin} = m_2 a \text{ (Ecuación 2)}$$

Resolviendo las ecuaciones, encontramos la aceleración del sistema.

$$T - m_1 g \sin 35 - 28,67 \mu \text{ cin} = m_1 a \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$m_2 g \sin 35 - T - 65,53 \mu \text{ cin} = m_2 a \quad \text{(Ecuación 2)}$$

$$- m_1 g \sin 35 - 28,67 \mu \text{ cin} + m_2 g \sin 35 - 65,53 \mu \text{ cin} = m_1 a + m_2 a$$

$$a (m_1 + m_2) = - m_1 g \sin 35 + m_2 g \sin 35 - 28,67 \mu \text{ cin} - 65,53 \mu \text{ cin}$$

$$a (m_1 + m_2) = - 20 + 45,88 - 28,67 \mu \text{ cin} - 65,53 \mu \text{ cin}$$

$$1,5 (3,5 + 8) = 25,88 - 94,2 \mu \text{ cin}$$

$$1,5 (11,5) = 25,88 - 94,2 \mu \text{ cin}$$

$$17,25 = 25,88 - 94,2 \mu \text{ cin}$$

$$94,2 \mu \text{ cin} = 25,88 - 17,25$$

$$94,2 \mu \text{ cin} = 8,63$$

$$\mu \text{ cin} = \frac{8,63}{94,2} = 9,161 * 10^{-2}$$

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL. 60607

1980

APÉNDICE

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
Magnitud de carga del electrón	e	$1.60217653(14) \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante gravitacional	G	$6.6742(10) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Constante de Planck	h	$6.6260693(11) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k	$1.3806505(24) \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Número de Avogadro	N_A	$6.0221415(10) \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}$
Constante de los gases	R	$8.314472(15) \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
Masa del electrón	m_e	$9.1093826(16) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del protón	m_p	$1.67262171(29) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del neutrón	m_n	$1.67492728(29) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ $1/4\pi\epsilon_0$	$8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ $8.987551787 \dots \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

Otras constante útiles

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (15° caloría)
Presión atmosférica estándar	1 atm	$1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$
Cero absoluto	0 K	$-273.15 \text{ }^\circ\text{C}$
Electrón volt	1 eV	$1.60217653(14) \times 10^{-19} \text{ J}$
Unidad de masa atómica	1 u	$1.66053886(28) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	$0.510998918(44) \text{ MeV}$
Volumen del gas ideal (0 °C y 1 atm)		$22.413996(39) \text{ litros/mol}$
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	9.80665 m/s^2

*Fuente: National Institute of Standards and Technology (<http://physics.nist.gov/cuu>). Los números entre paréntesis indican incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021 . Los valores que no indican incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos†

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^6	3.84×10^8	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^6	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^6	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^6	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^7	7.78×10^{11}	11.86 y
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^7	1.43×10^{12}	29.45 y
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^7	2.87×10^{12}	84.02 y
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^7	4.50×10^{12}	164.8 y
Plutón‡	1.31×10^{22}	1.15×10^6	5.91×10^{12}	247.9 y

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} = 10^6 \mu\text{m} = 10^9 \text{ nm}$
 $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 0.6214 \text{ mi}$
 $1 \text{ m} = 3.281 \text{ ft} = 39.37 \text{ in}$
 $1 \text{ cm} = 0.3937 \text{ in}$
 $1 \text{ in.} = 2.540 \text{ cm}$
 $1 \text{ ft} = 30.48 \text{ cm}$
 $1 \text{ yd} = 91.44 \text{ cm}$
 $1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft} = 1.609 \text{ km}$
 $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-1} \text{ nm}$
 $1 \text{ milla náutica} = 6080 \text{ ft}$
 $1 \text{ año luz} = 9.461 \times 10^{15} \text{ m}$

Área

$1 \text{ cm}^2 = 0.155 \text{ in}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10.76 \text{ ft}^2$
 $1 \text{ in}^2 = 6.452 \text{ cm}^2$
 $1 \text{ ft} = 144 \text{ in}^2 = 0.0929 \text{ m}^2$

Volumen

$1 \text{ litro} = 1000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0.03531 \text{ ft}^3 = 61.02 \text{ in}^3$
 $1 \text{ ft}^3 = 0.02832 \text{ m}^3 = 28.32 \text{ litros} = 7.477 \text{ galones}$
 $1 \text{ galón} = 3.788 \text{ litros}$

