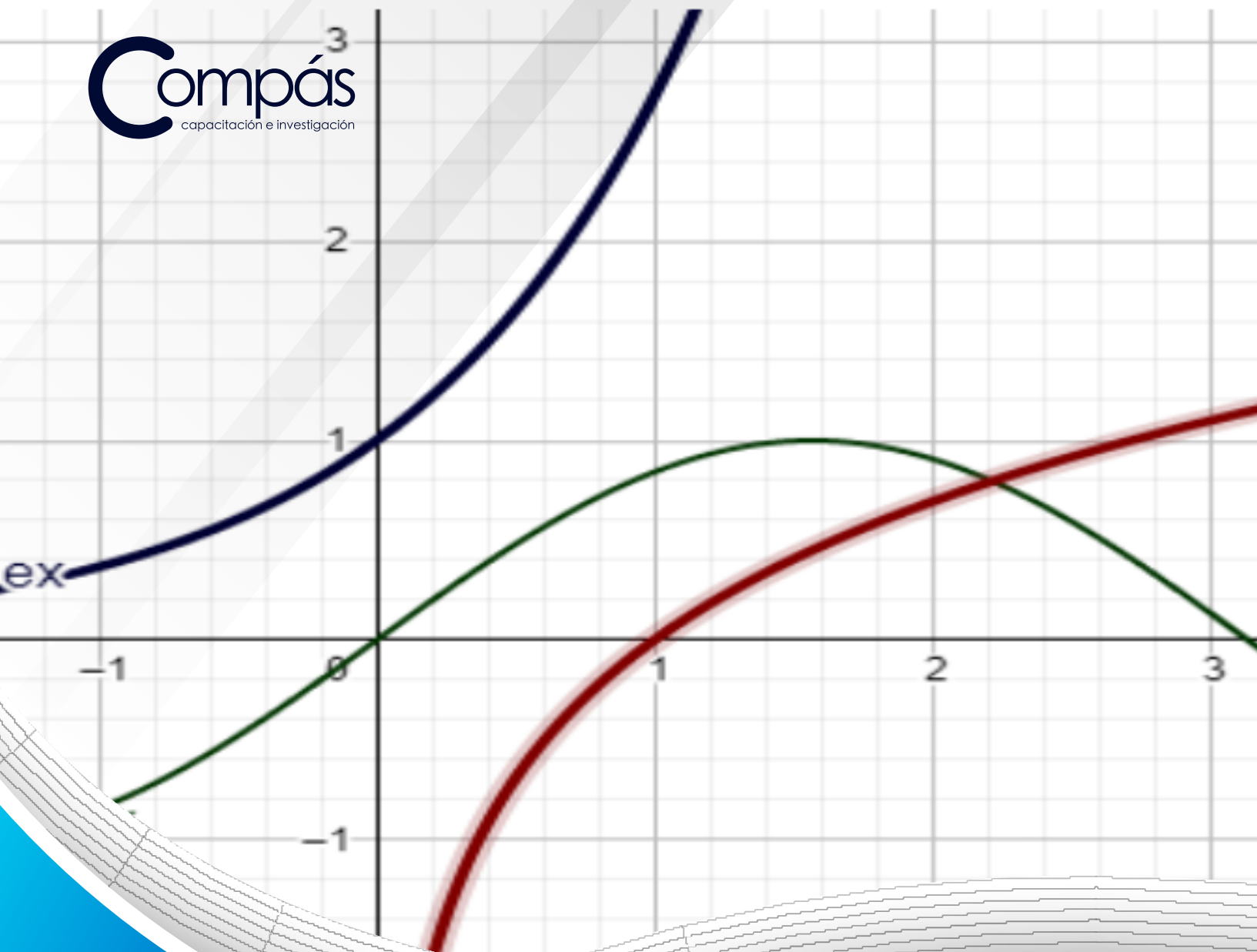




INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Para estudiantes de ciencias e ingenierías

Prof. Alberto Tirado Sanabria Dr.
Ing. Adriana Castro Maridueña Msc.
Ing. Julio Castro Rosado Msc.

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Para estudiantes de ciencias e ingenierías

Alberto Tirado Sanabria
Universidad de Guayaquil FCMF-Civil.
Adriana Castro Maridueña
Universidad de Guayaquil FCMF-Sistemas
Julio Castro Rosado
Universidad de Guayaquil FCMF-Civil

ISBN: 978-9942-53-202-2
Primera edición, 2026



© **Autor**

Alberto Tirado Sanabria

Universidad de Guayaquil FCMF-Civil.

Adriana Castro Maridueña

Universidad de Guayaquil FCMF-Sistemas

Julio Castro Rosado

Universidad de Guayaquil FCMF-Civil

© **Editorial Grupo Compás, 2026**

Guayaquil, Ecuador

www.grupocompas.com

<http://repositorio.grupocompas.com>

Primera edición, 2026

Esta obra ha sido sometida a un proceso de evaluación bajo el sistema de arbitraje doble ciego (double-blind peer review), garantizando el anonimato tanto de los autores como de los evaluadores externos. El dictamen favorable certifica que el contenido cumple con los más altos estándares de rigor científico, calidad editorial y originalidad exigidos por la comunidad académica internacional para su indexación y reconocimiento científico.

ISBN:

978-9942-53-202-2

DOI: 10.31876/9789942532022

Distribución online

Acceso abierto



Cita

Tirado, A., Castro, A., Castro, J. (2026). *INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL. Para estudiantes de ciencias e ingenierías.* Editorial Grupo Compás.

AGRADECIMIENTOS

Para nuestro señor Dios, por todo

A la Universidad de Guayaquil, por permitirme continuar con mi carrera de profesor universitario desde mayo del 2018 a la actualidad, en donde realizo mis producciones científicas.

A la Universidad de Oriente en Venezuela, casa y escuela en donde me forme como profesional de la ingeniería, y como docente en los estudios básicos.

Prof. Alberto Tirado Dr.

A nuestro Dios Padre y a mi familia toda, por su presencia siempre.

Ing. Adriana Castro Msc.

A la Universidad de Guayaquil, desde que me acogió como su alumno en sus aulas, me forme como profesional de la ingeniería civil; como su docente por más de 35 años, y ahora con el honor de ser autoridad en mi querida Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas.

Ing. Julio Castro Msc.

DEDICATORIAS

A todos los estudiantes que en algún momento han compartido un aula de clases, y que esta nueva obra les inspire en que si se puede lograr lo que nos proponemos. Cuando se trabaja con sentido lógico, pensamiento continuo e ingenio.

A mis hijas Ariadna Cristal, Grecia Rubí y Bella Esmeralda. Que siempre han sido mi fortaleza en todo momento, para siempre seguir trabajando y dar lo mejor de mí.

Prof. Alberto Tirado Dr.

Para mi hijo Mauro Leonel, luz de mi vida.

Ing. Adriana Castro Msc.

A mis tres hijos profesionales de la República, y a mis dos nietos.

Ing. Julio Castro Msc.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Valores de la obra	II
Agradecimientos	III
Dedicatorias	IV
Contenidos temáticos	V
Prefacio	VI
Al Estudiante	IX
Al profesor	X
Tema 1, Los números reales	1
1.1) Pares, impares y racionales	1
1.2) Primos e irracionales	2
Tema 2. Intervalos en la recta real	6
2.1) Expresión algebraica	6
2.2) Regla de signos	8
Tema 3: Álgebra fundamental	11
3.1) Ecuación de segundo grado	12
3.2) Potencias	13
3.3) Binomio potenciado, su factorización	14
3.4) Polinomios	16
Tema 4: El plano como referencia	20
4.1) Orientación Polar, y el Rumbo	22
4.2) El espacio coordenado	23
Tema 5: Trigonometría básica	26
5.1) Leyes del Seno y del Coseno	27
5.2) Ángulos y sus funciones	28
5.3) Relaciones trigonométricas	29
Tema 6: Rectas, Áreas y Volúmenes	32
6.1) Las rectas	32
6.2) Áreas y sus fórmulas	34
6.3) Volúmenes y sus cálculos	35
Tema 7: Introducción a funciones	38
7.1) Infectividad en funciones	38
7.2) Función Algebraica o Trascendente	39
7.3) Noción gráfica y tabular	40
7.4) Método gráfica de Relaciones	42
Tema 8: Secciones Cónicas	49
8.1) Circunferencia y Elipse	50
8.2) Parábola e Hipérbola	52
8.3) Resumen sobre Cónicas	55
Epílogo de la Obra	59
Ejercicios adicionales con sus respuestas	60
Referencias consultadas y citadas	66

PREFACIO

El símbolo numérico es el principio matemático en la humanidad, cuyas operaciones condujeron a la formación de ecuaciones y fórmulas, llamadas en la edad moderna *Algebra*, solo después de cientos de años cuando se superó el concepto restringido de los números y sus analógicas, por una visión abstracta, simbólica y general. El aporte del mundo helénico es fundamental y contemplativo, iniciando con el sabio Thales de Mileto, (624-546 A.C), aportando su pensamiento deductivo aplicando la geometría para deducir alturas y distancias, usando figuras del plano; siguiendo con Pitágoras, (570-490 A.C); el comerciante que fundo la escuela de Crotona como la primera sociedad secreta de ciudadanos, sus miembros llamados *Mathematikois*, como estudiosos que guardan el silencio pedagógico para luego abstraer y crear definiciones, van a dar el nombre con sus postulados a esta ciencia. En Atenas Platón (429-347 A.C), funda su escuela en la casa del aristócrata Acamos, llamada *Academia*, y como su primer director, escribió en su entrada “No entre aquí quien no sepa de Geometría”, frase que acoge la idea de la primera prueba de admisión a estudios que se conozca, y el hecho de la geometría como ciencia hermenéutica de la Matemática.

Euclides, (365-275 A.C), establece los primeros axiomas y teoremas usados hasta el presente sobre figuras planas; con el genio de Arquímedes, (287-212 A.C), encontramos variadas aplicaciones matemáticas en la ingeniería, como la tangente geométrica de la espiral que lleva su nombre, que permitió la formulación de áreas y volúmenes circulares; cerrando este milenio dorado con la Martir Hipatia de Alejandria (370 a 415 D.C), en sus aportes a la astronomía usando la geometría de las cónicas; y del matemático Diofanto, (325-409 D.C), que estableció la resolución formal de sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado, la simbología actual de los números negativos, la tendencia infinita y al infinito de los números reales (Zill y Wright, 2011).

En la era Medieval, se realizaron las mayores aplicaciones de ingeniería de los fundamentos matemáticos griegos, a pesar del *Oscurantismo* impuesto por la iglesia católica, los matemáticos y estudiosos son ahora los hindúes y árabes, en la escuela de Bagdad; que en tres siglos, establecen el algebra elemental moderna, los números arábigos que conocemos, las potencias y una nueva interpretación del Cero, de los valores indefinidos e indeterminados, así como las secuencias y progresiones numéricas. Estos conocimientos y tratados son filtrados hacia las nacientes universidades europeas, en donde además de religión, filosofía y música; se enseña Física, Alquimia, Biología, y varias ramas de la matemática como la Aritmética, y la naciente geometría analítica (Baldor, 2017).

Con el escocés Napier, (1550-1617), tenemos el uso de los Logaritmos para la resolución de polinomios potenciados, luego en el siglo XVII, los franceses: Pierre Fermat, (1601-1665), y su teoría de números *Infinitamente próximos*, y el filósofo René Descartes, (1596-1650), que expuso un *Método* para el aprendizaje general, afirmando que se lograba saber el *Concepto*, porque este

“Existe si se logra pensar en él”; atribuyéndosele el plano coordenado, porque él pudo pensar en las funciones allí dibujadas, cuando enfermo en su cuarto busco la orientación de una mosca proyectada en la pared.

El cálculo moderno nace en la Europa del siglo XVII por los aportes de Isaac Barrow, (1630-1677), que teorizó el fundamento del Cálculo, e Isaac Newton, (1642-1721), con el desarrollo del binomio que lleva su nombre y el teorema fundamental del cálculo a la par que Gottfried Leibnitz, (1646-1716), que estableció la simbología dy/dx como la derivada de la función; luego es Jean D’Alembert, (1717-1783), quién redacta su famoso artículo de las tipologías de los límites de una función. Esta era cierra en el siglo XVIII con los aportes de Guillaume L’Hopital, (1661-1704), y su regla para la resolución de límites indeterminados, Michelle Rolle, (1652-1719), y José Lagrange, (1736-1813), en sus aplicaciones de la derivada en el estudio de concavidades y rectas tangentes a funciones en puntos específicos, más el aporte de Leonard Euler, (1707-1783), en donde se clasifican las funciones entre algebraicas y trascendentes; es decir, se completan los contenidos de la primera matemática universitaria, conocida como cálculo diferencial o Matemática I.

Pero como la Geometría Euclidiana es finita y el Cálculo infinitesimal es la resolución a situaciones generales más allá del espacio, en la época contemporánea se establece la ideología anti-geométrica o la llamada matemática pura, iniciando con Carl Gauss, (1777-1855), y su teorema fundamental del algebra, Agustín Cauchy, (1789-1857), padre de la rigurosidad establecida como única y necesaria razón de ser de la matemática, Nicolás Lobatchewski, (1793-1856), con su geometría no Euclidiana, y Karl Weierstrass, (1815-1897), en su aporte a la definición formal del límite con las variables Delta y Épsilon usadas en la actualidad. Entonces la Matemática I, en muchas partes del mundo, es una rigurosidad algebraica solo analítica que abarca lo relacionado a funciones en el plano, el límite y la derivada de una función, cerrando con las aplicaciones de la derivada, para lo cual no existe una preparación o introducción previa para el joven estudiante que inicia una carrera universitaria. La clase tiene una didáctica formalista en la búsqueda de la certidumbre matemática con: Reglas, axiomas, cadenas de símbolos, y objetos matemáticos cuya existencia real poco importa. Donde su significado debe ser decodificarlo y aplicado por el estudiante en el solo instante que se necesita, siendo una materia reconocida por su alta dificultad y abstracción, con resultados académicos preocupantes en el índice de aplazados y la baja nota cercana al punto mínimo, en los estudiantes que aprueban, como caracterización generalizada.

En la actualidad la Matemática I, puede resultar con dificultad cuando se pretende de entrada mostrar nociones como la indefinición, el infinito, y la indeterminación sin la preparación adecuada, o cuando se desarrollan funciones diferentes sin un orden lógico consecuente, continuando con los estudios infinitesimales que se realizan sin el apoyo tabular de la función; además, de la pretensión

de derivar relaciones que no son funciones, para cerrar con la aplicación de la derivada en gráficas y funciones no vistas o cálculos de área y volúmenes desconocidos por el estudiante (Tirado, 2020).

Entonces el aprendizaje de la matemática básica universitaria ha encontrado su mayor dificultad en la actitud predispuesta en el estudiante sobre que es difícil y de mucha abstracción, esto ocurre porque su enseñanza requiere de una preparación previa evolutiva, al igual que el lenguaje desde sus inicios: con gestos, repeticiones y dibujos en el niño hasta el alfabeto y símbolos normalizados y generalizados en el joven (Tirado y Núñez, 2023); en ese sentido este texto ofrece la Introducción al Cálculo Diferencial, como estrategia específica de los conocimientos requeridos para un mejor y adecuado aprendizaje de lo que debe ser la Matemática I: *Una asignatura de singular belleza y facilidad*. En donde el estudiante realiza la aplicación de la Derivada, cuando la reconoce como un Límite indeterminado puntual, en una función del plano, conocido el mapa completo de estas.

La obra puede ser leída con sus ejemplos y ejercicios propuestos, en los tiempos entre el bachillerato y la universidad o en los llamados cursos de nivelación; apreciando su lógica secuencia de saberes con el aporte en orden de dificultad de cada eslabón requerido para aprender mejor el capítulo de las funciones representadas en el plano, y sus características de: Dominio, Rango, Cortes o intersecciones con los ejes, así como sus tendencias, puntos notables, asíntotas y rectas tangentes a la función en cualquier punto de interés.

Cuando en este texto se hace un refuerzo de: Los conjuntos y sus elementos, la orientación del plano cartesiano, las nociones algebraicas con las factorizaciones de los polinomios, la trigonométrica básica y algunas identidades trigonométricas, la recta, las áreas y los volúmenes conocidos, las primeras clasificaciones sobre las relaciones y funciones del plano, con la poderosa idea de la construcción de todas ellas, como *Definición Gráfica* para una estrategia didáctica apriorista; cerrando con un interesante estudio y contenido de las secciones cónicas las cuales por arcos o partes, pueden ser funciones potenciales a estudiar.

Entendiendo y usando el concepto de función como una relación del plano condicionada, con infinidad de aplicaciones en las ciencias y las ingenierías.

Prof. Alberto Tirado Dr.

AL ESTUDIANTE

Para un mejor aprovechamiento de este texto se recomienda seguir el orden consecuente de los temas realizando: La lectura completa de cada uno de ellos, observando los ejemplos resueltos, y resolver la mayor cantidad posible de los ejercicios propuestos; porque la mejor forma de aprender es practicar; y este texto propone una variedad de problemas tipificados por temas, en el mejor orden de dificultad.

Ser estudiante implica que se ha adquirido el compromiso de aprender de las muchas cátedras que conforman nuestras carreras al menos una idea general, una actitud que nos lleva a la madurez necesaria para resolver o intentar resolver situaciones y problemas del campo laboral profesional o de la vida diaria, mediante el ingenio y el uso de estrategias y técnicas alguna vez discutidas. ¿Entonces como el estudiante, por lo general adolescente, se encamina en el proceso como estudiante para convertirse en un profesional? ¿Cómo el estudiante de Matemática I sabe que su actitud es la correcta? (Tirado, 2015) “Cuando por encima de buscar sólo aprobar la materia, se enfoca en vivir su contenido”.

Para de esta forma tener un mejor aprendizaje cuando logra ver la aplicación práctica inmediata del concepto, realizando discusiones con sus compañeros al comparar resultados; de tal forma que en cada situación o problema, busca romper el memorismo tradicional de solo dominar el algoritmo secuencial de las temáticas en la Matemática I; sacando el mayor provecho cognitivo.

En esta obra encontrarás 45 ejemplos resueltos, explicativos de la temática puntual tratada, con un total de 120 ejercicios propuestos con su respuesta, para confirmar el resultado obtenido; todos ellos en orden numérico en toda la obra, para facilitar su ubicación en el texto.

Porque luego en la Matemática I, se debe contar con la suficiente cognición de base para manejar y aprender la utilidad de las aplicaciones de la función derivada, cuando se logra plantear situaciones con funciones del plano, conociendo y aceptando su mapa, divisiones y características completas, y que la derivada es un límite particular indeterminado.

Ing. Andriana Castro Msc.

AL PROFESOR

Este trabajo ofrece el importante rescate de los contenidos requeridos por el estudiante para aprovechar y entender mejor los conocimientos debidos al Cálculo diferencial o la llamada Matemática I para ciencias e ingenierías. Como introducción requerida para entender la orientación y tendencias de las relaciones dibujadas en el plano, los conjuntos posibles que vienen a definir el dominio, el rango, y las intercepciones de las diferentes relaciones con los ejes coordenados; luego en una lógica didáctica se busca establecer las bases sobre el algebra y la trigonometría requerida en enlace con conocimientos de ciencias afines a la matemática o que usan sus postulados.

La idea es ordenar el conocimiento previo requerido, y establecer las primeras nociones sobre funciones y sus gráficas, que permitan al estudiante manejar en la primera asignatura universitaria de matemática, el concepto del Límite, la Derivada y sus aplicaciones; teniendo los fundamentos cognitivos con su componente apriorista a la mano, para luego en la asignatura de Matemática I, poder usar la llamada *Definición Gráfica*, como complemento didáctico (Tirado y Figuera, 2017).