Tiempo

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
 $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$
 $1 \text{ d} = 86,400 \text{ s}$
 $1 \text{ año} = 365.24 \text{ d} = 3.156 \times 10^7 \text{ s}$

Ángulo

$1 \text{ rad} = 57.30^\circ = 180^\circ/\pi$
 $1^\circ = 0.01745 \text{ rad} = \pi/180 \text{ rad}$
 $1 \text{ revolución} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$
 $1 \text{ rev/min (rpm)} = 0.1047 \text{ rad/s}$

Rapidez

$1 \text{ m/s} = 3.281 \text{ ft/s}$
 $1 \text{ ft/s} = 0.3048 \text{ m/s}$
 $1 \text{ mi/min} = 60 \text{ mi/h} = 88 \text{ ft/s}$
 $1 \text{ km/h} = 0.2778 \text{ m/s} = 0.6214 \text{ mi/h}$
 $1 \text{ mi/h} = 1.466 \text{ ft/s} = 0.4470 \text{ m/s} = 1.609 \text{ km/h}$
 $1 \text{ furlong/14 días} = 1.662 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

Aceleración

$1 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ cm/s}^2 = 3.281 \text{ ft/s}^2$
 $1 \text{ cm/s}^2 = 0.01 \text{ m/s}^2 = 0.03281 \text{ ft/s}^2$
 $1 \text{ ft/s}^2 = 0.3048 \text{ m/s}^2 = 30.48 \text{ cm/s}^2$
 $1 \text{ mi/h} \cdot \text{s} = 1.467 \text{ ft/s}^2$

Masa

$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 0.0685 \text{ slug}$
 $1 \text{ g} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ slug}$
 $1 \text{ slug} = 14.59 \text{ kg}$
 $1 \text{ u} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 $1 \text{ kg tiene un peso de } 2.205 \text{ lb cuando } g = 9.80 \text{ m/s}^2$

Fuerza

$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0.2248 \text{ lb}$
 $1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} = 4.448 \times 10^5 \text{ dinas}$

Presión

$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1.450 \times 10^{-4} \text{ lb/in}^2 = 0.209 \text{ lb/ft}^2$
 $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
 $1 \text{ lb/in}^2 = 6895 \text{ Pa}$
 $1 \text{ lb/ft}^2 = 47.88 \text{ Pa}$
 $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar}$
 $\quad = 14.7 \text{ lb/in}^2 = 2117 \text{ lb/ft}^2$
 $1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ torr} = 133.3 \text{ Pa}$

Energía

$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergs} = 0.239 \text{ cal}$
 $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J (con base en caloría de } 15^\circ)$
 $1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1.356 \text{ J}$
 $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 252 \text{ cal} = 778 \text{ ft} \cdot \text{lb}$
 $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
 $1 \text{ kWh} = 3.600 \times 10^6 \text{ J}$

Equivalencia masa-energía

$1 \text{ kg} \leftrightarrow 8.988 \times 10^{16} \text{ J}$
 $1 \text{ u} \leftrightarrow 931.5 \text{ MeV}$
 $1 \text{ eV} \leftrightarrow 1.074 \times 10^{-9} \text{ u}$

Potencia

$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$
 $1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$
 $1 \text{ Btu/h} = 0.293 \text{ W}$

Múltiplos y prefijos de unidades métricas*

Múltiplo	Prefijo (y abreviatura)
10^{24}	yota- (Y)
10^{21}	zeta- (Z)
10^{18}	exa- (E)
10^{15}	peta- (P)
10^{12}	tera- (T)
10^9	giga- (G)
10^6	mega- (M)
10^3	kilo- (k)
10^2	hecto- (h)
10	deca- (da)
10^{-1}	deci- (d)
10^{-2}	centi- (c)
10^{-3}	mili- (m)
10^{-6}	micro- (μ)
10^{-9}	nano- (n)
10^{-12}	pico- (p)
10^{-15}	femto- (f)
10^{-18}	ato- (a)
10^{-21}	zepto- (z)
10^{-24}	yocto- (y)

*Por ejemplo, 1 gramo (g) multiplicado por 1000 (10^3) es 1 kilogramo (kg); 1 gramo multiplicado por 1/1000 (10^{-3}) es 1 miligramo (mg).

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Relaciones trigonométricas

Definiciones de funciones trigonométricas

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

θ° (rad)	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0° (0)	0	1	0
30° ($\pi/6$)	0.500	$\sqrt{3}/2 \approx 0.866$	$\sqrt{3}/3 \approx 0.577$
45° ($\pi/4$)	$\sqrt{2}/2 \approx 0.707$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.707$	1.00
60° ($\pi/3$)	$\sqrt{3}/2 \approx 0.866$	0.500	$\sqrt{3} \approx 1.73$
90° ($\pi/2$)	1	0	∞

Unidades base del SI

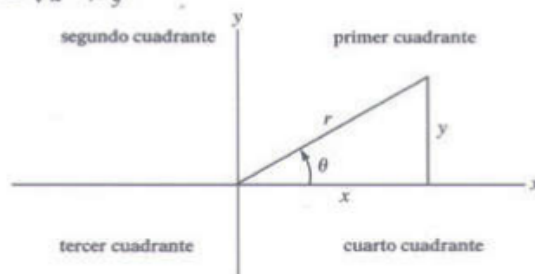
Cantidad física	Nombre de la unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Algunas unidades derivadas del SI

Cantidad física	Nombre de la unidad	Símbolo	Unidad del SI
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-2}
Energía	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Presión	pascal	Pa	$kg/(m \cdot s^2)$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$
Carga eléctrica	coulomb	C	A·s
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^2)$
Campo magnético	tesla	T	$kg/(A \cdot s^2)$

Teorema de Pitágoras (triángulo rectángulo)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

(para cualquier triángulo plano con ángulos A, B y C, y lados opuestos a, b y c)

Datos físicos*

Cantidad	Símbolo	Valor aproximado
Constante de gravitación universal	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Aceleración de la gravedad (valor generalmente aceptado en la superficie terrestre)	g	$9.80 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$
Rapidez de la luz	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m/s} = 3.00 \times 10^{10} \text{ cm/s} = 1.86 \times 10^5 \text{ mi/s}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de los gases	$R = N_A k_B$	$8.31 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} = 1.99 \text{ cal/(mol}\cdot\text{K)}$
Constante de la ley de Coulomb	$k = 1/4\pi\epsilon_0$	$9.00 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
Carga del electrón	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} = 1.26 \times 10^{-6} \text{ T}\cdot\text{m/A}$
Unidad de masa atómica	u	$1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \leftrightarrow 931 \text{ MeV}$
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 5.49 \times 10^{-4} u \leftrightarrow 0.511 \text{ MeV}$
Masa del protón	m_p	$1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.007276 u \leftrightarrow 938.27 \text{ MeV}$
Masa del neutrón	m_n	$1.67493 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.008665 u \leftrightarrow 939.57 \text{ MeV}$

Datos del Sistema Solar*

Radio ecuatorial de la Tierra	$6.378 \times 10^3 \text{ km} = 3963 \text{ mi}$
Radio polar de la Tierra	$6.357 \times 10^3 \text{ km} = 3950 \text{ mi}$
	Promedio: $6.4 \times 10^3 \text{ km}$ (para cálculos generales)
Masa de la Tierra	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Diámetro de la Luna	$3500 \text{ km} \approx 2160 \text{ mi}$
Masa de la Luna	$7.4 \times 10^{22} \text{ kg} \approx \frac{1}{81}$ de la masa de la Tierra
Distancia promedio entre la Luna y la Tierra	$3.8 \times 10^5 \text{ km} = 2.4 \times 10^5 \text{ mi}$
Diámetro del Sol	$1.4 \times 10^6 \text{ km} \approx 864\,000 \text{ mi}$
Masa del Sol	$2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$
Distancia promedio entre la Tierra y el Sol	$1.5 \times 10^8 \text{ km} = 93 \times 10^6 \text{ mi}$

*Véase el apéndice III para datos adicionales sobre los planetas.