En ese sentido el contenido de la obra es de 08 temáticas, en el orden de: Los números reales; Los intervalos posibles como conjuntos; El algebra fundamental, con las nociones del polinomio y sus factorizaciones; El plano de referencia; Las nociones de trigonometría, sus ángulos y relaciones; Las rectas, las áreas y los volúmenes, en sus fórmulas y cálculos; Las nociones y formas de representar una función, con el fundamento gráfico de la función primaria como base constructiva; para cerrar con el tema de las secciones cónicas. En un curso completo preuniversitario a dictarse en 48 horas en contacto directo con el docente, a promedio de seis horas por temática.

El aprendizaje del estudiante en el salón de clases obedece a la calidad de la interacción con el profesor y con sus compañeros de estudios, para ello la metodología de enseñanza debe contar con una motivación y breve historia de cada tema abordado, un desarrollo del concepto con ejemplos didácticos puntuales, sobre lo tratado con el apoyo visual o geométrico del concepto, y ejercicios de práctica finales que permitan al estudiante realizar la práctica retroalimentada de lo visto.

Las tres asignaturas de Matemáticas en la universidad, para las carreras de ciencias e ingenierías, deben mantenerse en 06 horas a la semana, en tres encuentros presenciales de dos horas cada uno, de tal forma de que en el primer parcial se cubran las unidades de funciones y límites de una función, y para el segundo parcial, la función derivada y sus aplicaciones.

Ing. Julio Castro Msc.

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES

El hombre en su necesidad de sobrevivir busco socializar con semejantes a través de símbolos que le permitieron cuantificar valores en la naturaleza a su alrededor, es donde surgen los llamados números *Naturales* o enteros positivos: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$; conjunto infinito en la dirección derecha o asumida positiva, cuyas operaciones generan otros números diferentes. Si sumamos o multiplicamos se genera otro número natural, pero al restar pueden surgir los llamados números negativos u opuestos, de hecho, si se resta por el opuesto exacto, se genera el cero o vacío, el cual no es natural por su condición de neutro y no ser un entero.

El grupo de todos los números naturales con sus opuesto se llaman *Enteros*, que son crecientes infinitos al alejarse del origen, más el cero: $\mathbf{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$; es decir, un conjunto infinito de enteros en ambas direcciones de la llamada recta real, más el origen que se incluye; en la siguiente figura 1, se aprecia este ordenamiento en la llamada recta numérica para puntos “P” determinados como enteros

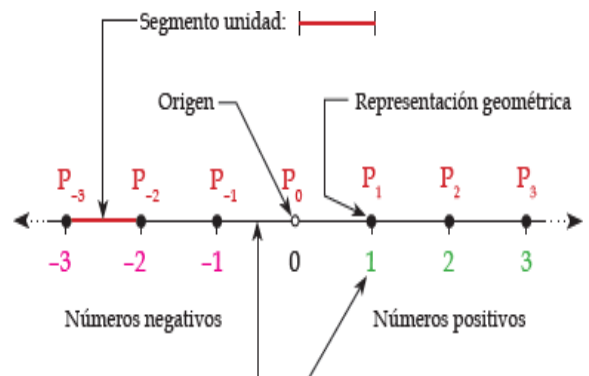


Figura 1: Recta numérica con algunos enteros

1.1) Pares, Impares y racionales

La primera clasificación de los enteros es la de *Par* o $2N$ y la de *Impar* como él $(2N + 1)$; los números enteros cumplen con las leyes conmutativas de la suma, las leyes asociativas y distributivas de la suma, resta y producto. El elemento neutro de la suma y resta que es el cero, con el elemento neutro del producto y la división, el número uno.

La división de enteros genera los llamados números *Racionales* que incluyen la parte decimal de todo número expresado: (a / b) , donde el número de arriba se llama numerador, y de abajo se llama denominador; como ejemplos tenemos: $\mathbf{Q} = \{0,333; -0,5; 2,456; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -3/8\}$; entre una infinidad de expresiones posibles en cualquier signo, donde incluso puede existir el hecho de valores decimales infinitos, pero con decimales periódicos, como el caso particular del $1/3$ o $1/6$. Todo racional se expresa a su mínima división; es decir $9/6$, es en realidad $3/2$.

De donde se afirma que todo número entero es un racional exacto o división sin residuo, cuando el denominador sea diferente de cero; porque este es un resultado llamado indefinido, que por propiedad se asume de resultado *Infinito* (∞), en cualquier sentido, y que no es un número real, pues su significado es que *No tiene Límite*, expresado como una secuencia continua de la figura de un número ocho de forma horizontal sin fin; símbolo establecido por el matemático John Wallis en 1656.

Los números racionales son denominados fracciones *Propias* cuando el denominador es mayor al denominador, e *Impropias* cuando están desplazados del origen; es decir, cuando el numerador es mayor; en estos casos por lo general se busca separar el número entero y realizar la fracción de forma propia, a saber: el número $5/4$, se debe expresar como: $1 + 1/4$.

Por la propiedad de la densidad de los números se puede afirmar que entre dos enteros continuos existen infinitos números racionales; luego la llamada potencia es el procedimiento de expresar una secuencia de productos como: A^B = multiplicar "A" en "B" veces; es decir para la potencia siguiente 2^3 es: $2 \times 2 \times 2 = 8$. El proceso inverso, es la llamada radicación: $A^{1/B} = \sqrt[B]{A}$, o sea siguiendo el ejemplo anterior sería entonces $\sqrt[3]{8} = 2$; donde el 8 es la base, el $1/3$ el exponente, y el 2 el resultado de la potencia fracción llamada radical.

1.2) Primos e irracionales

Una segunda clasificación en los enteros es el conjunto de los números *Primos*, se llaman Primos cuando solo son divisibles por ellos mismos, para obtener la unidad y viceversa, como resultado entero, entre los números naturales tenemos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 53, \dots\}$, en una infinidad.

Entonces el conjunto de los números reales son los enteros, los racionales y los llamados *Irracionales*; estos últimos son los que no pueden ser expresados como una razón o división de enteros, con las características de que su parte decimal, es infinita no periódica. En este grupo están las radicaciones y algunas divisiones sucesivas o algunos resultados de funciones trascendentes; entre algunos ejemplos de números irracionales: $I = \{\sqrt{2}; -\sqrt{5}; \sqrt[3]{7}; \pi; \sqrt[2]{7}; \ln(3); \text{Sen}60^\circ\}$, entre una infinidad. Los números irracionales se pueden expresar Como trabajo geométrico y trigonométrico de figuras en el plano; ver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Estime geoméricamente el valor aproximado del número irracional raíz de dos

Respuesta: Como $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$. Que es la Hipotenusa de un triángulo rectángulo de lado la unidad; es decir, toda raíz se puede construir a partir de la recta real con el uso de un compás, ver la figura 2 sobre este clásico ejemplo. Tomado del texto de (Tirado y Figuera, 2017).

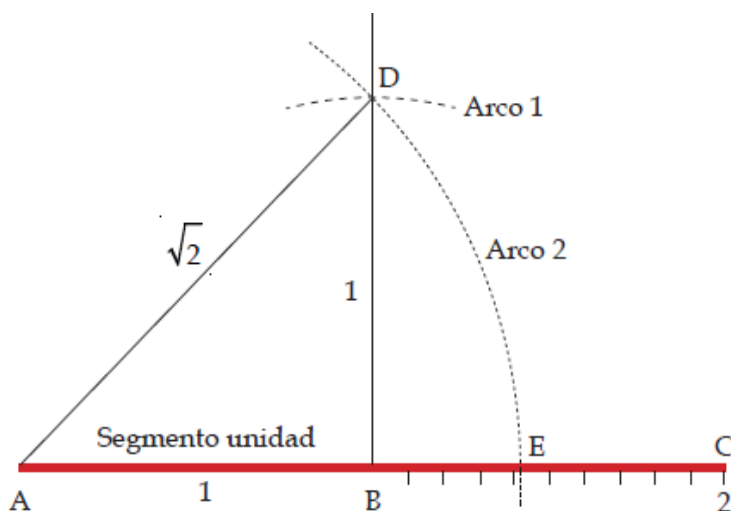


Figura 2: Construcción grafica del irracional $\sqrt{2}$

El número “Pi”, $\pi = 3,141596...$ resultado de la división secuencial entre el perímetro y el diámetro de toda circunferencia, o el número de Euler, $e = 2,718281...$ Como la inversión de la función logaritmo natural, en el origen coordenado, son ejemplos clásicos de irracionales; entonces el conjunto de los enteros, racionales e irracionales, van a conformar los llamados números reales.

Ejemplo 2: Encuentre la llamada *Mantisa* de números que demuestra que la siguiente fracción $1/7$ no es un número irracional.

Respuesta: El número que produce $1/7$ es: $0,1428571429...$ Es decir, de dígitos infinitos; sin embargo, no es un número irracional porque se puede observar que la parte 142857 es repetitiva secuencialmente. Entonces se dice que este número racional, tiene su mantisa en seis dígitos.

Ejemplo 3: Obtener el número de Euler como base de los logaritmos naturales, desarrollados por el matemático escocés John Napier; el cual se logra por un estudio al infinito de la ecuación $(1 + 1/n)^n$. Cuando “n” es un número muy grande, o está en los llamados tendencia infinita positiva; calcule esta base Neperiana para los valores de: $n = 10, 100, \text{ y } 5.000$.

Respuesta: El primer resultado es: $e = (1 + 0,1)^{10} = 2,594...$; para la siguiente tendencia se logra el número irracional de: $e = (1 + 0,01)^{100} = 2,705...$; cerrando con el valor que se aproxima al regular neperiano usado de $e = (1 + 0,0002)^{5000} = 2,718...$

Siendo un valor aceptable usado comúnmente, el famoso $2,7183$.

El tema 1, cierra con el concepto de significancia, o número de cifras que tengan significado a la hora de operar números o cantidades, en virtud de la ilógica de pretender usar todos los dígitos de números de mantisa infinita; en ese sentido se llama *Cifra significativa* a los dígitos con valor significativo, que posee un número real consecuencia de alguna medición o resultado de una operación algebraica; existiendo la llamada expresión *Redondeada*. En el conteo de las cifras no se consideran el cero único a la izquierda de la coma o punto decimal (Tirado, 2015).

Ejemplo 4: Diga las cifras significativas de los números: $1,400$. $1.400,00$. $0,00346$. y $17,4$.

Respuesta: $1,400 \rightarrow 4$ cifras; porque a pesar de tener ceros a la derecha, tiene significado hasta la milésima. $1.400,00 \rightarrow 6$ cifras, cuatro enteros y significado hasta la centésima. El número $0,00346$, tiene cinco cifras significativas. El número $17,4$ tiene tres cifras con significado operativo.

En el álgebra de las cifras significativas se recomienda que el resultado de la operación deba tener la significancia que el operador preestablezca en el cálculo que se realiza, para ello

se puede usar la inexacta técnica del redondeo: Un dígito decimal mayor o igual que 5 se elimina sumando una unidad al dígito significativo anterior; si es menor a 5 no se suma; proceso a juicio de las cifras significativas que desee expresar en un número, o que se presteblezca.

En algunos números muy extensos se puede emplear la expresión *Notación Científica* para correr la coma que separa enteros de decimales al fin de obtener una expresión de un entero y dos o tres decimales, como más común.

Ejemplo 5: Resolver la siguiente operación $(2,5 + 30,45) \cdot (3,01)$; y expresar el resultado a cinco cifras significativas, seguidamente expresar el número a tres cifras con notación científica.

Respuesta: $(2,5 + 30,45) \cdot (3,01) = 988,8295$. La expresión para cinco cifras significativas es 988,83; redondeando el segundo decimal. Para la notación científica a tres cifras significativas es $9,89 \times 10^2$, igualmente realizando un redondeo.

Ejercicios propuestos del Tema 1

1) ¿Qué número natural es divisible exacto entre 2 y 3, pero no divisible por 4? **R: 6**

2) Resolver la siguiente división de números potenciados: $\frac{(4)^{-\frac{1}{2}} + (4)^{\frac{1}{2}}}{(9)^{-\frac{1}{2}} - (9)^{\frac{1}{2}}}$ **R: - 15/16**

3) La suma de cuatro naturales consecutivos, produce 86, ¿Cuál es el número mayor? **R: 23.**

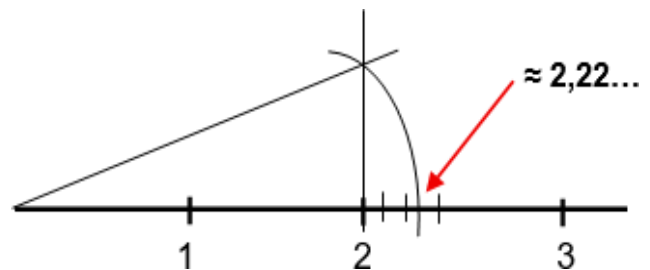
4) El numerador es el denominador más dos. Si se suma uno a ambos, el racional resultado es 3/2. Halle la fracción original. **R: 5/3**

5) Encuentre el menor racional que resulta de: Si a una fracción se le suman a su numerador y denominar este último, resultando ser triplicada. **R: 1/5**

6) Encuentre el racional propio de la siguiente fracción impropia 7/3. **R: 2 + 1/3**

7) Represente el número irracional raíz de cinco, sobre la recta real

R: Se construye un triángulo recto, de base 2 y altura 1, cuya hipotenusa esta después del valor 2,22...



8) Construya un número cercano al irracional *Aureo* = F_n / F_{n-1} , de una sucesión creada infinita con las secuencia en donde el término siguiente es la suma de los dos términos o elementos anteriores: {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55} O sea, la ecuación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Luego estime el número solicitado para $n = 10$.

R: El término 10 es el 34, entre el 21, es igual al racional 1,619047.

9) Resuelva el siguiente producto entre raíces: $(\sqrt{18} \times \sqrt{32})$, y exprese el resultado numérico con 5 cifras significativas. **R: $12\sqrt{2}$. 16,970.**

10) Exprese el resultado de la siguiente operación: $(5,3)^3 / (2,6 - 3)$, con notación científica a 04 cifras significativas. **R: $- 3,722 \times 10^2$.**

TEMA 2: INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Los números reales se pueden estudiar por intervalos, los cuales se denominan: abiertos, cuando en sus polos se escribe un paréntesis que significa que no incluyen a estos; cerrados cuando en su expresión se escribe un corchete que indica que incluye los polos, o los llamados intervalos mixtos cerrados-abiertos, en diferentes combinaciones.

El intervalo de todos los números reales es abierto y se denomina infinito, $\mathbf{R} = (-\infty; \infty)$; los intervalos también se expresan con los símbolos de las inecuaciones, o relaciones que usan los símbolos de mayor o menor para denotar abierto y menor igual o mayor igual para los cerrados, en ambos casos con respecto a un polo o valor extremo conocido.

Los intervalos son nociones usadas para definir relaciones en el plano, así como el llamado Dominio y Rango de las funciones, más adelante se verán teoremas de comportamiento para valores intermedios en los estudios y por supuesto el análisis infinitesimal cuando se hace un acercamiento a un punto específico o polo de un intervalo conocido.

2.1) Expresión algebraica

Por ejemplo, para definir que una variable está en un rango de valores se usa la expresión entre paréntesis: $\{X \in \mathbf{R} / a \leq x < b\}$ significa que la variable “x” existe en el conjunto cerrado y abierto definido como: $[a; b)$. De manera similar, supongamos el intervalo: $a < x \leq b$, el cual viene a significar que $\{X \in \mathbf{R} / a < x \leq b\}$, o que la variable se encuentra o puede tomar cualquier valor dentro de ese intervalo; es decir, desde el polo “a” sin incluirlo hasta el valor “b” incluido.

Por siguiente posibilidad están los llamados intervalos *Al infinito* cuando expresan esta simbología de una tendencia que no existe como número real, siempre abierto en el lado denominado infinito, como $\{X \in \mathbf{R} / -\infty < x \leq b\}$; a continuación, dos representaciones de intervalos en la recta real, el primero semiabierto y otro al menos infinito. Figura 3 a continuación, sobre estos intervalos acotado y semiabierto con el uso de la llamada *Inecuación*, o ecuación que conlleva el uso de los signos mayor, menor y sus versiones mayor e igual o menor e igual (Tirado y Figuera, 2017).

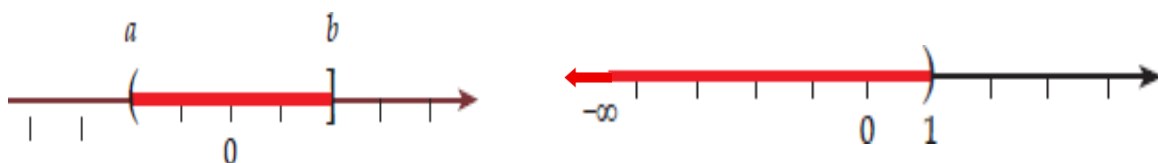


Figura 3: Intervalos en la recta real, $(-2; 2]$ Semiabierto. Y $(-\infty; 1)$ Al infinito

Los intervalos como entes matemáticos se pueden operar cuando se juntan en una especie de *Unión de intervalos*, y cuando coinciden en subintervalos propios, llamado parte común o *Intersección de intervalos*; ver los ejemplos siguientes

Ejemplo 6: Expresé por simbología y su esquema la unión de los intervalos $[-3; 0)$ y $(-2; 2]$.

Respuesta: Esto es la unión de dos intervalos semiabiertos que producen en conjunto un intervalo *Total*, alrededor del origen como: $[-3; 0) \cup (-2; 2] = [-3, 2]$, cuya representación geométrica en la recta real se puede apreciar en la siguiente figura 4, como confirmación del resultado

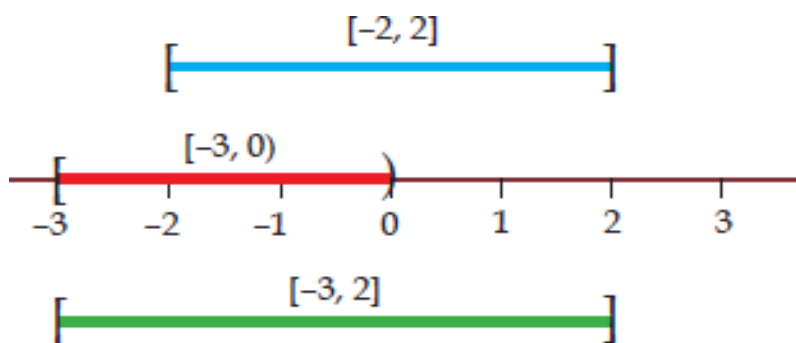


Figura 4: Unión de dos intervalos, en azul cerrado, con el rojo semiabierto. Con resultado en verde de un intervalo cerrado.

Ejemplo 7: Expresé por simbología y esquema geométrico la intersección de espacios o subintervalos en común, de los siguientes dos intervalos $[-1; 4)$ y $(2; +\infty)$.

Respuesta: La intersección entre los intervalos dados: $[-1; 4) \cap (2; +\infty)$, es el intervalo cerrado: $[2; 4]$. Ver la figura 5 del lado, en esta representación geométrica.

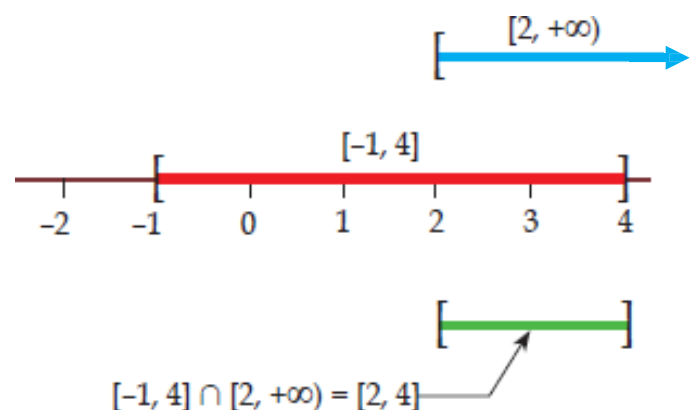


Figura 5: Intersección de intervalos

Se agrega la lógica que la unión de dos o más intervalos reales no vacíos produce un intervalo real, sea este abierto, semiabierto o cerrado; y la intersección de dos intervalos que no tengas partes o subintervalos en común, será el llamado conjunto *Vacío*, $(\emptyset)$.

Ejemplo 8: Resuelva las siguientes dos inecuaciones: $x + 4 < 5x - 2$. Con $3x - 2 \geq x - 1$. De una variable, y diga el intervalo en donde el sistema tiene solución común.

Respuesta: De la primera inecuación se tiene $x > 3/2$; de la segunda se obtiene que $x \geq 1/2$. Siendo la solución común para ambas inecuaciones el intervalo abierto: $(1,5 ; \infty)$.

Luego en una ecuación donde se operan factores por producto o división, en la cual se desea un resultado específico de signo o tendencia; se usa la llamada *Ley o Regla de los Signos*, en donde el resultado del producto o división de signos iguales producen un resultado positivo, y en signos diferentes un resultado negativo.

2.2) Regla de signos

Regla que considera que la tendencia al menos infinito no es de números menores, como suele decirse, son números a la izquierda del cero referencial, al ser cambiados de sentido por el producto del signo negativo, siendo el producto por un signo positivo invariable; es decir, una tendencia positiva o negativa al ser multiplicada por un número positivo no es afectada, y al ser multiplicada por el signo negativo cambia; razón lógica del porque menos por menos es positivo.

Ejemplo 9: Del siguiente producto de factores: $(2x - 4) \cdot (4 + x)$, diga en que intervalo su resultado es un número negativo, o a la izquierda del cero referencial diferente de este.

Respuesta: De cada factor se obtiene su inecuación respectiva de valores positivos o negativos de acuerdo con el intervalo posible que asuma la variable con respecto a su anulación o al origen de referencia; esto es que del primer binomio producto se anula en $x = 2$, siendo positivo para todo valor "x" a la derecha del número dos, o sea este factor será positivo en $x > 2$. Del siguiente factor se tiene que $x = -4$, entonces será positivo para todo valor a la derecha del menos cuatro, o cuando su variable sea $x > -4$.

Seguidamente se dibuja estas dos inecuaciones como rectas paralelas en donde se puede realizar el producto de sus intervalos, procedimiento conocido como el *Mapa de Signos*, en donde se obtiene el intervalo solución deseado, ver la siguiente figura 6, esquemática del producto de signos.

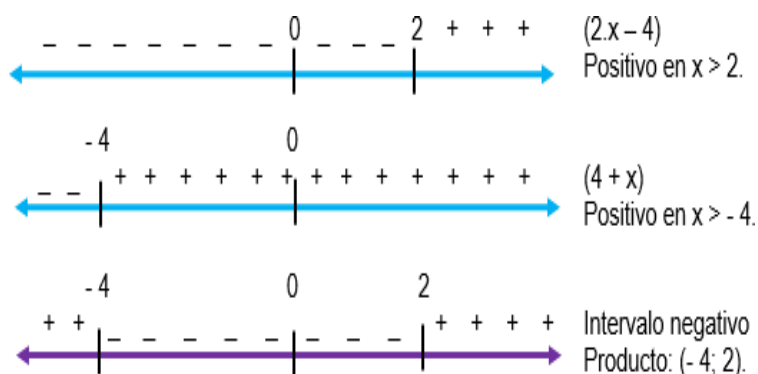


Figura 6: Mapa de signos de dos binomios producto

De tal forma que la respuesta al ejemplo es que el intervalo en donde el producto de estos binomios sea negativo y diferente de cero, es: $(-4; 2)$.

Ejemplo 10: Diga en que intervalo la variable “x” produce una solución real, para la raíz cuadrada del siguiente producto: $\sqrt{(x-3) \cdot (x)}$.

Respuesta: Se debe descubrir en que intervalo de números, el producto $(x-3) \cdot (x)$ es mayor e igual a cero, condición del radicando para una raíz par, en ese sentido se realiza a continuación el siguiente Mapa de signos de forma tabular como otra modalidad; ver la siguiente Tabla 1.

Tabla 1. Mapa de signos de los factores: $(x-3)$ y x .

Factores producto	Intervalos de signos			Mayor e igual a cero en
	$(-\infty; 0)$	$(0; 3)$	$(3; +\infty)$	
$(x-3)$	-	-	+	$x \geq 3$
x	-	+	+	$x \geq 0$
Resultado	+	-	+	$(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

La tabla ofrece el resultado para: $(x-3) \cdot (x) \geq 0$, en la unión de dos intervalos abiertos desde el menos infinito hasta el cero incluido, unido al número tres incluido hasta el más infinito.

Resultado que permiten la solución de la raíz cuadrada, digamos que como ensayos se tiene que para $x = -1$, el resultados es: $\sqrt{(-1-3) \cdot (-1)} = 2$, positivo; y para $x = 5$ se tiene por solución real: $\sqrt{(5-3) \cdot (5)} = \sqrt{10}$. Donde el número 1, fuera de la solución produce el número no Real, denominado complejo: $\sqrt{-2}$.

Ejercicios propuestos del tema 2

11) Realice la unión de los siguientes intervalos de números reales, $A = \{x \in \mathbf{R} / -5 \leq x < 4\}$ con el intervalo $B = \{x \in \mathbf{R} / 0 < x < 3\}$. **R: (- 5; 4).**

12) Estime el conjunto de la intersección de los intervalos: $\{-2 \leq x < \infty\}$, con $\{-6 \leq x < 5\}$.
R: [- 2; 5).

13) En qué conjunto se cumple que: $\frac{x}{(x+1)} > 4$. **R: $(-\infty; -4/3)$.**

14) Encuentre el intervalo de números reales que satisfaga la siguiente inecuación: $\frac{3x}{(x-4)} < -1$.
R: $x < 1$.

15) Estime el conjunto de la intersección de los intervalos: $\{-3 < x < 0\}$, con $\{1 < x \leq 5\}$.
R: Conjunto vacío.

16) Encuentre el intervalo donde el siguiente producto de binomios: $(1-x) \cdot (2x+3)$, sea negativo o cero. **R: $(-\infty; -3/2] \cup [1; +\infty)$.**

17) En que intervalo la siguiente división: $\frac{(x+2)}{(3-x)}$, tiene solución Real positiva; recordar que todo denominador debe ser diferente de cero. **R: [- 2; 3).**

18) Diga en que intervalo la siguiente raíz de un cociente: $\sqrt{\frac{(x-2)}{x}}$, ¿Tiene solución real?
R: $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

19) Encuentre el intervalo donde se cumple que: $-4 \leq 3x + 5 < 8$. **R: [- 3; 1).**

20) En qué intervalo el cociente $\frac{(x-1)}{(x+2)}$ ¿Es negativo o cero? **R: (- 2; 1].**

TEMA 3: ALGEBRA FUNDAMENTAL

El algebra es el estudio de operaciones y cálculos de variables involucradas mediante operaciones de suma, resta, producto, división, potencia y radicación; en expresiones con símbolos letras y cantidades, siendo el clásico polinomio el arreglo común para operar. El Algebra entonces es una rama de la matemática que estudia elementos, sus operaciones y combinaciones para resolver un planteamiento, a diferencia de la Aritmética que estudia esto en los números. El álgebra como herramienta también se puede usar en las llamadas funciones trascendentes, o aquellas cuyo resultado trasciende del número con resultados generalmente irracionales, cuando estas pueden igualmente operarse entre sí.

Siendo entonces el *Sistema de ecuaciones polinómicas* un fundamento necesario a la hora de obtener resultados en variables involucradas, cuando cada expresión individual no puede ofrecer un resultado numérico; así como evaluar un resultado o imagen de una variable en relación con las otras variables de cada polinomio.

Ejemplo 11: Obtener los valores de las variables de las siguientes dos ecuaciones como un sistema determinado: $x + 3y = 2$. Con $y - 8x = -4$.

Respuesta: de la primera se expresa la “x” como: $x = 2 - 3y \Rightarrow y - 8(2 - 3y) = -4$. De donde se obtiene que: $y = \frac{12}{25}$; con $x = \frac{14}{25}$.

Ejemplo 12: Sean las siguientes tres ecuaciones con tres variables como: $2x - 4z = 3y + 20$; $z - 3x + 3y = 5$; cerrando con $y + z + x = 20$. Obtener el valor de cada variable

Respuesta: De la primera se despeja “z” $\Rightarrow z = \frac{3y + 20 - 2x}{-4} \Rightarrow$ Que agregado a la segunda y tercera ecuación queda como el sistema: $\frac{3y + 20 - 2x}{-4} - 3x + 3y = 5$; con: $y + \frac{3y + 20 - 2x}{-4} + x = 20$.

De la primera se despeja “y”, como: $y = \frac{60 + 10x}{9}$, que en la segunda produce el valor numérico de la variable $x = 840/64 = 13,125$. De donde se obtiene $y = 21,25$, y finalmente la $z = -14,375$. Resultado que se puede obtener en cualquier orden en el despeje de incógnitas.

Los sistemas de ecuaciones se pueden resolver por diferentes estrategias, aquí se usó la técnica de la *Sustitución*; sin embargo, hay otros procedimientos como por ejemplos: El uso de la llamada Reducción, las *Determinantes*, en su proceso de matriz *Inversa*, o la clásica regla de *Cramer*, para solucionar sistemas de ecuaciones.

Esta última es una valiosa herramienta que fórmula para cada variable a calcular, una división de dos determinantes, la determinante sustituida con los valores de igualdad en la

posición de cada variable en el numerador, con la determinante llamada de los datos del sistema de ecuaciones en el denominador; esto es digamos para un sistema de dos variables expresado como: $ax + by = c$. Con $dx + ey = f$. Se resuelve para cada variable como

$$X = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}; \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 13: Use la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema de dos variables, determinado en las siguientes dos ecuaciones: $2x - 4y = 5$. Con $-3x + y = 0$.

Respuesta: Usando la fórmula de esta regla se tiene para cada variable a calcular lo siguiente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-10} = -0,5. \text{ Con resultado en la otra variable } y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{-10} = -1,5.$$

Resultados que se confirman en el propio sistema de ecuaciones.

3.1) Ecuación de segundo grado

Cuando un polinomio es de grado dos, esta igualado al cero, forma *Canónica* del polinomio cuadrático, y en el orden siguiente: $ax^2 + bx + c = 0$. Su resolución ofrece dos valores que se obtienen por medio de la ecuación: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.(a).(c)}}{2.(a)}$, una vez identificados cada coeficiente, y aceptando que el radicando $b^2 - 4.(a).(c)$ debe ser mayor e igual a cero para obtener soluciones reales; si el radiando es cero, la solución única es: $x = -b / 2.a$.

Las ecuaciones cuadráticas fueron estudiadas y resueltas desde la antigüedad, por estrategias algorítmicas y geométricas, la ecuación actual se le atribuye al matemático hindú Al-Juarismi en la edad media (Baldor, 2017).

Ejemplo 14: Resolver la ecuación cuadrática siguiente: $3.x^2 - 2x + 4x^2 - 6 + 4.x = 3.x$

Respuesta: La ecuación debe ordenarse e igualarse a cero, esto es: $7.x^2 - x - 6 = 0$, cuya

solución es: $x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4.(-6).7}}{14} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 6.5574}{14}$ De donde se obtiene: $x_1 = 0.54$; $x_2 = 0.40$.

Ejemplo 15: Una roca es lanzada verticalmente hacia arriba a 12 m/s, desde una altura de 20 metros, y bajo la gravedad terrestre de $g = -9,8 \text{ m/s}^2$. ¿En qué tiempo la piedra golpea el piso?

Respuesta: Clásico ejemplo de Física en el movimiento vertical, cuya ecuación del tiempo queda como: $0 = 20 + 10T_v - 4,9T_v^2$. Ecuación cuadrática en orden inverso, cuya solución para

el tiempo de vuelo es $T_v = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4.(-4,9).20}}{-9,8} \Rightarrow T_v = \frac{-10 \pm 22,181}{-9,8}$ De donde se obtiene

los tiempos: $T_{v1} = \text{negativo que se descarta}$; $T_{v2} = 3,284$ segundos.

3.2) Potencias

Para las operaciones con los números o variables expresados en términos de potencia o radicación existen una serie de normas algebraicas que a continuación se describen, donde se dice de la expresión $(x)^n$ implica que la base “x” se multiplicará a sí misma “n” veces, es decir, el número de veces del exponente

- 1) $a^0 = 1$ (Si y solo sí, $a \neq 0$), toda potencia cero indica la división de una base por sí misma.
 2) $a^1 = a$. 3) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. ($a \neq 0$). 4) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 5) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ y 6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Para

una misma base; seguidamente para dos bases potenciadas y operadas se tiene que

7) $(a \cdot b)^m = a^m \times b^m$ y 8) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Donde todo número elevado a un exponente par siempre es positivo, y todo número elevado a un exponente impar mantiene el signo de base. Las normas son similares cuando los exponentes son racionales: $\text{Índice} \sqrt{\text{Radicando}} = \text{Raíz}$; es decir cuando la potencia es del tipo: Racional Propia, con la unidad como valor en el numerador, a continuación, estas normas.

9) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. 10) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. 11) $A \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{A^n \cdot b}$. 12) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. 13) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
 14) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[kn]{a^m}$. 15) $\sqrt[n]{a^m \cdot b^n} = b \cdot \sqrt[n]{a^m}$.

Los radicales con la misma base y exponente, o sea con igual índice y radicando se pueden sumar y restar, los radicales de índice par deben tener radicando no negativo, o sea ≥ 0 , porque la raíz resultada es un número con su opuesto, como acción de inversión de una potencia. Entonces un radicando negativo de un radical de índice par no existe en los números reales, se llama *Numero Complejo*, con sus normas respectivas, y no son ámbito del Cálculo diferencial, de la primera matemática universitaria o Matemática I.

Ejemplo 16: Expresa y resuelve las siguientes potencias a) 4^5 ; b) $8^{1/3}$; y c) $\frac{X^5 \cdot X^{5/2}}{X^2}$.

Respuesta: De la primera es: $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1.024$.

La segunda potencia es la expresión: $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.

La tercera al tener la base común queda como: $X^{(5 + 5/2 - 2)} = X^{(11/2)} = \sqrt{X^{11}}$.

3.3) Binomio potenciado, su factorización

Un binomio, es la expresión de suma o resta de dos variables, se llama *Potenciado* en un número real, de la forma: $(A + B)^n$, donde su desarrollo obedece al llamado triángulo del matemático italiano Nicolás Fontana, del Renacimiento, también atribuido a Blaise Pascal; como una matriz triangular secuencial en sumatorias internas, que permite obtener los coeficientes resultados del binomio potenciado, desde la potencia cero con resultado de la unidad, hasta la potencia deseada. Ver la siguiente figura 7, de este esquema hasta potencia 5.

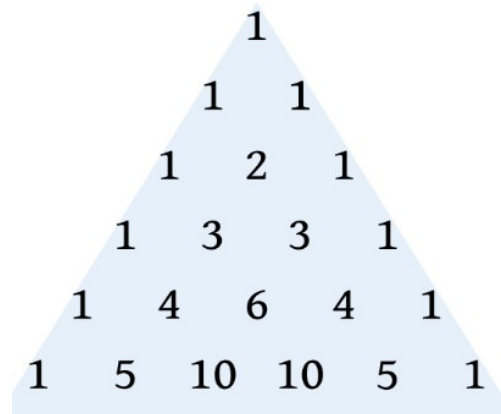


Figura 7: Triángulo de Pascal, (n = 5)

Existiendo los desarrollos comunes de: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Llamado notable, junto a su versión resta: $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$; o el desarrollo: $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, entre muchos otros establecidos.

El triángulo ofrece los coeficientes todos positivos si el binomio potenciado es una suma, e intercalado positivo negativo en los coeficientes respectivos, si el binomio es una resta; es decir, supongamos el binomio potenciado $(4 - 2)^3$, cuyo resultado es $2^3 = 8$. Con su desarrollo según el triángulo de Pascal en resta como: $4^3 - 3.(4^2.2) + 3.(4.2^2) - 2^3 = 64 - 96 + 48 - 8 = 8$. Aceptando que el desarrollo de Pascal busca el polinomio posible de cada binomio potenciado.

Seguidamente y diferente al binomio potenciado, son las suma o resta de variables a igual potencia, de la forma $A^n \pm B^n$, cuya factorización se logra al expresarla como: La potencia mínima de base por el llamado *Factor Conjugado*; el cual es un polinomio de grado exacto inferior al valor “n” dado, de tal forma que su producto genere las potencias originales. El factor conjugado inicia con el grado inferior en el primer elemento y secuencialmente se disminuye a la vez que aumenta el grado del segundo elemento multiplican te, terminando con el segundo elemento de la suma resta, con potencia del grado exacto inferior de las potencias originales; esto es: $A^n - B^n = (A - B).(A^{n-1} + A^{n-2}.B + A^{n-3}.B^2 + \dots + A.B^{n-1})$.

Con la nota de que si las potencias se restan todos los elementos del factor conjugado son positivos, y si las potencias se suman los elementos de la conjugada se alternan con el signo menos iniciando en positivo (Tirado et al., 2021).

Las factorizaciones básicas son las de números enteros, como: La del factor común en todos los términos, seguida de la factorización por separación y agrupación de binomio semejantes, también la factorización por ensayo de dos binomios producto, siendo común la del grado dos vista, con su primer término en la unidad, $a = 1$; es decir: $x^2 + bx + c$, cuya factorización por habilidad en diferencia al cuadrado origina los binomios: $(x + d).(x - e)$; donde el coeficiente “b” es la diferencia d, e y el coeficiente “c” es el producto entre d y e.

Ejemplo 17: Factorice los siguientes binomios, potenciados: a) $X^3 + 8$. b) $A^2 - X^2$. c) $X^5 - 32$.

Respuesta: a) $X^3 + 2^3$, primero se expresan las bases a igual potencia en este caso de suma, por lo que el término conjugado debe intercambiar el signo empezando por positivo; luego se factoriza cuando se puede expresar como el producto de la base por el factor conjugado, construido a partir de la potencia de grado 2; esto es: $X^3 + 2^3 = (X + 2).(X^2 - X.2 + 2^2)$.

En efecto el factor conjugado es de grado 2, porque su producto con la base produce el grado tres original: $(X + 2).(X^2 - 2.X + 4) = X^3 - 2.X^2 + 4.X + 2.X^2 - 4.X + 2^3 = X^3 + 8$.

b) $A^2 - X^2 = (A - X).(A + X) = A^2 + A.X - A.X - X^2$. Un clásico exclusivo de la potencia 2, que no debe generalizarse a otras potencias; con la nota que la suma de esta potencia: $(A^2 + X^2)$, no posee factor conjugado real, para su factorización.

c) $X^5 - 2^5$, se separa en el producto del binomio base por el factor conjugado o polinomio de grado 4 para este caso de la forma: $(x - 2).(X^4 + 2.X^3 + 4.X^2 + 8.X + 16)$, cuyo producto resulta de confirmación: $X^5 + 2.X^4 + 8.X^3 + 16.X - 2.X^4 - 8.X^3 - 16.X - 32$. Que al operarse eliminando los factores iguales con signos opuestos, produce la resta de potencia quinta original.

El factor conjugado también puede resultar como una división cuando se busca una potencia fracción menor a la unidad, caso interesante de las radicales, veamos el ejemplo siguiente que ilustra esta situación en dos ejercicios

Ejemplo 18: Factorice los siguientes binomios radicales, a) $^3\sqrt{x} + 2$; y b) $3 - \sqrt{x}$.