Símbolos matemáticos

$=$	es igual a
$\neq$	no es igual a
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\sim$	aproximadamente
$\propto$	es proporcional a
$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$\gg$	es mucho mayor que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que
$\ll$	es mucho menor que
$\pm$	más o menos
$\mp$	menos o más
$\bar{x}$	valor promedio de x
Δx	cambio en x
$ x $	valor absoluto de x
Σ	suma de
∞	infinito

El alfabeto griego

Alfa	Λ	α	Nu	$\Nu$	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Ómicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rho	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Úpsilon	Y	υ
Iota	I	ι	Phi	Φ	ϕ
Kappa	K	κ	Chi	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Omega	Ω	ω

Factores de conversión

Masa	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$ $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1 \text{ tonelada métrica} = 1000 \text{ kg}$	Fuerza	$1 \text{ N} = 0.225 \text{ lb}$ $1 \text{ lb} = 4.45 \text{ N}$ Peso equivalente de una masa de 1 kg en la superficie terrestre = $2.2 \text{ lb} = 9.8 \text{ N}$
Longitud	$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} = 0.394 \text{ pulg}$ $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km} = 3.28 \text{ ft} = 39.4 \text{ pulg}$ $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 0.621 \text{ mi}$ $1 \text{ pulg} = 2.54 \text{ cm} = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m}$ $1 \text{ ft} = 0.305 \text{ m} = 30.5 \text{ cm}$ $1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft} = 1609 \text{ m} = 1.609 \text{ km}$	Presión	$1 \text{ Pa (N/m}^2\text{)} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ lb/pulg}^2$ $= 7.5 \times 10^{-3} \text{ torr (mm Hg)}$ $1 \text{ torr (mm Hg)} = 133 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$ $= 0.02 \text{ lb/pulg}^2$ $1 \text{ atm} = 14.7 \text{ lb/pulg}^2 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ $= 30 \text{ pulg Hg} = 76 \text{ cm Hg}$ $1 \text{ lb/pulg}^2 = 6.90 \times 10^3 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ $1 \text{ milibar} = 10^2 \text{ Pa}$
Área	$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 = 0.1550 \text{ pulg}^2$ $= 1.08 \times 10^{-3} \text{ ft}^2$ $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10.76 \text{ ft}^2 = 1550 \text{ pulg}^2$ $1 \text{ pulg}^2 = 6.94 \times 10^{-3} \text{ ft}^2 = 6.45 \text{ cm}^2$ $= 6.45 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ $1 \text{ ft}^2 = 144 \text{ pulg}^2 = 9.29 \times 10^{-2} \text{ m}^2 = 929 \text{ cm}^2$	Energía	$1 \text{ J} = 0.738 \text{ ft}\cdot\text{lb} = 0.239 \text{ cal}$ $= 9.48 \times 10^{-4} \text{ Btu} = 6.24 \times 10^{18} \text{ eV}$ $1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J} = 3.968 \text{ Btu}$ $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 778 \text{ ft}\cdot\text{lb} = 0.252 \text{ kcal}$ $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} = 3.97 \times 10^{-3} \text{ Btu}$ $= 3.09 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ $1 \text{ ft}\cdot\text{lb} = 1.36 \text{ J} = 1.29 \times 10^{-3} \text{ Btu}$ $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ $1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$
Volumen	$1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3 = 3.53 \times 10^{-5} \text{ ft}^3$ $= 6.10 \times 10^{-2} \text{ pulg}^3$ $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ L} = 35.3 \text{ ft}^3$ $= 6.10 \times 10^4 \text{ pulg}^3 = 264 \text{ gal}$ $1 \text{ litro} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 1.056 \text{ ct}$ $= 0.264 \text{ gal} = 0.0353 \text{ ft}^3$ $1 \text{ pulg}^3 = 5.79 \times 10^{-4} \text{ ft}^3 = 16.4 \text{ cm}^3$ $= 1.64 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ $1 \text{ ft}^3 = 1728 \text{ pulg}^3 = 7.48 \text{ gal} = 0.0283 \text{ m}^3$ $= 28.3 \text{ L}$ $1 \text{ ct} = 2 \text{ pt} = 946 \text{ cm}^3 = 0.946 \text{ L}$ $1 \text{ gal} = 4 \text{ ct} = 231 \text{ pulg}^3 = 0.134 \text{ ft}^3 = 3.785 \text{ L}$	Potencia	$1 \text{ W} = 0.738 \text{ ft}\cdot\text{lb/s} = 1.34 \times 10^{-3} \text{ hp}$ $= 3.41 \text{ Btu/h}$ $1 \text{ ft}\cdot\text{lb/s} = 1.36 \text{ W} = 1.82 \times 10^{-3} \text{ hp}$ $1 \text{ hp} = 550 \text{ ft}\cdot\text{lb/s} = 745.7 \text{ W}$ $= 2545 \text{ Btu/h}$
Tiempo	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$ $1 \text{ día} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$ $1 \text{ año} = 365 \text{ días} = 8.76 \times 10^3 \text{ h}$ $= 5.26 \times 10^5 \text{ min} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$	Equivalentes masa-energía	$1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \leftrightarrow 931.5 \text{ MeV}$ $1 \text{ masa de electrón} = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ $= 5.49 \times 10^{-4} \text{ u} \leftrightarrow 0.511 \text{ MeV}$ $1 \text{ masa de protón} = 1.672 62 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 1.007 276 \text{ u} \leftrightarrow 938.27 \text{ MeV}$ $1 \text{ masa de neutrón} = 1.674 93 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 1.008 665 \text{ u} \leftrightarrow 939.57 \text{ MeV}$
Ángulo	$1 \text{ rad} = 57.3^\circ$ $1^\circ = 0.0175 \text{ rad} \quad 60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$ $15^\circ = \pi/12 \text{ rad} \quad 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$ $30^\circ = \pi/6 \text{ rad} \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}$ $45^\circ = \pi/4 \text{ rad} \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ $1 \text{ rev/min} = (\pi/30) \text{ rad/s} = 0.1047 \text{ rad/s}$	Temperatura	$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$ $T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32)$ $T_K = T_C + 273$
Rapidez	$1 \text{ m/s} = 3.60 \text{ km/h} = 3.28 \text{ ft/s}$ $= 2.24 \text{ mi/h}$ $1 \text{ km/h} = 0.278 \text{ m/s} = 0.621 \text{ mi/h}$ $= 0.911 \text{ ft/s}$ $1 \text{ ft/s} = 0.682 \text{ mi/h} = 0.305 \text{ m/s}$ $= 1.10 \text{ km/h}$ $1 \text{ mi/h} = 1.467 \text{ ft/s} = 1.609 \text{ km/h}$ $= 0.447 \text{ m/s}$ $60 \text{ mi/h} = 88 \text{ ft/s}$	Fuerza cgs	$1 \text{ dina} = 10^{-5} \text{ N} = 2.25 \times 10^{-6} \text{ lb}$
		Energía cgs	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J} = 7.38 \times 10^{-6} \text{ ft}\cdot\text{lb}$