Respuesta: a) El binomio a raíz cúbica $^3\sqrt{x} + ^3\sqrt{8}$, será el resultado de la base $(x + 8)$, dividido entre el factor conjugado que debe operar una potencia que convierta la unidad en una potencia de fracción tres o $1/3$; o sea, la conjugada para este caso debe ser de potencia $-2/3$, o de dos tercios dividiendo con su respectiva degradación a $1/3$ por termino, y recordando que para base de suma el factor conjugado debe alternar el signo menos, veamos

$$^3\sqrt{x} + ^3\sqrt{8} = \frac{(x + 8)}{(x^{2/3} - \frac{(x + 8)}{^3\sqrt{8x^{1/3} + \sqrt{64}}})} = \frac{(x^{2/3} - \frac{(x + 8)}{2.x^{1/3} + 4})}{1}$$

producto: $(^3\sqrt{x} + ^3\sqrt{8}).(x^{2/3} - 2.x^{1/3} + 4) = x^{1/3} - 2.x^{2/3} + 4.x^{1/3} + 2.x^{2/3} - 4.x^{1/3} + 8 = x + 8$.

b) El binomio a raíz cuadrado como: $\sqrt{9} - \sqrt{x}$, será el resultado de la base $(9 - x)$, por el factor conjugado de potencia $-1/2$, o dividido por un binomio de potencia $1/2$. Esto es

$$3 - \sqrt{x} = \frac{(9 - x)}{\sqrt{9} + \sqrt{x}}$$

Que se demuestra con el producto: $(3 - \sqrt{x}).(3 + \sqrt{x}) = 9 + 3.\sqrt{x} - 3.\sqrt{x} - \sqrt{x^2}$.

Al producir el binomio deseado: $9 - x$.

Cerrando esta temática con la lógica que a una igual base se pueden operar sus potencias expresando la potencia final según exista producto o división; en ese sentido se llama en matemáticas “Racionalización”, al proceso mediante el cual se logra eliminar el radical del denominador de una fracción propia, al operarlo por producto similar con la potencia convertida del numerador; esto es digamos la fracción de: $1 / \sqrt{x} = \sqrt{x} / (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} / x$.

No se debe confundir una secuencia de factores que se suman o restan con una *Sucesión o Serie*, que viene a ser un “Conjunto de números letras o símbolos, con una secuencia lógica en términos algebraicos y alfabéticos con operaciones algebraicas o combinada que la caracterice, denominado elemento de razón” (Tirado, et al., 2021); en donde la idea general es conseguir términos faltantes, sean o estén estos de inicio, al final de existir su polo, o internos dentro de la secuencia.

Ejemplo 19: Construya el número irracional *Áureo*, a partir de la sucesión de Leonardo de Pisa (conocido como Fibonacci en el Renacimiento), aceptando que este se produce de la división del mayor término posible entre el anterior: $A = \frac{X_{(n+1)}}{X_n}$, cómo un número superior a la unidad.

Respuesta: Como cada término siguiente en esta sucesión resulta de la suma de los dos términos anteriores, entonces se escribe: $X_{(n)} = X_{(n-1)} + X_{(n-2)}$. Seguidamente con la fórmula para el número áureo de los dos últimos términos, se descubre que su inverso es la división del anterior por el número siguiente como: $1/A = \frac{X_{(n-1)}}{X_n}$, de tal forma que se puede escribir que: $1 +$

$1/A = A$. Que produce la ecuación cuadrática: $-A^2 + A + 1$, cuya solución mayor a la unidad es con el término positivo de: $A = \frac{1 + \sqrt{1-4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Número irracional: 1,6180339...

aceptado a siete cifras significativas como: 1,618034; número muy usado en los cálculos financieros; compare este resultado con el número obtenido en el ejercicio propuesto N° 8.

3.4) Polinomios

El polinomio es una expresión algebraica tipo ecuación formada desde dos o más términos que contienen una parte numérica llamada coeficientes de la variable, las cuales están potenciadas al llamado “grado del polinomio”, y en operación algebraica de suma, resta, producto e incluso división entre sí; los polinomios se expresan en orden cuando el primer término y en secuencia esta la mayor potencia, y se denominada completos cuando tienen todos los términos desde la potencia “n” hasta el valor $n = 0$, o el llamado número independiente (Tirado et al., 2021).

Es decir, de la forma general de: $AX^n + BX^{n-1} + CX^{n-2} + \dots + DX + E = 0$. Veamos algunos ejemplos y su descripción

a) $2 + x^2 = 4$. Polinomio de grado dos incompleto que debe expresarse en el orden: $x^2 - 2 = 0$, en donde falta el término con la variable potenciada a la unidad.

b) $X^3 - 4X + 2X^2 = 4$. Polinomio de grado tres completo, cuya orden es: $X^3 + 2X^2 - 4X - 4 = 0$. También llamada expresión “Canónica” al ser igualado al cero (llamada raíz horizontal).

c) $3/x + X = 4$. Polinomio de grado dos completo, cuyo orden es: $X^2 - 4X + 3 = 0$; cuyas soluciones de las raíces salen por la resolución de una ecuación cuadrática vista.

Entre una infinidad de posibilidades, donde pueden además existir polinomios de varias variables potenciadas, según sea lo que representen, recordando que, para el Cálculo Diferencial o Matemática del plano, solo debe existir dos variables de forma explícita, es decir, que se pueda lograr el despeje de una variable en función de la otra, generalmente de la forma $y = P(x)$, que se expresa como la variable dependiente igual al polinomio de la variable independiente. Es decir, los polinomios son relaciones del plano coordenado, que pueden ser funciones, conceptos a ser vistos y desarrollados en el capítulo I (Santillana, 2010).

Los polinomios pueden operarse entre sí solo entre términos iguales por suma y resta, el producto entre ellos es una extensión de todos los términos contra todos los términos de cada polinomio factor, y la división es un interesante procedimiento; cuyo resultado, si el denominador es de grado menor al polinomio numerador, es de otro polinomio cuyo grado dependerá de la operación de las potencias involucradas más un factor denominado “Resto”.

Ejemplo 20: Realice las operaciones de: Suma, resta y el producto entre los siguientes dos polinomios: $P(x) = 2X^2 - 6$. Con $Q(x) = 3X - X^3 + 2$.

Respuesta

a) La suma es: $P(x) + Q(x) = -X^3 + 2X^2 + 3X - 4$. Polinomio de grado tres completo y en orden.

b) La resta es: $P(x) - Q(x) = X^3 - 2X^2 - 3X - 8$.

c) El producto es: $P(x).Q(x) = (2X^2 - 6).(-X^3 + 3x + 2) = -2X^5 + 6X^3 + 4X^2 + 6X^3 - 18X - 12$. Polinomio de grado cinco incompleto, al faltar el término con el grado de $n = 4$. Que expresado en orden es el polinomio: $h(x) = -2X^5 + 12X^3 + 4X^2 - 18X - 12$.

Ejemplo 21: Realice la división $Q(x)$ entre $P(x)$, de los polinomios del ejemplo 9.

Respuesta: La división es: $D(x) = (-X^3 + 3X + 2) / (2X^2 - 6)$.

Cuyo primer término que se usa para iniciar la secuencia del producto, para restar al numerador es el término $-0,5X$ que produce la resta: $-X^3 + 3X + 2 - (-X^3 + 3x) = 2$.

Interesante resultado al obtenerse un polinomio de grado inferior al grado del divisor, en este caso un número, que se asume como grado cero; es decir, la respuesta a esta división de polinomios es: $D(x) = Q(x) / P(x) = -0,5X$, con termino final o *Resto* = 2. Resultado a confirmar al realizar producto entre $D(x).P(x)$, cuyo resultado deber ser $Q(x) - 2$.

En resumen, la división es una operación cíclica de primero encontrar un polinomio cuyo grado al ser multiplicado por el grado del divisor produzca el grado del dividendo, con la

consecuencia de operación de todos los términos, en donde se dividen los coeficientes con su ley de signos más las normas de la potencia, hasta lograr el resto con su característica, el cual incluso puede ser cero significando una división exacta.

Porque al recordar el procedimiento conjugado como elemento divisor se puede afirmar que: Un polinomio se puede expresar como una división de polinomios; en ese sentido con las diferentes estrategias para factorizar binomios potenciados vistos, se puede aplicar el procedimiento de *Cancelar* factores varios igualados en un cociente.

Un interesante método para la factorización entera de polinomios es la estrategia de coeficientes en secuencia de *Paolo Ruffini*, donde el polinomio ordenado es procesado por un entero que resulte ser divisor del término final llamado independiente (Baldor 2017).

La estrategia inicia con el primer coeficiente que se multiplica por el entero escogido y se suma al siguiente coeficiente, que viene a producir el siguiente valor a multiplicar y sumar, en una secuencia que logra la primera *Raíz* del polinomio, solo si anula el último término, valor que se expresa con signo cambiado en el binomio factor; estrategia valida en el tema de los límites indeterminados algebraicos de una función cociente, que se verán en la Matemática I.

Ejemplo 22: Factorice por la estrategia de “Ruffini” el siguiente polinomio, $x^3 - 8x^2 + 16x - 5$.

Respuesta: Las llamadas raíces posibles o términos a factorizar son los valores de ± 1 y ± 5 , por el último término. Entonces digamos que se escoge el número - 1, este valor produce la secuencia de: $-1 \times 1 - 8 = -9$, $-9 + 16 = 7$, $-7 - 5 = -12$; que no es nulo, de donde se concluye que el valor de la unidad negativa no es una raíz a igual si probamos el número uno positivo.

Seguidamente usando el número 5 se tiene la secuencia: $5 - 8 = -3$, $-15 + 16 = 1$, $1 \times 5 - 5 = 0$, de donde se descubre que el valor - 5 es raíz del polinomio dado con los coeficientes: (1, -3, 1); es decir, el polinomio original se puede escribir como: $(x - 5).(x^2 - 3x + 1)$, o producto de factores de menor potencia. Ver la secuencia en el siguiente esquema al lado.

	1	- 8	16	- 5
5		5	- 15	5
	1	- 3	1	(cero)

Ejercicios propuestos del tema 3

21) Encuentre el valor de las variables "x" e "y" del sistema: $2x - y = 3$. Con $-2y + x = 0$.
R: $x = 2$, $y = 1$.

22) Encuentre las variables, del siguiente sistema de tres ecuaciones

$X + y + z = 4$. $3x - 2y + z = 0$. $x + 4y - 2z = -3$. **R: $x = -3/7$; $y = 22/21$; $z = 71/21$.**

23) Calcule y confirme el resultado de: $(3 - 1)^3$. **R: $2^3 = 8$; $(27 - 3 \cdot (9) + 3 \cdot (3) - 1 = 8$.**

24) Desarrolle el siguiente binomio: $(2x - 2)^4$. **R: $16x^4 - 64x^3 + 96x^2 - 64x + 16$.**

25) Factorice y simplifique el siguiente cociente: $\frac{(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)}{(4 - 4x + x^2)}$ **R: $2 - x$.**

26) Factorice y exprese por conjugada: $(\sqrt[3]{x} - 1)$. **R: $\frac{(x - 1)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$**

27) Racionalice por conjugada el siguiente cociente radical: $\frac{(\sqrt{x+2} - 2)}{(2 - x)}$. **R: $\frac{-1}{\sqrt{x+2} + 2}$**

28) Divida los siguientes polinomios $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. $Q(x) = x - 1$. **R: $x^2 - 2x - 2$**

29) Factorice por la estrategia entera de Paolo Ruffini el polinomio: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.
R: $(x - 2)^2 \cdot (x - 3)$

30) Factorice los polinomios del siguiente cociente y simplifique: $\frac{x^4 - 16}{(x^2 + 4)}$ **R: $(x - 2) \cdot (x + 2)$.**

TEMA 4: EL PLANO CÓMO REFERENCIA

El plano cartesiano es un esquema de dos rectas perpendiculares que representan a los infinitos puntos en la recta ($y = 0$) denominado abscisa o *Eje horizontal*, y a los infinitos puntos en la recta o *Eje vertical* ($x = 0$) denominado ordenada, en donde se representan las parejas de puntos por su ubicación con respecto a él *Origen*, o punto $(0; 0)$, en el orden $(x; y)$.

El plano se caracteriza por ser positivo a la derecha y hacia arriba en la hoja que se dibuje, y con signo negativo u opuesto en las rectas a la izquierda y hacia abajo, aceptando de mejor manera que los valores opuestos no son menores como se tiende para afirmar en la actualidad; es decir según (Tirado, 2020) “Los números todos en horizontal o vertical son crecientes en la medida que se alejan del origen, en ambos sentidos”, aceptando el infinito como no real.

Ahora bien, la representación de un punto o de cualquier línea significativa de una relación entre las variables del plano, se establece como un dibujo o expresión geométrica, pese a que por lógica tanto el punto sin dimensiones como la recta sin grosor no deberían verse.

El plano se divide en cuatro cuadrantes o sectores característicos según el signo de la recta de la ordenada y de la abscisa, siendo el primer cuadrante (I), el de la abscisa y ordenada positivas, el segundo cuadrante (II), el de la abscisa negativa y la ordenada positiva, el tercero (III), y el de la abscisa y la ordenada negativas y el cuarto cuadrante (IV), en donde la ordenada es negativa y la abscisa positiva; ver figura 8. El plano se orienta en sentido *Antihorario* o sentido sideral del movimiento de la bóveda celeste, observada desde la antigüedad; o sea puntos ubicados por ángulos desde la recta horizontal X^+ .

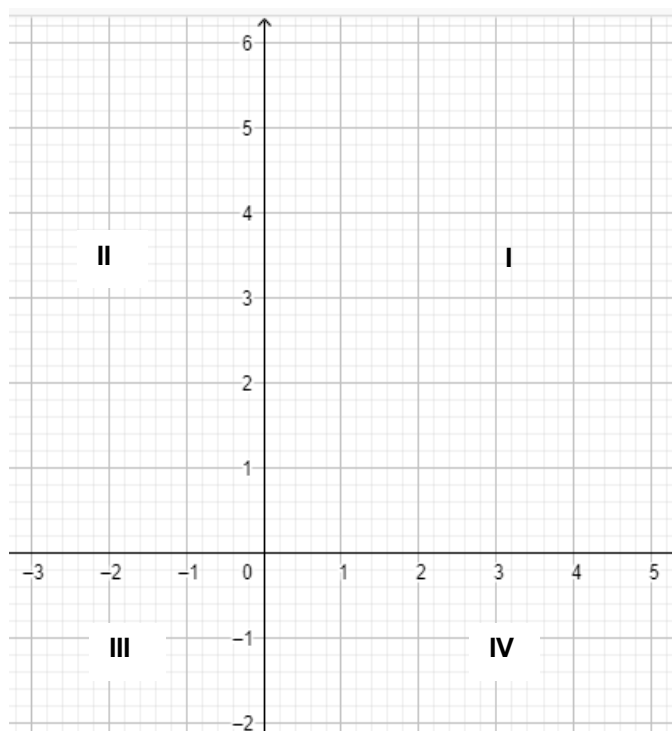


Figura 8: El Plano Coordenado, y sus cuadrantes

. Se comenta en la historia de las matemáticas que el plano cartesiano no fue una creación propia del filósofo René Descartes, conocedor de algunos conceptos matemáticos; la idea y representación fue de uno de los matemáticos de la época que lo ideó para explicarle el comportamiento de una relación, que éste no entendía por carecer según su teoría de aprendizaje, de: La visión y esquema requerido para que la mente humana pudiese aplicar la abstracción y síntesis de la idea que se enseña.

En su emoción y sorpresa de haber aprendido esta concepción, quedo su nombre para la denominación del plano de *Descartes*, que paso a llamarse *Cartesiano*, y que en la actualidad se denomina plano Coordenado; agregándose en la historia que en una oportunidad enfermo en su cama, el filósofo observó una mosca volar posándose en el techo y la pared de su habitación; que son planos o proyecciones de nuestro mundo espacial, por lo que completó la idea de la representación en dos dimensiones como idónea para su entendimiento y enseñanza, en virtud que la escritura, la pizarra y las hojas usadas en los cuadernos todos, son planos.

El plano entonces desde una vista analítica es el conjunto de parejas ordenadas de números reales $(x; y)$ Tal que x con y , pertenezcan a los números reales, de tal forma que se puede expresar como: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, de puntos llamada coordenada *Rectangular*.

Ejemplo 23: Que distancia menor o en línea recta hay entre los puntos señalados del plano como A: $(-4; 0)$ y C: $(3; 5)$; haga su gráfica y explique la lógica del resultado.

Respuesta: El segmento de recta que une estos puntos como distancia mínima o más corta, se puede asumir como la Hipotenusa de un *Triángulo Rectángulo*, en virtud de los ejes coordenados tiene esta particularidad, en donde sus lados o catetos serían, el lado vertical de altura 5 y el lado horizontal de largo 7. Estos valores se obtienen con las restas: $3 - (-4) = 7$, y $5 - 0 = 5$; respectivamente, y pueden asumirse como distancias absolutas de resultar con sentido negativo.

La distancia buscada se calcula por el *Teorema de Pitágoras* que establece que la hipotenusa al cuadrado será igual a la suma de sus catetos al cuadrado, como:

$D = \sqrt{7^2 + 5^2} = 8,602$ unidades. En la siguiente figura 9, se puede apreciar este resultado, donde el segmento "f" tiene distancia 7, el segmento "g" distancia 5, y la hipotenusa "h" entre los puntos A y C. Con la lógica que la distancia obtenida es mayor a cualquiera de los lados perpendiculares; que es en sí uno de los primeros fundamentos de la *Geometría*.

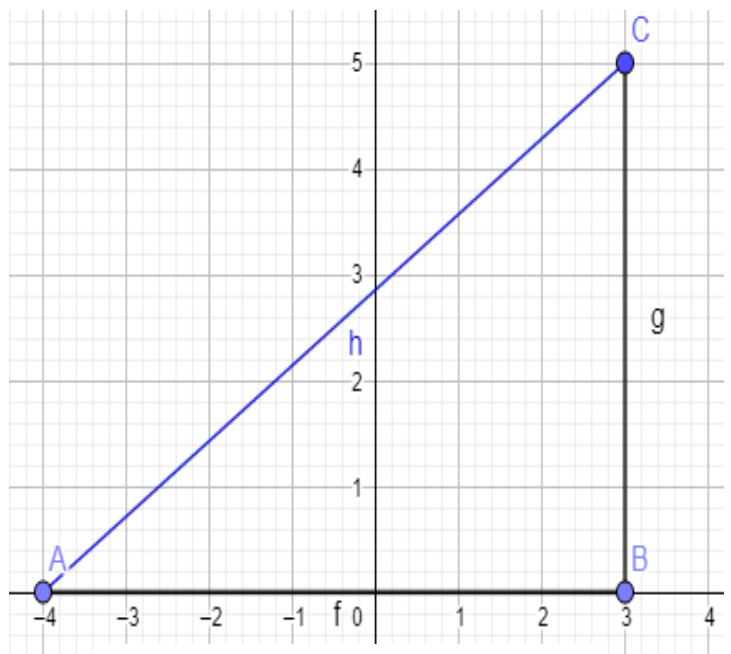


Figura 9: Distancia entre A y C, dados

Ejemplo 24: Del ejemplo 23 anterior estime la *Pendiente* (m), del segmento AC y su ángulo de inclinación con respecto a la horizontal.

Respuesta: La llamada pendiente se refiere a la inclinación de una recta o segmento, siendo positiva cuando crece hacia arriba en avance a la derecha, y negativa o en *Declinación* cuando baja en avance igual a la derecha o sentido positivo. La pendiente es el cociente: $m = \frac{\text{Elevación}}{\text{Avance}}$

Que del ejemplo 23 se calcula: $m = \frac{(5 - 0)}{(3 - (-4))} = 5/7 = 0,7143$.

Valor positivo que muestra una inclinación creciente, cuyo ángulo en grados se calcula con la función trigonométrica de la *Tangente del Ángulo* ($\text{Tan}\theta$), la cual es igual a la pendiente; es decir **$\text{Tan}\theta = m$** . Entonces para este ejemplo la inclinación es: $\theta = \text{Tan}^{-1}(0,7143) = 35,54^\circ$.

4.1) Orientación Polar y el Rumbo

La orientación del tipo *Polar* establece que el plano tiene un giro antihorario de 360° desde la "X" positiva hasta su retorno, con 90° por cada eje coordenado; luego toda distancia desde un punto dado al origen fuera de los ejes es una hipotenusa de un triángulo rectángulo que junto a su ángulo de giro se denomina coordenada polar en el plano.