NÚMEROS EXPRESADOS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

$1\,000\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	$= 10^6$	mega
$100\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	$= 10^5$	
$10\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$	$= 10^4$	
$1000 = 10 \times 10 \times 10$	$= 10^3$	kilo
$100 = 10 \times 10$	$= 10^2$	
$10 = 10$	$= 10^1$	
$1 = 1$	$= 10^0$	
$0.1 = 1/10$	$= 10^{-1}$	
$0.01 = 1/100 = 1/10^2$	$= 10^{-2}$	centi
$0.001 = 1/1000 = 1/10^3$	$= 10^{-3}$	milli
$0.000\,1 = 1/10\,000 = 1/10^4$	$= 10^{-4}$	
$0.0\,000\,1 = 1/100\,000 = 1/10^5$	$= 10^{-5}$	
$0.00\,000\,1 = 1/1\,000\,000 = 1/10^6$	$= 10^{-6}$	micro

FACTORES DE CONVERSIÓN

Longitud y volumen

1 pulgada = 2.54 cm (exacto)
1 pie = 0.3048 m (exacto)
1 m = 39.37 in.
1 mi = 1.6093440 km
1 litro = $10^3\text{ cm}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3$

Tiempo

1 año = $365\frac{1}{4}$ días = 3.1558×10^7 s
1 d = 86,400 s
1 h = 3600 s

Masa

1 kg = 1000 g
1 kg pesa 2.205 lb
1 uma = 1.6605×10^{-27} kg

Presión

1 Pa = 1 N/m ²
1 atm = 1.01325×10^5 Pa
1 lb/in. ² = 6895

Energía y potencia

1 cal = 4.184 J
1 kWh = 3.60×10^6 J
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 u = 931.5 MeV
1 hp = 746 W