Entonces el punto A: (2; 60°), es aquel ubicado a 2 unidades del origen con un ángulo de 60° desde la horizontal positiva; es decir, en el primer cuadrante. De tal manera que su coordenada rectangular se obtiene de la forma: (2.Cos 60° ; 2.Sen 60°); como siguiente aplicación del triángulo Pitagórico con resultado de: (1; 1,732) unidades.

De tal forma que la coordenada polar define el segmento de recta que parte desde el origen hasta el punto obtenido, con magnitud de 2 y ángulo de 60° ; es decir, digamos la coordenada polar del punto B: (3; 200°), se refiere a un segmento de recta en declinación en el tercer cuadrante, con magnitud de 3 unidades y ángulo de 20° desde la horizontal negativa (180°), con resultado rectangular de: (- 2,819; - 1,026); ver la siguiente figura 10, en donde aparecen estos dos puntos en sus dos orientaciones.

Nace así el concepto de *Vector* como (Tirado, 2015) "Segmento de recta orientado", que facilita la ubicación de un punto en el plano o en el espacio coordenado.

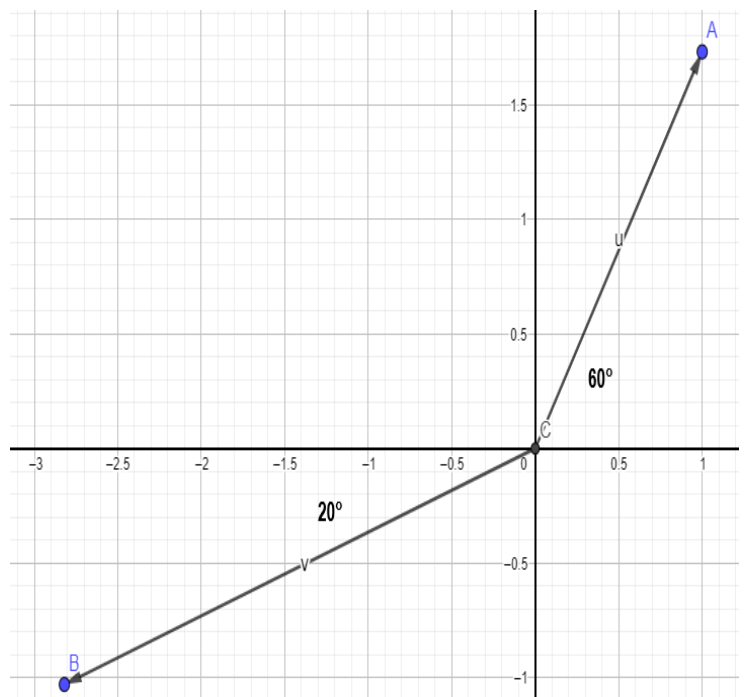


Figura 10: Coordenadas de los puntos "A" y "B".

Cuando en su punta desde el origen está el punto coordenado rectangular, su magnitud es la hipotenusa o distancia desde el origen, su dirección o inclinación es el grado o tangente inversa de la pendiente, y su flecha característica indica el sentido o cuadrante de ubicación. En la figura son los vectores “u” y “v” respectivamente, que parten desde el origen o punto “C”, con sus ángulos característicos.

Seguidamente la orientación del tipo *Rumbo* es el asumido por los puntos Cardinales de nuestro planeta ubicados en cada eje coordenado en nuestra referencia de cuaderno, de tal forma que el Este es la horizontal positiva y el Oeste su opuesto negativo; de manera similar con el Norte en la “Y” positiva y el Sur en la vertical negativa. La orientación rumbo se expresa para la coordenada polar (2; 60°) como dos unidades a 60° al Norte del Este, y para la coordenada polar (3; 200°) como 3 unidades a 20° al Sur del Oeste; es decir, a manera de lectura de ubicar el cardinal final en función de elevación o declinación del primer cardinal.

Ejemplo 25: Encuentre la coordenada rectangular, el vector origen con su rumbo, que ubica el punto (4; 320°), en el plano coordenado.

Respuesta: La coordenada polar dice que el punto está a 4 unidades del origen en el cuarto cuadrante, donde la horizontal es positiva y la vertical negativa, con un ángulo de 50° desde este eje; es decir el rumbo del vector será de 50° al Este del Sur.

El punto en coordenada rectangular se obtiene de la forma: (4xSen50; 4xCos50°), en donde se invierten las funciones clásicas de la trigonometría, por estar el ángulo dado, con respecto a la vertical; siendo su resultado en consideración del cuadrante de: (3,06; - 2,57). Seguidamente el vector buscado, expresado en función de los unitarios que representan los ejes coordenados (letra “i” para la horizontal y letra “j” para la vertical), es: $\vec{a} = (3,06\mathbf{i} - 2,57\mathbf{j})$ unidades.

Entonces un vector con su magnitud, dirección y sentido se construye en el plano o espacio cuando se hace la resta entre el punto en su *Punta* menos el punto en su *Cola*, cuando este último es el origen coordenado el vector tiene las coordenadas rectangulares del punto, siendo su módulo y ángulo direccional, su coordenada polar.

4.2) El espacio coordenado

El espacio coordenado es la representación de las direcciones perpendiculares en los ejes X, Y, y Z con sus vectores unitarios: (i, j, k), de tal forma que el eje “Z” representa lo frontal o profundidad del plano estándar; es decir, se habla entonces de ocho Octantes en el espacio coordenado según la orientación y signo del punto a ubicar, cuando coexisten el plano XY clásico, el plano XZ o *Piso*, y el plano YZ, llamado plano *Pared* (Tirado 2015).

En la siguiente figura 11, se hace un esquema clásico de un salón de clases ubicado en el primer octante, el origen en su esquina inferior izquierda, con dimensiones de ese paralelepípedo de: 6 metros de ancho, 3 metros de alto y 10 metros de profundidad; en él se dibujan los puntos de sus ocho esquinas en sentido anti horario como: (A, B, C, D, E, F, G, y H), con un vector diagonal mayor, en color azul celeste, que va desde el origen o punto "D" hasta la esquina superior derecha del aula, o punto "F". Cuyo módulo resulta ser una doble hipotenusa, como la raíz cuadrada de sus catetos al cuadrado.

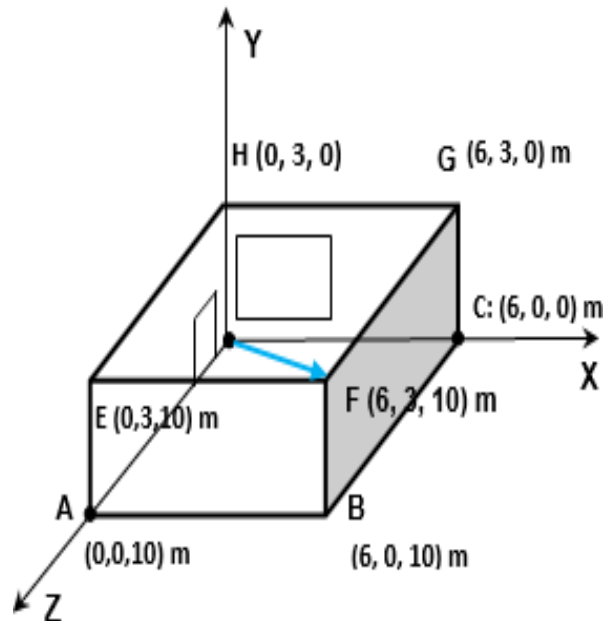


Figura 11: Esquema espacial de un aula.

El vector diagonal en es la mayor distancia contenida por el paralelepípedo, a pesar de que visualmente no lo parezca, (Primera nota importante en el mundo espacial: las distancias no son las que aparentan por estar proyectadas o aplastadas contra el plano de la hoja). Luego por la lógica de los puntos este vector es: $\vec{D} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. Cuya magnitud es en principio la raíz cuadrada de $Dx^2 + Dy^2 + Dz^2$, con este cateto como la diagonal de ese plano pared sombreado; entonces por doble hipotenusa se obtiene su módulo: $|\vec{D}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 10^2} = 12,0416$ metros.

Con los *Ángulos Directores* con cada uno de ejes coordenados calculados de la siguiente forma $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{12,04}\right) = 60,11^\circ$. Con el eje "X"; $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{12,04}\right) = 75,57^\circ$. Con el eje "Y". Cerrando con: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{12,04}\right) = 33,84^\circ$. Con el eje "Z".

Importante hay que aclarar que el espacio no es tema de la primera matemática universitaria, sin embargo, se agrega aquí como conocimiento a considerar y consecuente en el mundo de la orientación de un punto, sea este del plano clásico o del espacio.

Ejemplo 26: Si un vector se construye desde el punto en el piso (3; 0; 5) hasta el punto ubicado en el espacio (- 4; 5; 3), expréselo en función de sus unitarios, diga en que octante se encuentra representado, y cuál es su magnitud o distancia entre esos puntos.

Respuesta: El vector con la resta punta menos cola es: $\vec{A} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Se corresponde al tercer octante con los ejes "X" e "Y" negativos, pero en frontal "Z", y su módulo es de 8,832 unidades.

Ejercicios propuestos del tema 4

- 31) Que punto entre, A: (0; 7) y B: (- 4; - 5), está más lejos del origen, y diga en que cuadrante esta cada uno. **R: A, es el más lejano, está sobre el eje vertical; B está en el tercer cuadrante.**
- 32) Qué distancia hay entre los puntos (5; 0) y (0; 6). **R: 7,81 unidades.**
- 33) Que pendiente tiene el segmento que hace de hipotenusa, del ejercicio anterior y que ángulo posee con la horizontal. **R: $m = -6/5$. $\theta = 50,194^\circ$.**
- 34) Qué ángulo con la vertical tiene el vector $\vec{b} = (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$. **R: $36,87^\circ$**
- 35) Si una gaviota vuela 20 metros al Norte, y luego vuela 20 metros al Este, calcule a que distancia esta del punto de partida, ¿Qué Rumbo, requiere para volver?
R: 28,284 metros. 45° al Sur del Oeste.
- 36) Si un perro camina 40 metros al Oeste, y luego 30 metros a 30° al Sur del Oeste. Calcule a que distancia esta del punto de partida. **R: 67,664 metros.**
- 37) Del problema anterior calcule el ángulo direccional del segmento resultado, y el rumbo requerido para que el perro regrese a su punto de partida en línea recta.
R: $12,81^\circ$ al Norte del Este.
- 38) Qué distancia hay entre los puntos espaciales C: (5; - 2; 0) y D: (4; 0; 6). **R: 6,403 unidades.**
- 39) Construya el vector $\vec{C} \rightarrow \vec{D}$, y calcule su dirección espacial; es decir, con cada eje director.
R: $(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$. [$98,9^\circ$; $71,8^\circ$; $20,4^\circ$]
- 40) De la figura 9, calcule que distancia hay en la diagonal entre los puntos CA en el piso del salón de clase. **R: 11,662 metros.**

TEMA 5: TRIGONOMETRÍA BÁSICA

El estudio de los triángulos como figuras geométricas, fue el origen de los primeros teoremas matemáticos que existen en la humanidad, en consideración de su: Tipología, característica, área, relación de sus lados y ángulos internos, que conducen a una serie de cálculos y nociones relativas muy interesantes; en la siguiente figura 12, se aprecia una clasificación general de los triángulos según sus lados, (Tirado et al., 2021)

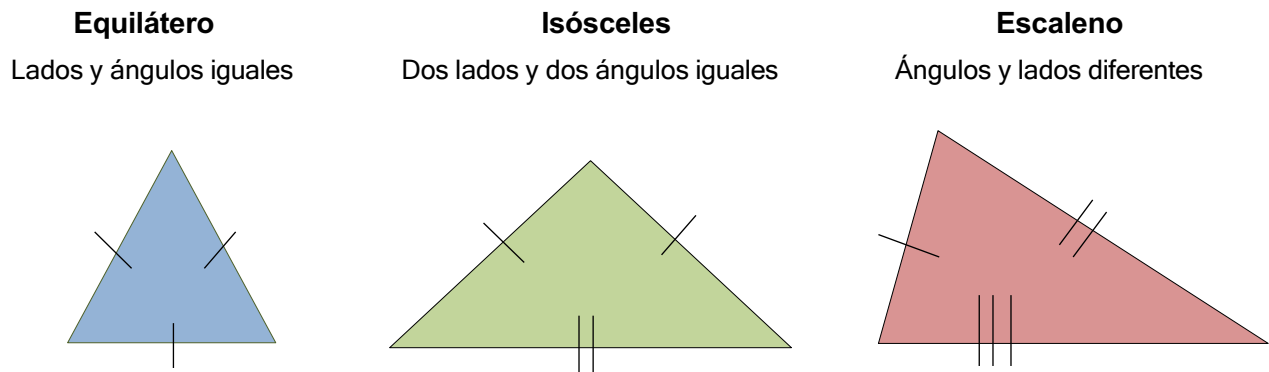


Figura 12: Diferentes tipos de triángulos en relación con sus lados

Los triángulo a su vez se denominan: *Acutángulo*, cuando sus ángulos internos son agudos o menores al ángulo recto; *Obtusángulo*, cuando tiene un ángulo obtuso o superior a este valor; y *Recto*, cuando tiene un ángulo de 90° , también llamado triángulo Pitagórico, con su lado mayor frontal al ángulo recto, llamado hipotenusa (H), y los otros lados catetos, que dan origen al famoso teorema atribuido al filósofo Pitágoras de Samos, en donde los lados de su triángulo tienen la relación: $H^2 = ca^2 + co^2$.

Donde el Seno se relaciona con el llamado *Cateto Opuesto* al ángulo de estudio o lado frontal, y el Coseno con el *Cateto Adyacente*, o que esta junto a la hipotenusa; a partir de estas funciones se generan las funciones: Cosecante, Secante, Tangente y Cotangente, A continuación, estas funciones, en relación con los lados y ángulos de un triángulo recto, según la figura 13.

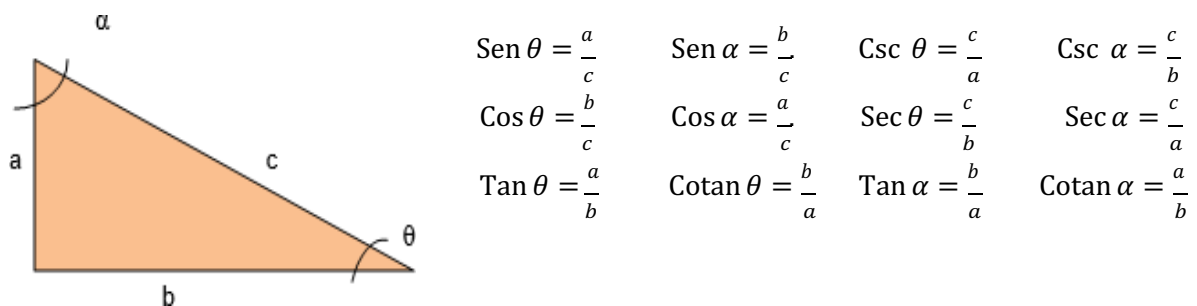


Figura 13: Funciones trigonométricas, según ángulo y lados de un triángulo

De donde se desprende que, para ángulos *Complementarios*, o que su suma sea igual a los 90° se tiene que: $\text{Cosa} = \text{Sen}\theta$, y viceversa.

Seguidamente la sumatoria de los ángulos internos de todo triángulo es 180° y de sus ángulos externos 360° ; demostración geométrica con rectas paralelas a cada uno de sus lados, en donde los ángulos se expresan afuera y constituyen una recta. Ver figura 14, al lado de estas líneas.

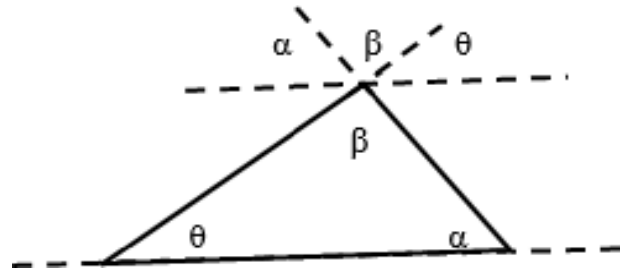


Figura 14: Geometría de los 180° de todo triángulo

5.1) Leyes del Seno y del Coseno

Seguidamente en un triángulo escaleno también existen las relaciones entre sus lados y ángulos internos, denominas: Ley de Seno y la Ley del Coseno, provenientes del producto vectorial cuando sus lados asumen esta condición, a saber y según la siguiente figura 15, de un triángulo cualquiera o Escaleno como generalidad, para deducir estas leyes

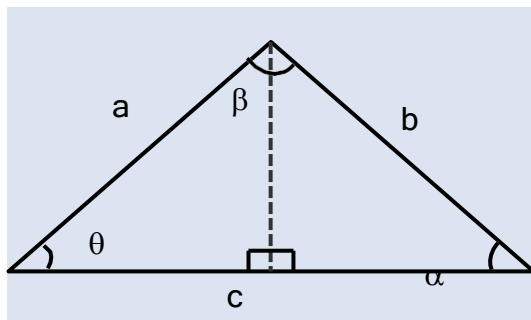


Figura 15: Triángulo Escaleno, con ángulos internos α , β , y θ . Y de lados a , b , y c .

Ley de Seno: En todo triángulo la medida de sus lados es directamente proporcional a los Senos de sus ángulos opuestos, o los llamados ángulos en vértices: $\frac{\text{Sen}\theta}{b} = \frac{\text{Sen}\beta}{c} = \frac{\text{Sen}\alpha}{a}$.

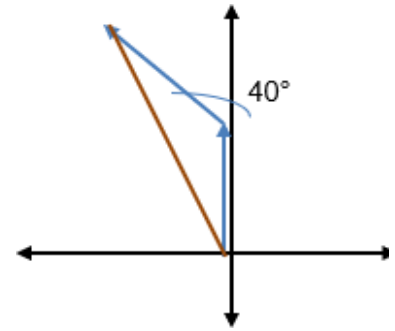
Ley del Coseno: En todo triángulo, el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estos, por el Coseno del ángulo de este vértice, como ángulo interno; entonces sus tres posibilidades son

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2(ab) \cdot \text{Cos}\beta. \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2(ac) \cdot \text{Cos}\theta. \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2(bc) \cdot \text{Cos}\alpha$$

Estas leyes permiten el cálculo de los ángulos internos y los lados de cualquier triángulo e incluso de combinaciones de triángulos con pocos datos; para la Ley del Seno se requiere un ángulo y dos lados, y para la Ley del Coseno se requiere dos lados y su ángulo vértice.

Del triángulo Pitagórico con una hipotenusa de la unidad y junto al estudio del llamado círculo trigonométrico que a continuación veremos, es que se definen las llamadas Funciones Trigonómicas del Seno y del Coseno, como las primeras funciones trascendentes.

Ejemplo 27: Un perro sale de su casa ubicada en el origen y camina 20 metros en la vertical positiva, luego corre en el segundo cuadrante a 40° de la vertical unos 10 metros. Calcule la distancia recta desde su punto de partida hasta dónde llega por la Ley del Coseno, y la dirección de esta recta con respecto a la horizontal por la Ley del Seno; ver esquema al lado.



Respuesta: El ángulo interno entre los movimientos es de 140° , entonces la Ley de Coseno indica que: $D^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot (20) \cdot (10) \cdot \cos 140^\circ$.

Que ofrece el resultado de $D = 28,3975$ metros. Luego el ángulo de esta recta inclinada en el vértice origen del triángulo, llamado (Tita θ), sale por la Ley del Seno como: $\frac{\text{Sen}\theta}{10} = \frac{\text{Sen}140}{28,4}$.

Con resultado de $13,08^\circ$. Entonces esa recta esta inclinada en $76,92^\circ$ con la horizontal.

Ejemplo 28: En un triángulo escaleno de ángulos internos: 100° , 60° y 20° , con el lado opuesto al ángulo de 60° de 10 metros; calcule sus otros lados por las leyes del Seno y del Coseno.

Por la ley del Seno: $\text{Sen}(100^\circ) / b = \text{Sen}(60^\circ) / 10 \rightarrow b = 11,37$ metros.

Respuesta: Luego: $\text{Sen}(20^\circ) / c = \text{Sen}(60^\circ) / 10 \rightarrow c = 3,95$ metros.

Por la ley del Coseno: $b^2 = 10^2 + (3.95)^2 - 2(10)(3.95)\cos 100^\circ = 129,32 \Rightarrow b = 11,372$ metros

Luego: $c^2 = 10^2 + (11.3716)^2 - 2(10)(11.3716)\cos 20^\circ = 15,636 \Rightarrow c = 3,954$ metros.

5.2) Ángulos y sus funciones

Los ángulos se llaman *Agudos* cuando son menores de los 90° , se llama ángulo *Recto* con este número, y *Obtuso* cuando son mayores a este valor, siendo el ángulo Llano el de 180° . Dos ángulos cuya suma sea 180° se llaman *Suplementarios*. El tema de los ángulos agrega una relación con el giro sideral o Antihorario mencionado en los cuadrantes del plano, de un punto en una circunferencia centrada en el origen; donde su giro en sí se mide en radianes.

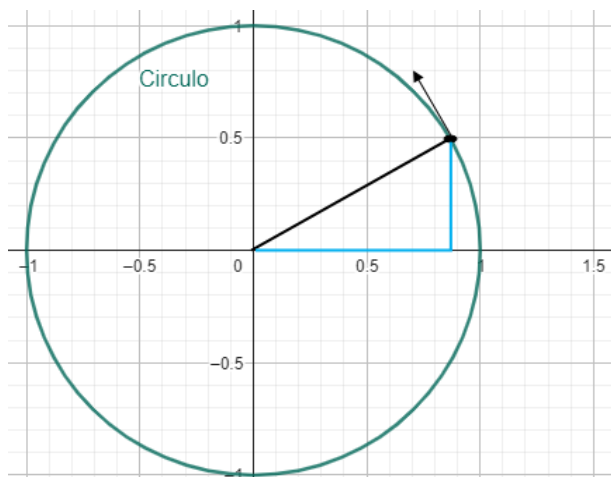


Figura 16: Triángulo rectángulo a 30° , inscrito

Esta unidad a-dimensional conocida como *Radian*, implica que una vuelta completa es dos "Pi" radianes (2π), equivalente a 360° ; entonces un radian se aproxima a **$57,3^\circ$** .

En ese sentido ver la figura 16, a 30° o $\pi/6$ radianes, donde el cateto opuesto vale 0,50 de elevación, y el cateto adyacente 0,866 unidades de avance, ambos en color azul.

Como resultados del triángulo rectángulo de hipotenusa de lado la unidad, de color negro inscrito en la circunferencia (Tirado y Figuera, 2017).

Los llamados ángulos notables en grados y su correspondiente radian, se tabulan en la siguiente Tabla 2, con sus valores respectivos según la función trigonométrica; en donde como funciones primarias el Seno y el Coseno ofrecen valores en el intervalo $[-1, 1]$, como catetos en todo el o los giros realizados (Santillana, 2010).

Tabla 2: Valores según la función trigonométrica, y el ángulo notable respectivo

Ángulo	Seno	Cosecante	Coseno	Secante	Tangente	Cotangente
0°	0	Indefinida	1	1	0	Indefinida
$30^\circ (\pi/6)$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ (\pi/4)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1	1
$60^\circ (\pi/3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ (\pi/2)$	1	1	0	Indefinida	Indefinida	0
$180^\circ (\pi)$	0	Indefinida	-1	-1	0	Indefinida

5.3) Relaciones trigonométricas

Entre las funciones trigonométricas existen relaciones llamadas *Identidades*, como ecuaciones necesarias para facilitar operaciones en las funciones trigonométricas, basado de inicio en el Teorema de Pitágoras aplicado al círculo origen de radio uno de la figura 16, cuando ocurre que los catetos allí señalados, producen la relación: $\text{Sen}^2(x) + \text{Cos}^2(x) = 1$.

A partir de aquí se obtienen las primeras identidades

$$\text{a) } 1 + \text{Tan}^2(x) = \text{Sec}^2(x) \quad \text{b) } 1 + \text{Ctan}^2(x) = \text{Csc}^2(x) \quad \text{c) } \text{Sen}^2(x) = 1 - \text{Cos}^2(x)$$

Luego continúan las llamadas identidades para ángulos compuestos, que son

$$\text{Sen}(x \pm y) = \text{Sen}(x) \cdot \text{Cos}(y) \pm \text{Cos}(x) \cdot \text{Sen}(y)$$

$$\text{Cos}(x \pm y) = \text{Cos}(x) \cdot \text{Cos}(y) \mp \text{Sen}(x) \cdot \text{Sen}(y).$$

A partir de ellas cuando el ángulo es la suma de sí mismo, se obtiene que:

$$\text{Sen}(\theta + \theta) = \text{Sen}(2\theta) = 2 \cdot \text{Cos}(\theta) \cdot \text{Sen}(\theta) \quad \text{Y} \quad \text{Cos}(\theta + \theta) = \text{Cos}(2\theta) = \text{Cos}^2(\theta) - \text{Sen}^2(\theta)$$

Ejemplo 29: Encuentre el ángulo único que satisface la siguiente ecuación trigonométrica:
 $\text{Sen}(2\theta) \cdot (1 + \text{Tan}\theta) = 4$.

Respuesta: $\text{Sen}(2\theta) \cdot (1 + \text{Tan}\theta) = 2\text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta / \text{Cos}^2\theta$; al sustituir con la identidad de la suma del mismo ángulo con la identidad de la $\text{Sec}^2\theta$.

Seguidamente queda que: $2 \cdot \text{Tan}\theta = 4$. De donde se obtiene que: $\theta = \text{Tan}^{-1}(2) = 63,435^\circ$.

Ejemplo 30: De un triángulo escaleno cuyos vértices están en los siguientes puntos del primer cuadrante del plano, A: (0; 0), B: (5; 0), y C: (2; 2), en pies. Calcule la magnitud de sus tres lados.

Respuesta: El lado horizontal AB es de magnitud 5 pies, una vez se hace el dibujo esquemático del triángulo, con el vértice del punto "C" se obtiene la distancia al punto "A" en el origen como: $\sqrt{8}$ pies; de manera análoga se calcula el tercer lado CB como distancia entre dos puntos, con valor de $\sqrt{9 + 4} = 3,606$ pies.

Ejemplo 31: Calcule los ángulos internos del triángulo del ejemplo anterior, número 30.

Respuesta: El ángulo en el origen es de 45° al estar el punto "C" en igual distancia horizontal que vertical, luego por la ley del Seno se obtiene el ángulo en el vértice "B": $\frac{\text{Sen}(45)}{3,606} = \frac{\text{Sen}(\emptyset)}{2,828}$,

con resultado para este ángulo de: $\emptyset = 33,68^\circ$. Seguidamente por ángulos internos se descubre que el ángulo en el vértice "C" es de $101,32^\circ$.

Ejercicios propuestos del tema 5

41) Encuentre la distancia de los tres lados que forman un triángulo Equilátero de altura 3 pies.

R: 3,464 pies.

42) Que distancia tienen los lados iguales de un triángulo Isósceles, si su base es de 6 metros y su ángulo frontal o no común es de 40° . **R: 8,77 metros.**

43) En un triángulo Escaleno hay lados de 3 y 4 pulgadas, con ángulo interno entre esos lados de 60° ; calcule el lado faltante y los otros dos ángulos internos. **R: $\sqrt{13}$. Pulgadas. $46,095^\circ$. $73,905^\circ$**

44) Una gaviota desde una roca en playa Ayangue, vuela al Oeste 40 metros y seguidamente 50 metros a 30° al Norte del Oeste. Calcule la distancia y el rumbo para regresar a su punto de partida. **R: La gaviota debe volar 76,368 metros a $16,71^\circ$ al Sur del Este.**

45) Del ejercicio anterior número 44, encuentre los ángulos internos del triángulo que se forma con los dos vuelos de la gaviota y el retorno a su roca. **R: $16,71^\circ$. 120° . $43,29^\circ$.**

46) Que ángulo en grados resuelve la siguiente ecuación, $\text{Cos}(\theta) \cdot \text{Sen}(\theta) = 0,45$. **R: $32,08^\circ$**

47) Encuentre el punto perteneciente a una circunferencia de radio dos metros, que está a $(5/3) \cdot \pi$. **R: (1; - 1,732) m. En el cuarto cuadrante**

48) Encuentre el ángulo menor de la siguiente relación trigonométrica que representa un vuelo de un proyectil, $3 \tan^2(\theta) - 20 \tan(\theta) = -30$. **R: $66,31^\circ$**

49) A cuantas vueltas del eje horizontal derecho y sus radianes, se encuentra un punto en una circunferencia que a girado 800 grados. **R: 2,222 vueltas. $4,44 \cdot \pi$ Radianes.**

50) Encuentre el ángulo que resuelve, el siguiente cociente de funciones trigonométricas.

$$\frac{\text{Cos}^2(x) - \text{Sen}^2(x)}{4 \cdot \text{Cos}(x) \cdot \text{Sen}(x)} = 0,2. \quad \text{R: } 34,1^\circ$$

TEMA 6: RECTAS, ÁREAS Y VOLÚMENES

El punto en el plano, definido como *Elemento geométrico que ocupa un lugar sin tener dimensiones*, representado como un punto ortográfico en virtud de que en la realidad no debe ni verse; luego una sucesión finita de puntos en una dirección fija o colineal constituye una recta que es el elemento primario de toda gráfica, las rectas se denotan por la letra “L” y su fórmula corresponde como un binomio de grado uno, cuya expresión en el plano es: $y = m \cdot x + b$, siendo la pendiente el valor “m”, con corte con el eje vertical en “b”.

El área clásica es la de un rectángulo constituido por dos pares de rectas ortogonales en sus intercepciones, cuya área contenida es de: $A = L_1 \cdot L_2$. Luego si el área está limitada por dos vectores a cualquier ángulo agudo entre ellos, se forma el llamado *Paralelogramo* por la doble contingencia en la suma de estos, cuya área es: $A = L_1 \cdot L_2 \cdot \text{Sen} \alpha$.

De cierre un Volumen es un espacio de toda área en el plano por su profundidad, o eje perpendicular al plano clásico de la hoja de escritura, o de la pizarra del docente en la pared.

6.1) Las rectas

Toda recta en su fórmula general es un polinomio de grado uno, de donde se busca su expresión llamada *Punto-Pendiente* como estrategia para su gráfica, al conocer su inclinación y dos puntos lógicos para trazarla. Por ejemplo, si se tiene la recta: $2y + 4x = 8$. Esta se puede expresar de la forma: $y = -2x + 4$; de donde se deduce por lógica de anular la “x”, que la recta corta al eje vertical en el punto (0; 4), y corta el eje horizontal, haciendo $y = 0 = -2x + 4$, en el punto (2; 0). Con pendiente negativa de -2 ; es decir, es una recta declinada, ver figura 17.

Interesante que la pendiente de $m = -2$, se obtiene con esos dos puntos, como la elevación entre el avance horizontal: $m = \frac{y(2) - y(1)}{x(2) - x(1)}$. Con resultado $m = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$.

Relativo al triángulo que se forma, donde su ángulo en la base con el eje “X” horizontal es $\text{Tan}^{-1}(2) = 63,44^\circ$; es decir como la Arco tangente de la pendiente absoluta.

Seguidamente la recta llamada “Constante” es una recta horizontal, de expresión $y = a$, con “a” como cualquier número real; donde la recta $y = 0$, es el eje horizontal, y el eje vertical la recta: $x = 0$.

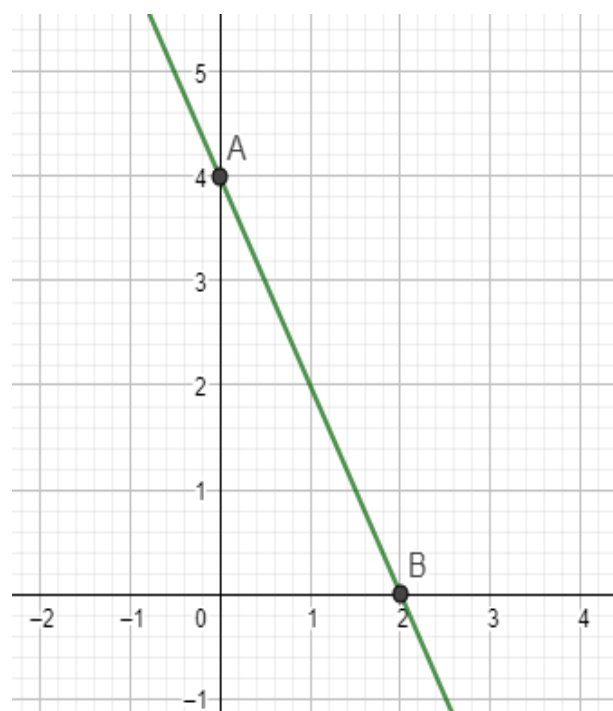


Figura 17: Trazo de la recta $y = -2x + 4$.

Las rectas son paralelas entre sí cuando tienen la misma pendiente, por lo que no se interceptan, y se llaman secantes cuando se interceptan en lógicamente un punto único.

Ejemplo 32: Construya las expresiones punto pendiente de las rectas, L_1 que pasa por los puntos: (1; 3), con (2; - 2), y la recta L_2 que pasa por los puntos: (- 1; - 1), con (3; 0). Adicionalmente encuentre el punto de intersección de estas rectas, y grafique todo.

Respuesta: La pendiente de L_1 es: $m_1 = \frac{-2 - 3}{2 - 1} = -5$. Que con su expresión punto-pendiente

se obtiene el corte con la vertical, al usar cualquiera de sus puntos: $3 = -5(1) + b$, entonces esta intersección es: $b = 8$. La recta tiene por fórmula, $L_1: y = -5x + 8$.

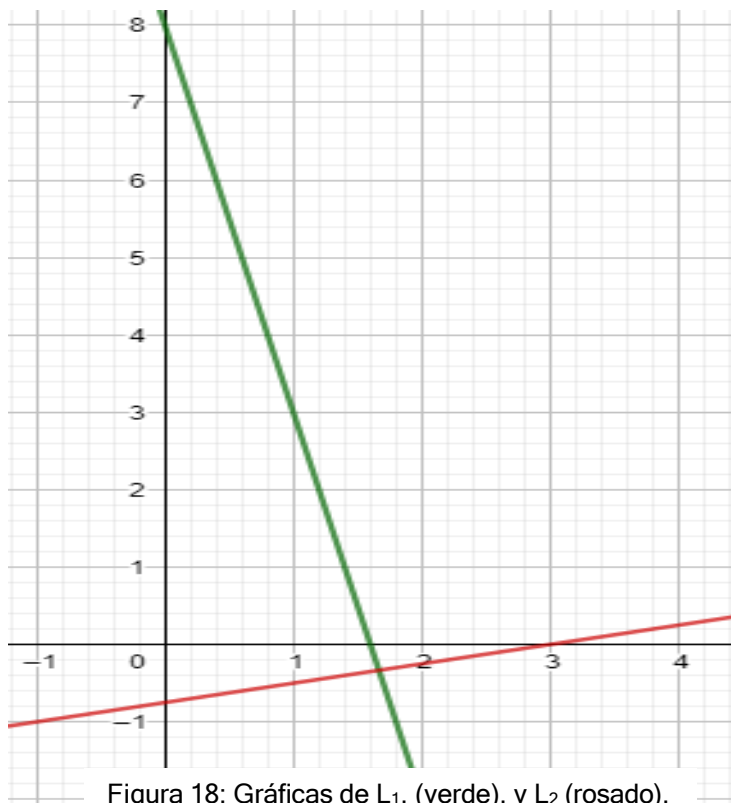


Figura 18: Gráficas de L_1 , (verde), y L_2 (rosado).

De forma análoga la recta L_2 , tiene

$$m_2 = \frac{0 - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{1}{4}.$$

Corte con la vertical, usando el punto (3; 0), en su ecuación: $0 = 0,25(3) + b$. De donde se obtiene $L_2: y = 0,25x - 0,75$; Ver figura 18 siguiente.

Allí se aprecian las gráficas de las rectas, L_1 en verde y L_2 en rosado, con sus cortes respectivos para cada eje coordenado, y el posible punto de intersección entre ellas.

Este punto de corte surge con igualar las fórmulas: $-5x + 8 = 0,25x - 0,75$; de donde se obtiene $x = 8,75 / 5,25$; igual a: 1,667, que produce el punto (1,667; - 0,333), que se aprecia.

Algunas notas sobre las rectas indican

- Son funciones infinitas, clasificadas como crecientes si tiene pendiente positiva, decrecientes si tienen pendiente negativa, y constante si su pendiente es cero, o rectas horizontales.
- Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son el inverso negativo: $m_1 = -1/m_2$.
- Una recta que toca o intercepta a otra función en un solo punto se llama "Tangente", y si toca o intercepta en varios puntos se llama "Secante".
- Una expresión poco usada es la forma canónica de la recta: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. De donde se obtiene: (a; 0) es el corte con el eje "X", (0; b) es el corte en la vertical, y su pendiente $m = -b/a$. Es decir, para la recta L_1 . Del ejemplo 32, su fórmula expresión canónica es: $\frac{x}{8/5} + \frac{y}{8} = 1$.

6.2) Áreas y sus formulas

Toda área como figura clásica del plano, inicia con los llamados *Cuadriláteros*, el Rectángulo es un cuadrilátero, o polígono regular de cuatro lados, tal que entre cada lado hay ángulos rectos, el cuadrado es un tipo de rectángulo en donde sus lados son iguales, área es. $A = L^2$, razón de su nombre. Luego el área de un rectángulo será el producto de sus lados: $A = L_1.L_2$.

Cuando el área rectangular obedece a una suma de lados, digamos “a y b”, como el siguiente esquema de la figura 19, se descubre el posible origen del famoso binomio al cuadrado, con el resultado que confirma la secuencia del triángulo de Pascal; o sea, para obtener el área total como: El cuadrado amarillo más el cuadrado rosado, más dos veces los rectángulos blancos “a.b”, es: $A_T = a^2 + 2.a.b + b^2$, que a su vez se escribe: $A_T = (a + b)^2$. Como interesante Teorema de la antigüedad, que se demuestra con el desarrollo: $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$.

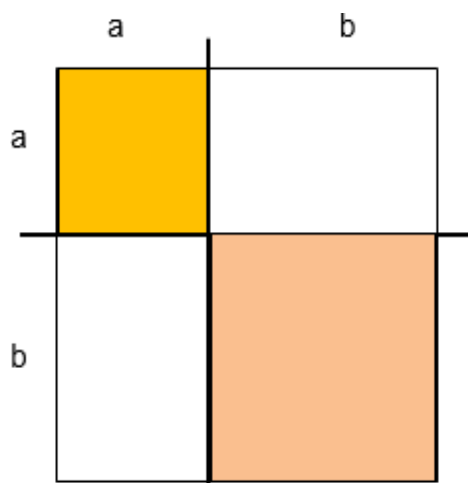


Figura 19: Esquema rectangular que define el binomio al cuadrado

Seguidamente el *Perímetro del rectángulo* o recorrido por las aristas es dos bases más dos alturas, para el caso del rectángulo en blanco superior derecho de la figura 17 sería su perímetro como: $(P = 2.b + 2.a)$; luego en un rectángulo las rectas que atraviesan la figura en vértices contrapuestos se llaman *Diagonales* siendo las hipotenusas de triángulos rectángulos repetidos que conforman el cuadrilátero respectivo. En todo cuadrado de lado “L”, la diagonal se obtiene por Pitágoras como: $D = L.\sqrt{2}$.

El área de un triángulo escaleno proviene de una aplicación del *Producto cruz* entre vectores, cuando se asumen estos segmentos como sus lados, al ser la mitad del área del paralelogramo contenido; es decir el área de cualquier triángulo es el producto de dos de sus lados por el Seno del ángulo entre estos lados, dividido entre dos: $A = \frac{L_1.L_2.Sen\theta}{2}$.