Velocidad

1 m/s = 3.60 km/h = 2.24 mi/h
1 km/h = 0.621 mi/h

Fuerza

1 lb = 4.448 N



FECHAS IMPORTANTES EN LA HISTORIA DE LA FISICA

APROX. 320 A. C.	Aristóteles describe el movimiento en términos de tendencias naturales.
APROX. 250 A. C.	Arquímedes descubre el principio de flotabilidad.
APROX. 150 D. C.	Tolomeo refina el sistema geocéntrico.
1543	Copérnico publica su sistema heliocéntrico.
1575–1596	Brahe mide posiciones precisas de los planetas en el cielo.
1609	Galileo usa por primera vez un telescopio como herramienta astronómica.
1609/1619	Kepler publica tres leyes del movimiento planetario.
1634	Galileo avanza en la comprensión del movimiento acelerado.
1661	Boyle relaciona la presión y el volumen de los gases a temperatura constante.
1676	Roemer demuestra que la luz tiene una rapidez finita.
1678	Huygens desarrolla una teoría ondulatoria de la luz.
1687	Newton presenta la teoría de la mecánica en <i>Principia</i> .
1738	Bernoulli explica el comportamiento de los gases en términos de movimientos moleculares.
1747	Franklin sugiere la conservación del “fuego” eléctrico (la carga).
1785	Coulomb determina con precisión la ley de la fuerza eléctrica.
1795	Cavendish mide la constante gravitacional G .
1798	Rumford dice que el calor es una forma de movimiento.
1800	Volta inventa la batería eléctrica.
1802	Young aplica la teoría ondulatoria para explicar la interferencia.
1811	Avogadro sugiere que a iguales temperatura y presión, todos los gases tienen la misma cantidad de moléculas por unidad de volumen.
1815–1820	Young y otros dan pruebas de la naturaleza ondulatoria de la luz.
1820	Oersted descubre el efecto magnético de una corriente eléctrica.
1820	Ampère establece la ley de fuerza entre conductores con corriente eléctrica.
1821	Fraunhofer inventa la rejilla de difracción.
1824	Carnot establece que el calor no se puede transformar totalmente en trabajo.
1831	Faraday y Henry descubren la inducción electromagnética.
1842–1843	Mayer y Joule sugieren una ley general de la conservación de la energía.
1846	Adams y Leverrier predicen la existencia del planeta Neptuno.
1865	Maxwell presenta la teoría electromagnética de la luz.
1869	Mendeleev organiza los elementos en una tabla periódica.
1877	Boltzmann relaciona la entropía con la probabilidad.
1885	Balmer establece la regularidad numérica en el espectro de hidrógeno.
1887	Michelson y Morley no pueden detectar el éter.
1888	Hertz genera y detecta las ondas de radio.
1895	Roentgen descubre los rayos X.

1896	Becquerel descubre la radiactividad.
1897	Thomson establece que los rayos catódicos son corpúsculos negativos (electrones).
1900	Planck presenta la idea cuántica.
1905	Einstein presenta el concepto de corpúsculo de luz (fotón).
1905	Einstein presenta la teoría de la relatividad especial.
1911	Rutherford descubre el átomo nuclear.
1913	Bohr formula una teoría cuántica del átomo de hidrógeno.
1915	Einstein presenta la teoría de la relatividad general.
1923	Compton confirma con experimentos la existencia del fotón.
1924	De Broglie presenta la teoría ondulatoria de la materia.
1925	Goudsmit y Uhlenbeck establecen el espín del electrón.
1925	Pauli forma el principio de exclusión.
1926	Schrödinger desarrolla la teoría ondulatoria de la mecánica cuántica.
1927	Davisson, Gremer y Thomson comprueban la naturaleza ondulatoria de los electrones.
1928	Dirac combina la relatividad y la mecánica cuántica en una teoría del electrón.
1929	Hubble descubre que el Universo se expande.
1932	Anderson descubre la materia en forma de positrón.
1932	Chadwick descubre el neutrón.
1932	Heisenberg describe la explicación de la estructura nuclear como neutrones y protones.
1934	Fermi propone una teoría de la aniquilación y la creación de la materia.
1938	Meitner y Frisch interpretan los resultados de Hahn y Strassmann como fisión nuclear.
1939	Bhor y Wheeler presentan una teoría detallada de la fisión nuclear.
1942	Fermi construye y opera el primer reactor nuclear.
1945	Oppenheimer y su equipo producen una explosión nuclear, en Los Álamos.
1947	Bardeen, Brattain y Shockley desarrollan el transistor.
1956	Reines y Cowan identifican al antineutrino.
1957	Feynman y Gell-Mann explican todas las interacciones débiles con un neutrino “izquierdo”.
1960	Maiman inventa el láser.
1965	Penzias y Wilson descubren la radiación de fondo en el Universo, residuo del Big Bang.
1967	Bell y Hewish descubren los pulsares, que son estrellas de neutrones.
1968	Wheeler bautiza los agujeros negros.
1969	Gell-Mann sugiere que los quarks son los bloques constructivos de los nucleones.
1977	Lederman y su equipo descubren el quark “bottom” (fondo).
1981	Binning y Rohrer inventan el microscopio de barrido y tunelización.
1987	Bednorz y Müller descubren la superconductividad de alta temperatura.
1995	Cornell y Wieman crean un “condensado Bose-Einstein” a 20 milésimas de millonésimas de un grado.
2000	Pogge y Martini demuestran la existencia de agujeros negros supermasivos en otras galaxias.