De donde se desprende el área del triángulo rectángulo, con el ángulo entre los lados recto $Sen(90) = 1$; como: $A = \frac{L_1.L_2}{2}$. La famosa *Base por Altura entre Dos*.

El área del círculo era estimada por aproximaciones o sumas de áreas contenidas cercanas a su borde, hasta que el genio de la isla de *Siracusa* dio con su valor formulario usando el número irracional creado del “Pi”, como: $A = \pi.r^2$, siendo “r” el radio o mitad del diámetro central del círculo; fórmula que se deduce a partir de la llamada *Espiral de Arquímedes*, con lo cual se abrió la posibilidad para el cálculo de los volúmenes circulares, con suficiente exactitud. Todo círculo tiene un perímetro $P = 2.\pi.r$, proveniente de la fórmula de cualquier parte de este o Arco cuyo cálculo es de: $S = r.\theta$, con este ángulo barrido de la parte del círculo medido en radianes.

A continuación, la figura 20, muestra estas tres áreas clásicas, con su fórmula de área.

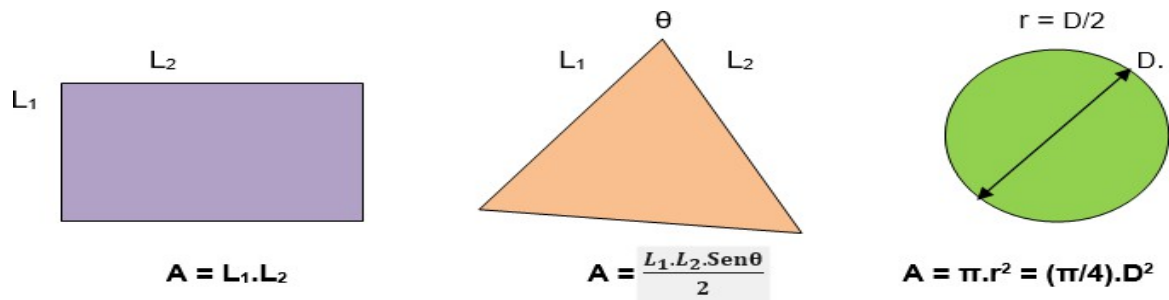


Figura 20: Áreas del Rectángulo, triángulo Escaleno, y un círculo; con sus fórmulas.

Cualquier figura contenida entre líneas del plano, representadas por funciones en un intervalo real conocido, se hace por la estrategia de la *Integración definida*, procedimiento y técnica que se verá en la materia de Matemática II, o Cálculo integral.

Ejemplo 33: Calcule el área de un triángulo Isósceles de lados iguales de 20 metros y ángulos comunes de 50° , en su base.

Respuesta: Un triángulo isósceles al tener en su base ángulos de 50° , tiene en su vértice superior un ángulo de 80° , por la sumatoria interna de ángulos de todo triángulo; entonces su área resulta como: $A = \frac{(20) \cdot (20) \cdot \text{Sen} 80}{2} = 196,96 \text{ m}^2$.

6.3) Volúmenes y sus cálculos

Vivimos en un mundo espacial, entonces las figuras del plano vistas u otras formas generadas pueden y tienen *Profundidad* o la llamada tercera dimensión; empezando con el volumen clásico del *Paralelepípedo*, con sus tres lados como: $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$. El paralelepípedo de lados iguales se llama *Cubo*, porque su volumen es: $V = L^3$; Y su mayor diagonal interna: $D = L \cdot \sqrt{3}$; proveniente del vector que se construye desde esquinas opuestas, similar al paralelepípedo de la figura 11, del salón de clases.

Los volúmenes son reconocidos y clasificados por sus *Caras* cuyos perímetros lo conforman el recorrido de sus *Aristas* o líneas entre los vértices; donde las vistas o caras de un volumen son áreas proyectadas. Es decir, los paralelepípedos tienen seis caras rectangulares, formadas por ocho vértices y 12 aristas, donde se llama *Poliedro* a todo volumen no rectangular, entre los que destacan: El Tetraedro, la Pirámide, y los Prismas cuando aumentan sobre las seis caras.

La pirámide tiene cuatro caras de triángulos isósceles y una base cuadrada, con volumen de fórmula: $V = (1/3) \cdot L^2 \cdot h$. Con “L” el lado de la base.

Los volúmenes llamados *Redondos* por su capacidad de rodar, fueron desarrollados por Arquímedes, quién dedujo el área de un cilindro a partir de un círculo por su altura: $V = \pi \cdot h \cdot r^2$;

a partir de este, dedujo el volumen de un *Cono* o figura de base circular con un solo vértice en su altura, equivalente a la tercera parte del volumen de un cilindro: $V = \frac{\pi}{3} h \cdot r^2$.

Además del volumen de una *Esfera* equivalente a 2/3 del volumen de un Cilindro, con la particularidad de que la altura es igual al radio, (esfera máxima inscrita dentro del cilindro), cuya fórmula en función de su radio es: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$.

A continuación, la figura 21, muestra los cuatro volúmenes clásicos con sus fórmulas respectivas, expresadas en función del diámetro como deber ser; pues en una pieza sólida o maciza no se puede medir el radio desde su interior o un centro, por estar no ubicado o ser inexacto su punto (Tirado et al., 2021).

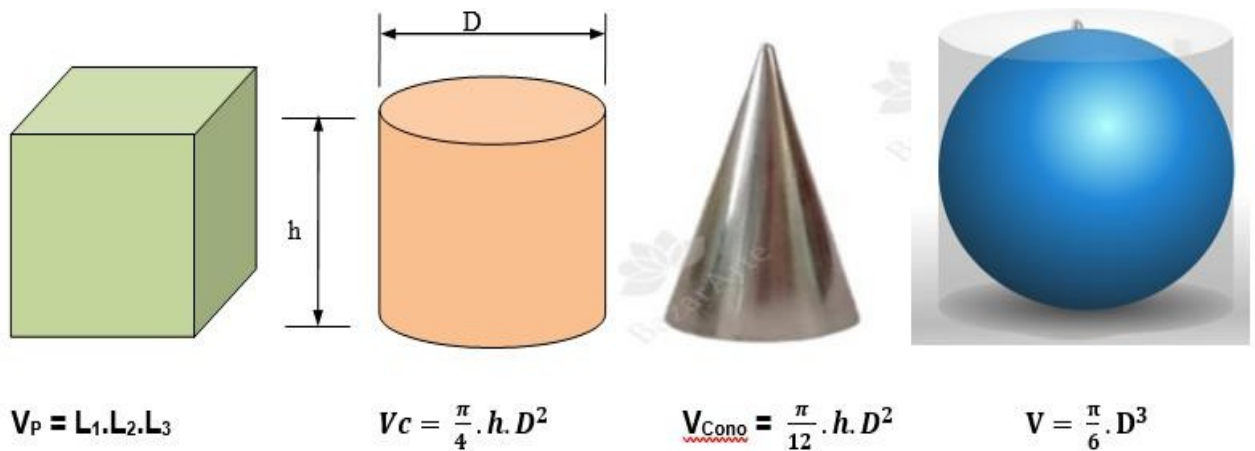


Figura 21: Paralelepípedo, Cilindro, Cono, y Esfera; sus fórmulas de Volúmenes.

Por supuesto habrá piezas de volúmenes combinados, y cuerpos con partes faltantes, como los llamados *Volúmenes huecos*, representados por un volumen menos otro; en este caso se combinan sus ecuaciones hasta lograr la fórmula deseada. Entre estas situaciones tenemos: El paralelepípedo, el cilindro y la esfera huecas; con traspaso total o parcial, para con un túnel rectangular o cilíndrico; entre muchas posibilidades.

En el capítulo IV de la Matemática I, por aplicación de la derivada, se descubren situaciones de maximizar áreas y/o volúmenes inscritos o contenidos.

Ejemplo 34: Calcule el volumen de un Cono de diámetro de base igual a su altura en 4 pulgadas. **Respuesta:** Por su fórmula, se tiene que: $V = \frac{\pi}{12} \cdot (4)^3 = 16,76 \text{ Pulg}^3$.

Ejercicios propuestos del tema 6

51) Encuentre las expresiones canónicas de las rectas: L_1 que pasa por los puntos (0; - 5) y (4; 0), y L_2 que pasa por los puntos (- 3, 1) y (1; - 3). **R: $L_1: \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$. $L_2: -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$**

52) Del ejercicio anterior, calcule las pendientes de esas rectas L_1 y L_2 , y en qué punto del plano se interceptan. **R: $m_{L_1} = 5/4$. $m_{L_2} = - 1$. Punto (4/3; - 10/3).**

53) Estime el área, el perímetro y la diagonal de un rectángulo de base 4 metros y altura 3 metros. **R: 12 m². 14 metros. 5 metros**

54) Calcule el área de un triángulo Equilátero de lado 5 pies. **R: 10,825 Pies².**

55) Qué área tiene un triángulo Isósceles de lados comunes 3 metros con sus dos ángulos iguales de 50°. **R: 4,432 m².**

56)Cuál es el área de un círculo de radio 20 Centímetros, si al mismo le falta un *Tajo* completo de 60° de arco. **R: 1.047,2 Cms²**

57) Que volumen tiene un Cilindro de altura 4 pulgadas y diámetro 3 pulgadas, si tiene un Hueco completo de una pulgada. **R: 25,133 Pulg³**

58) Del cilindro del ejercicio anterior número 57, considere que el hueco no es completo con una profundidad de 2 pulgadas; calcule ahora su volumen. **R: 26,704 Pulg³.**

59) Una *Cuenta* es un figura geométrica usada en los *Ábacos*, consistente de un esfera perforada completamente por un cilindro menor; si se tiene una cuenta de 6 centímetros de diámetro perforada por un hueco de 1,5 centímetros; calcule su volumen. **R: 102,49 Cms³.**

60) Calcule el volumen de un Cono de altura un metro, con ángulo superior de apertura de 60° si se mira frontalmente como si fuese un triángulo Isósceles, **R: 3,1416 m³.**

TEMA 7: INTRODUCCIÓN A FUNCIONES

Una relación en el plano se define como: Todo elemento en un intervalo dado en la horizontal “X”, que debe tener imagen en la vertical “Y”, de tal forma que se expresa en el plano coordinado una especie de dibujo; donde los elementos en la recta horizontal son una proyección de la función o esquema dibujado llamada *Dominio*, y los elementos o imágenes en la vertical, son la proyección llamada *Rango*. Entonces una función del plano es: *Aquella relación que norma todos los elementos entre un conjunto “X” en la horizontal, a un conjunto “Y” en la vertical, siempre y cuando la correspondencia sea única*; a manera de parejas ordenadas bajo una ecuación conocida; esto es de manera simbólica en el plano, $f: x \rightarrow y$, según los autores (Thomas y Finney, 1998), y (Benítez, 2006).

Luego para una expresión algébrica se recurre a los llamados símbolos matemáticos, como entidades que expresan ideas del lenguaje de esta ciencia formal, en combinaciones propias para simplificar la escritura de la Matemática. Entre los más comunes están: $\in$, pertenece. $\notin$, no pertenece. $\exists$, existe. $\nexists$, no existe. $\forall$, para todo. $/$, tal que. $\cup$, unión. $\cap$, intersección. $\rightarrow$, implica o entonces. $\Leftrightarrow$, Si y solo si. ∞ , infinito. $\approx$, aproximado. $>$, mayor que. $<$, menor que. $($, lado abierto. $[$, lado cerrado; $f(a) = b$, imagen de la función en “a”. Entre muchas otras.

Las funciones en el plano coordinado se pueden expresar como: $y = f(x)$, siendo como se ha dicho una correspondencia única. Entonces simbólicamente es: $f(x) = \{\forall x \in X \exists \text{ un } y \in Y / x \rightarrow y \text{ sea única}\}$; donde su Dominio, se expresa con símbolos como el subconjunto: $\text{Dom}(f) = \{x \text{ Real} / \exists \text{ un } y \text{ Real} \rightarrow y = f(x)\}$.

De forma análoga el Rango, es el subconjunto real y para lo cual existe un x llamado codominio, expresado de manera simbólica como: $\text{Ran}(f) = \{y \text{ Real} / \exists \text{ un } x \text{ Real} \rightarrow x = c_i(y)\}$; es decir, como parejas ordenadas reales correspondientes (Stewart, 2012).

Luego una función igualmente es una relación, pero condicionada a que la imagen o punto de llegada en la vertical, es única para cada elemento del dominio; expresado $f: A \rightarrow B$, con estas letras como conjuntos de salida y llegada de puntos, desde la horizontal o abscisa en el eje “X”, llamada variable *Independiente*, hacia la Ordenada en la vertical del eje “Y”, llamada variable *Dependiente*; o sea, entre el Dominio, $\text{Dom}(f)$, y el Rango, $\text{Ran}(f)$.

7.1) Inyectividad en funciones

La primera clasificación de las funciones se relaciona con las imágenes que posea, siendo funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas (Benitez, 2006) y (Zill y Wrigth, 2011).

Una función será Inyectiva si todos los elementos del dominio tienen imágenes distintas; condición que permite obtener la llamada Función inversa, porque una función No Inyectiva, produce en su inversión de norma una relación del plano que no es Función; las rectas

inclinadas todas, son funciones Inyectivas, así como las funciones llamadas *Monótonas* o que mantienen una tendencia constante en su dibujo del plano (Tirado, 2020).

Una función es Sobreyectivas cuando todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con uno o varios elementos del conjunto de salida, de tal forma que todo punto perteneciente al dominio tenga una imagen real; o cuando el Rango es un subconjunto de un codominio preestablecido. Es decir, $\text{Ran}(f) = \text{Cod}(f)$; (Santillana, 2010). Y se dice que una función es Biyectivas al cumplir o ser Inyectiva y Sobreyectivas.

En la figura 22, se muestran tres esquemas sagitales, bajo la simbología de conjunto ovalados relacionados: “A” como Dominio y “B” como Rango, con las funciones “f”, “g” y “p”.

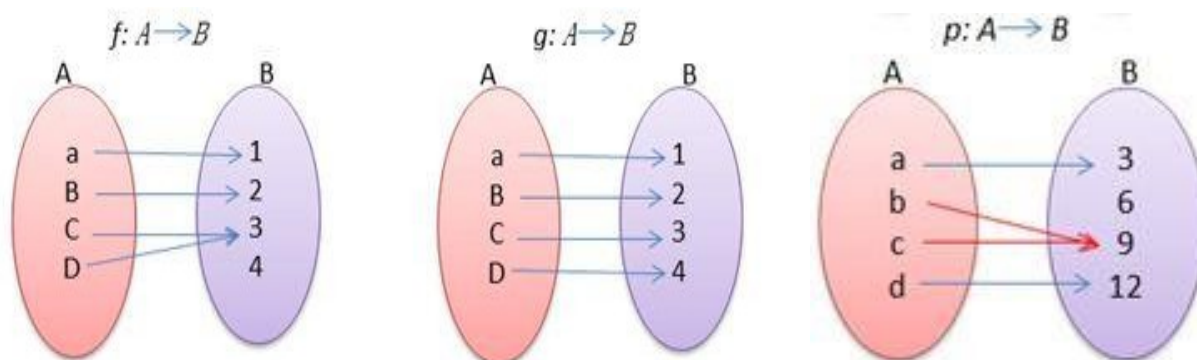


Figura 22: Esquemas de conjuntos sagitales, salida y llegada, en las funciones f,

Ejemplo 35: De las funciones esquematizadas en la figura 20, diga la característica de Inyectividad de cada una de ellas.

Respuesta: De cada conjunto en las funciones dadas se extrae lo siguiente

$f(B)$, No es función Sobreyectiva, porque 4 no tiene dominio, y no es Inyectiva porque su elemento D comparte imagen con el elemento C.

$g(B)$ Es función Biyectiva, al cumplir con ambas condiciones, todos los elementos tienen imágenes y son únicas.

$p(B)$ Es función Sobreyectivas sin ser Inyectiva, porque todos sus elementos del conjunto tienen llegada, pero b y c comparten imagen.

7.2) Función Algebraica o Trascendente

La segunda clasificación de las funciones las ubica según su tipo de norma o relación conocida; se denominan funciones *Algebraicas* cuando expresa operaciones de suma, producto, cociente y potencia entre las variables dependientes e independientes; es decir, tienen forma polinómica, racional o cociente, y del tipo radical, en sus operaciones de la variable independiente; entre muchas tenemos: $y = x^2 + 2x - 1$, $y = x + 4$, $y = x / (x - 1)$, $y = x^2 / (2 - x)$; o con potencia cociente o llamadas radicales como: $y = \sqrt{x - 3}$.

Existiendo por supuesto combinaciones entre estas operaciones algebraicas, como: $\sqrt[3]{2x/(x+1)}$; entre una infinidad de posibilidades.

Y se denomina funciones *Trascendentes* cuando no satisface a una ecuación algebraica; es decir, incluye una norma que trasciende del polinomio (Thomas y Finney, 1998). Las funciones trascendentes son las *Logarítmicas* y sus inversas las *Exponenciales*, junto a las funciones llamadas circulares o *Trigonométricas*, que tienen su fundamento en la circunferencia Pitagórica vista; entre algunas están: $y = \ln(x)$, $y = 3/\log(x)$, $y = 2\cos(x)$, $y = e^{2x}$, $y = \sin^2(x)$; entre muchas otras, las cuales pueden combinarse a su vez con normas algebraicas.

Las funciones logarítmicas y exponenciales son Biyectivas, con la característica de incluir una *Asíntota Vertical* (A.V), en el eje “y” para las primeras; y una *Asíntota Horizontal* (A.H), para las segundas (Zill y Wright, 2011). Las funciones trigonométricas son solo Sobreyectivas, como caracterización particular por ser periódicas (Stewart, 2012).

7.3) Noción Gráfica y tabular

Una relación del plano cartesiano sea algebraica o trascendente, se denomina función cuando a todos y cada uno de los puntos de la abscisa (eje horizontal) le corresponde un sólo punto en la ordenada (eje vertical) del plano cartesiano, aceptándose puntos comunes en la imagen; en términos geométricos nuestro dibujo lineal en el plano solo es interceptado una vez por rectas verticales o paralelas al eje “Y”, en el intervalo de existencia, (Tirado, 2020) “Porque hasta ahora las definiciones vistas demuestran la necesidad del lector en visualizar el dibujo explicativo de una relación, su diferencia con el de una función”. y las primeras caracterizaciones en estas; el dibujo se convierte en la herramienta didáctica por excelencia y en ocasiones le permite al investigador concebir avances que pueden estar *ocultos* en la forma solo-analítica, y viceversa.

En la siguiente figura 23, se pueden apreciar dos gráficas de relaciones en el plano, como dibujos de sus posibles fórmulas del tipo $y = f(x)$.

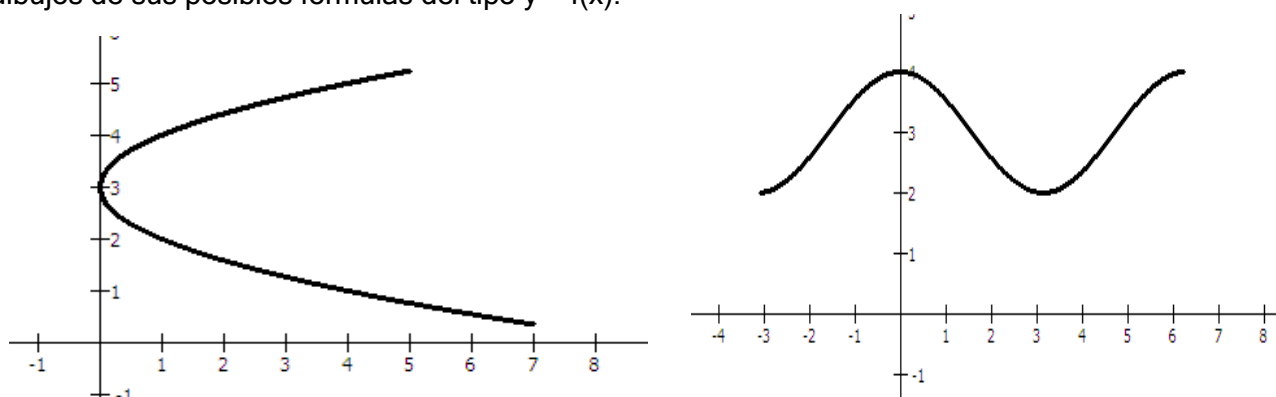


Figura 23: Esquemas de una relación, y de una función del plano

Ejemplo 36: De la graficas de dos relaciones en la figura 23, diga y explique si son funciones.