BIBLIOGRAFÍA

Física Universitaria de Sears – Zemansky, Volumen 1, Decimo Segunda Edición.

Física de Wilson – Buffa – Lou; Sexta Edición.

Física de Bautista – Sala;

Física General de Bueche – Hetch; Décima Edición

Física para Ingeniería y ciencias de Bauer – Westfall, Volumen 1.

Física para Ciencias e Ingeniería de Serway – Jewett, Volumen 1, Sexta Edición

Ingeniería Mecánica Estática de Hibbeler, Decimo Segunda Edición.

Ingeniería Mecánica Dinámica de Hibbeler, Decimo Segunda Edición.

Francisco Javier Duque Aldaz

Francisco Javier Duque Aldaz, Ingeniero Mecánico Graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, con una Maestría en Administración de Empresas graduado en Universidad Politécnica Salesiana, y cursando una maestría en Ciencia de la Matemática con mención en Matemática Numérica. Actualmente docente en la Universidad de Guayaquil en la Facultad de Ingeniería Química en la carrera de Ingeniería en Sistemas de Calidad y Emprendimiento, también he sido docente de la Universidad Estatal de Milagro en la facultad de Ciencias de la Ingeniería en la carrera de Ingeniería Industrial.

En el sector industrial he trabajado en empresas como: Fundación CENAIM ESPOL, Consorcio Santos CMI, Incubadora Nacional C.A, TESCA Ingeniería del Ecuador, etc.

Lic. Hugo Alfredo Pérez Benítez

Licenciado En Ciencias de La Educación Especialización Física y Matemática; Diplomado Superior en Modelos Educativos y en Diseño Curricular; Magister en Diseño y Evaluación de Modelos Educativos, Maestrante Universidad de la Habana en Ciencias Matemáticas, docente a nivel medio, director de área de matemática, vocal principal de consejo directivo y del consejo ejecutivo, ex Rector de la Unidad Educativa Moderna Sergio Pérez Valdez , Docente ocasional de la Universidad Santa María y de la Escuela Superior de la Marina Mercante Nacional, Docente Titular Auxiliar de la Universidad de Guayaquil, como coordinador curricular de la Ingeniería en Sistemas de Calidad y Emprendimiento rediseño la carrera y diseño la oferta académica de la Ingeniería en Producción y Operaciones, Coordinador de Formación de la Facultad de Ingeniería Química.

Geovanny Javier Morocho Choca. Ing. Ind.

Morocho Geovanny docente a tiempo completo en la Universidad Estatal de Milagro en la Facultad de Ciencias de la Ingeniería Industrial, profesor de las asignaturas de física, estática y dinámica, colaborador en Diseño y Rediseño de Carreras para ingeniería, profesor de enseñanza secundaria. En tiempo libre dedico a la creación y simulación de diseños mecánicos en 3 dimensiones aplicando ingeniería utilizando software como autocad, soliwokrs, catia, entre otros

Ingeniero Industrial, auditor riesgos del trabajo, asesor de mantenimiento mecánico industrial en empresas públicas y privadas, colaborador en planificación, control y ejecución de sistemas de TPM en flota de vehículos livianos y pesados en la ciudad de milagro

ISBN: 978-9942-760-39-5



9 789942 760395