Respuesta: La primera gráfica no es función, porque aceptando un dominio en el intervalo cerrado $[0; 7]$, existen varios puntos de salida desde este conjunto que tiene dos imágenes. La segunda grafica si representa una función, en condición de sobreyectividad para el intervalo o conjunto del Dominio $[- 3; 6)$, porque rectas paralelas al eje vertical solo la cortan o interceptan en un solo punto, sin ser función Inyectiva, porque varios puntos del dominio comparten imagen en el rango, como los puntos aproximados: $\{- 2; 1; 5\}$, que tienen imagen común de 3.

Una tercera forma de denotar una función es la llamada noción *Tabular*, en donde se expresan las variables “X, e Y”, según sus valores correspondientes a una norma conocida, para un intervalo específico del dominio, o tendencia particular para estudiar; entonces una función se puede expresar como ecuación, como gráfica y como tabla de valores.

A continuación, en la Tabla 3 se pueden apreciar valores de la función de fórmula $y = x^2$, de la figura 24, alrededor del origen coordenado junto a su gráfica al lado de los valores, ver siguiente figura 22 de la llamada *Parábola* clásica: con su vértice en el origen coordenado. Siendo estas las tres formas de concebir una función: Ecuación, gráfica y tabular; por estudio de la tabla y su gráfica se puede afirmar por comparación, que la función es algebraica Sobreyectivas sin ser Inyectiva característica de todas las funciones cuadráticas, y de algunas funciones cúbicas, llamadas polinomios de grado dos y tres respectivamente.

Tabla 3: Valores de la función $y = x^2$, en puntos cerca del origen.

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
- 3	9	0	0	1,5	2,25
- 2	4	0,5	0,25	2	4
- 1,5	2,25	1/3	1/9	3	9
- 1	1	1	1	4	16
- 1/2	0,25	1,25	1,563	5	25

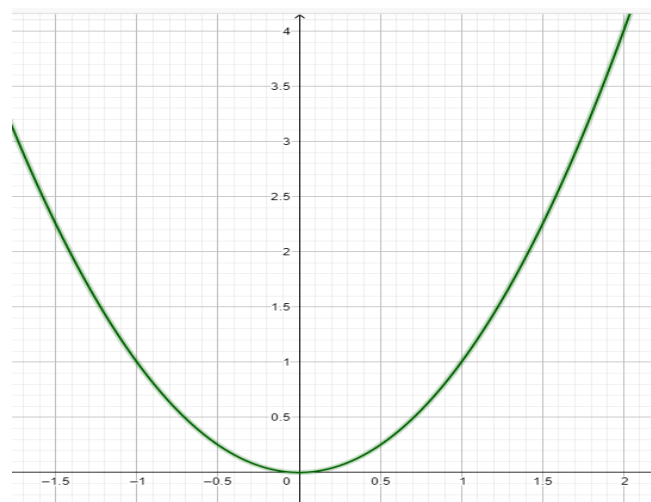


Figura 24: Gráfica de la función Parábola clásica

De donde se puede obtener por observación que el dominio de la Parábola son todos los números reales, expresado como el intervalo abierto $\text{Dom}(f): (-\infty; \infty)$ y su rango como $\text{Ran}(f): [0; \infty)$. Esta modalidad tabular por aproximación secuencial lógica al punto de estudio, encuentra respaldo de utilidad en estudiantes de ingeniería, como sencilla forma de aprendizaje por lógica secuencial (Blázquez et al., 2006).

Ejemplo 37: Realice un acercamiento infinitesimal al cero por la derecha, y luego al infinito positivo de la función logaritmo base diez, $y = \log_{10}(X)$. Para demostrar que su rango son todos los números reales.

Respuesta: Todos los logaritmos tienen rango de todos los números reales y dominio desde el origen abierto hasta el más infinito, de tal manera que solo varía el *Trazado* de la curva según la base del logaritmo; afirmación que se confirma al observar la siguiente figura 25, con la gráfica de este logaritmo.

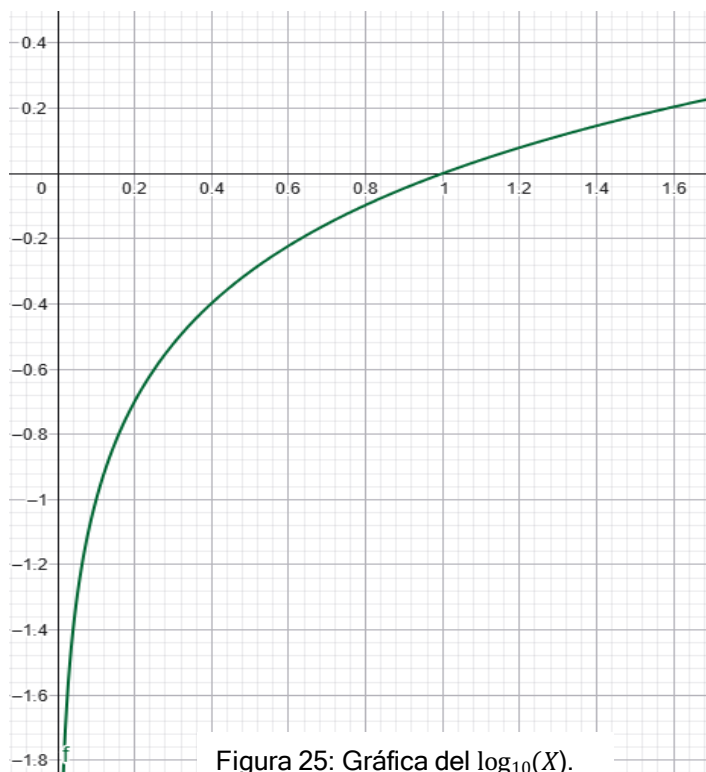


Figura 25: Gráfica del $\log_{10}(X)$.

Luego la demostración tabular aparece en la siguiente tabla 4, en donde se realizan a conveniencia imágenes de puntos cerca del llamado *Cero positivo* o a la derecha de este (0^+), en la siguiente tabulación para valores altos positivos.

Tabla 4: Acercamiento infinitesimal al 0^+ , y para valores muy altos, denominado al infinito

x	$\log_{10}(X)$	x	$\log_{10}(X)$	x	$\log_{10}(X)$	x	$\log_{10}(X)$.
0,20	- 0,699	0,01	- 2	5	0,70	1.000	3
0,10	- 0,1	10^{-4}	- 4	10	1	5.000	3,7
0,04	- 1,4	10^{-7}	- 7	100	2	100.000	5

En ambos casos se demuestra que la función tiende al infinito negativo para valores muy cercanos al cero por la derecha, siendo el eje “y” su A.V; con una tendencia a valores crecientes, para números asumidos como *Al Infinito*, Demostrando el rango de la función de todos los reales.

7.4) Método Gráfica de Relaciones

Es una estrategia de aprendizaje apriorista, donde la praxis geométrica representa toda una concepción y caracterización de las funciones en la llamada *Definición Gráfica*, como ente didáctico, que permite la poderosa comparación de resultados como estrategia de educativa de verificación e incluso para avances conceptuales (Tirado, 2020).

Su esencia se funda en la *Construcción* de cada función a partir de las llamadas funciones *Primarias* por operación algebraica, movimientos en el plano o condiciones establecidas en sus imágenes del rango; siendo las funciones: $y = x$, e $y = \text{Constante}$. Las primarias de las funciones algebraicas, de forma similar la función: $y = \log_n(X)$, como primaria de las funciones

logarítmicas y exponenciales, y la función: $y = \text{Sen}(x)$, es la primaria de todas las funciones trigonométricas, como se verá en el desarrollo de la Matemática I.

En la siguiente figura 26, aparecen dos graficas, la izquierda con las funciones primarias de las funciones Algebraicas: Recta inclinada a pendiente uno y rectas paralelas; siguiendo en la gráfica derecha con las función primaria del Seno, la función Logaritmo, con su inversa la función Exponencial. Las cuales originan la construcción de las demás funciones por operaciones y combinaciones algebraicas básicas; como estrategia similar a la de los colores primarios, cuando se mezclan para crear otros colores consecuentes (Tirado y Figuera, 2017).

Aclarando que por tema de estética e impresión las gráficas que aparecen en esta obra se realizaron con el programa GeoGebra clásico en su versión gratuita; sin embargo, es objetivo del método Grafica de Relaciones, que todas esas gráficas pueden ser realizadas por el docente en su pizarrón como por el estudiante en su cuaderno, como habilidad y aptitud para aprender; en donde se puede explicar cómo surge cada punto en la función, su dominio, su rango, sus tendencias, sus asíntotas, y puntos notables (Tirado, 2020).

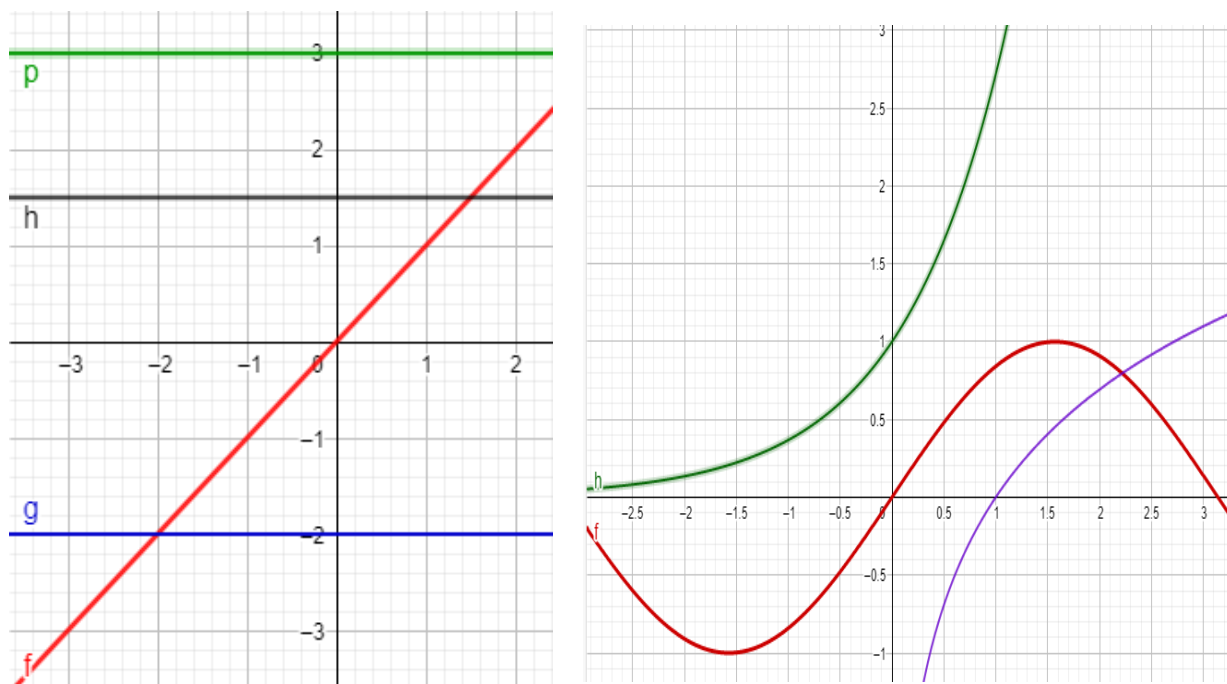


Figura 26: Recta $y = x$, primaria de las funciones algebraicas; junto a rectas $g = -2$; $h = 1,5$; $p = 3$; entre otras constantes. Gráficas de $y = \text{Sen}(x)$, como primaria de las funciones trigonométricas. Junto a la gráfica $y = \text{Ln}(x)$, junto a su inversa $y = e^x$, como primarias de las logarítmicas y exponenciales.

Entonces en las funciones algebraicas una suma clásica, sería entre la función primaria $y = x$, más un valor constante, esta resulta como un movimiento vertical; es decir la función movida: $f(x) = x - 2$, es igual una recta diagonal de pendiente uno, *Bajada* en dos puntos en el plano, de tal forma que corta a los ejes coordenados en los puntos $(0; -2)$ y $(2, 0)$ respectivamente.

Ejemplo 38: Dadas las funciones: $f(x) = x^2$, y $g(x) = x - 2$. Estudie la función suma resultante entre ellas como: $h(x) = x^2 + x - 2$. Y realice su gráfica.

Respuesta: Al factorizar ese polinomio por Ruffini, se descubre que la función $h(x)$, es el producto de las rectas: $(x - 1).(x + 2)$; luego al trazar estas en el plano y realizar su producto queda construida la Parábola que forma la función $h(x)$; ver figura 27 en estas líneas. La función es un polinomio par con Dominio observable de todos los números reales, donde la concavidad o el llamado vértice de la curva está por debajo de la imagen $y = -2$, y de allí sube al infinito positivo; es decir su Rango observable puede ser el intervalo aproximado de: $[-2, 2; +\infty)$. Adicionalmente se aprecian los elementos nulos del producto, en $x = 1$, y 2 ; esto es que la función pasa por el eje horizontal o recta: $y = 0$.

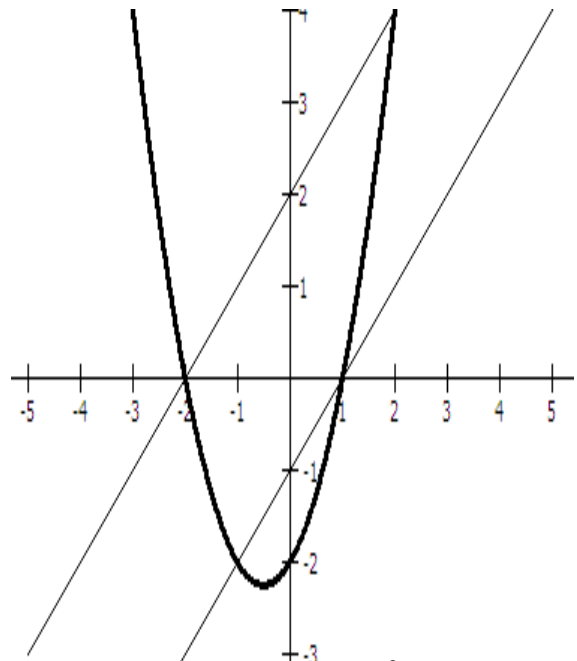


Figura 27: Gráfica de $h(x) = x^2 + x - 2$. Como el producto de las rectas $(x - 1).(x + 2)$

Ejemplo 39: Grafique y estudie por observación la función: $f(x) = \text{Ln}(x) + \text{Sen}(x)$.

Respuesta: La función es la suma de dos funciones trascendentes primarias, que se aprecia en la gráfica de la figura 28; en donde en cada múltiplo de $\pi/2$ donde el Seno como función sinusoidal se anula la función resultado intercepta a la función logaritmo natural, ambas en verde. Además, de manera intuitiva se puede hacer una aproximación a la existencia del único corte con el eje "X", después del $x = 0,5$; expresar el Dominio como el intervalo real desde el Cero abierto al más infinito: $(0, +\infty)$, y el Rango de todos los números reales, en la función suma resultado de color rojo.

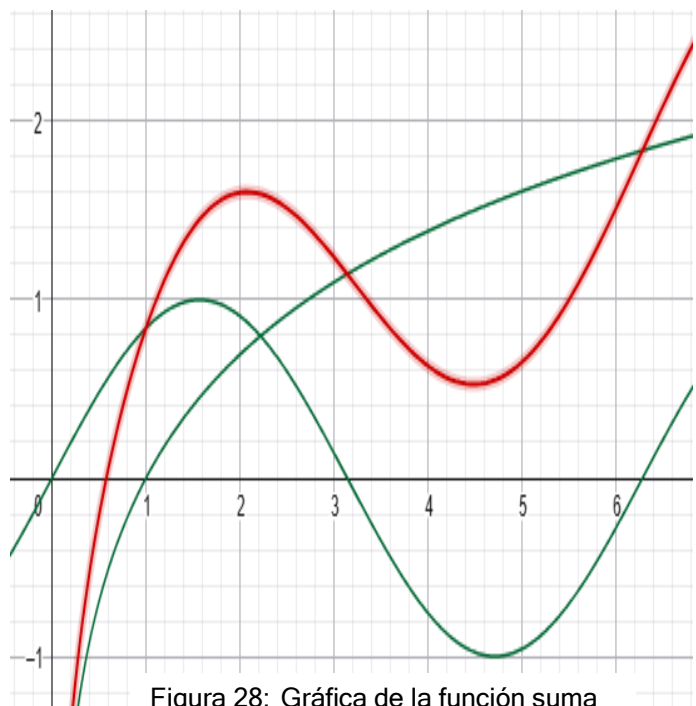


Figura 28: Gráfica de la función suma $f(x) = \text{Ln}(x) + \text{Sen}(x)$, en color rojo.

El método *Grafica de Relaciones* no busca competir con los Softwares para realizar gráficas de relaciones en el plano, estos sistemas grafican punto a punto, a una altísima rapidez sin

explicar los puntos de interés o las tendencias; en contrapartida el método, resulta como una habilidad aprendida para esbozos cercanos a la realidad, realizado en la Pizarra o en los cuadernos del estudiante, los cuales pueden construir cualquier función, como se afirmó

En la unidad de Funciones es donde se estima el Dominio y Rango de manera analítica al buscar restricciones posibles hacia los números reales, así como los puntos notables, tendencias, y cortes o intersecciones de la función o funciones dadas para estudiar.

El método es una estrategia de enseñanza que busca mejorar los aprendizajes por retroalimentación del concepto, y por comparación de resultados entre lo que se observa y aprende de manera Apriorista, con los resultados analíticos que se aprenderán en la unidad de Funciones; en una dualidad que promueve la motivación y participación del estudiante, sin buscar sustituir o solapar la Matemática algebraica actual, más si complementar su enseñanza.

Ejemplo 40: Grafique y estudie por observación la función: $f(x) = 1/x$. Estime su dominio, rango, cortes con los ejes, y por aproximación tabular descubra sus asíntotas.

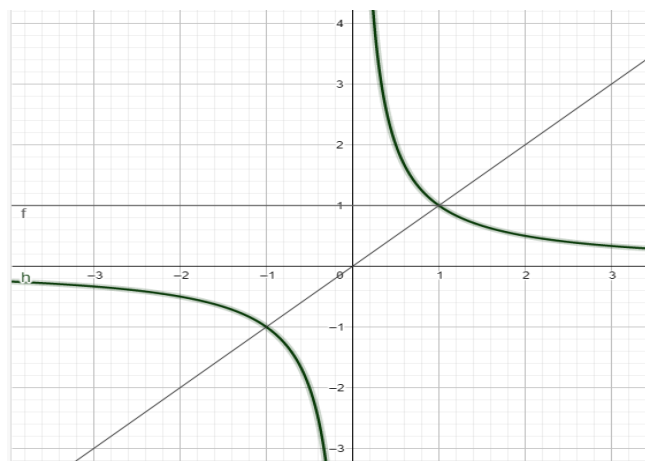


Figura 29: Gráfica de la función cociente $y = 1/x$.

Respuesta: El cociente entre la recta horizontal $y = 1$, y la recta diagonal $y = x$, ambas en tono gris; construyen esta función como una especie de Hipérbole inclinada, con dominio en todos los reales menos el cero y rango igual; la función no tiene cortes o intersecciones con los ejes coordenados; además, de ser *Monótona* y por ende *Biyectiva*. Verla en la siguiente figura 29.

Para confirmar sus asíntotas se usa la noción tabular por aproximación al cero por ambos lados, así como una tendencia a números altos por la derecha y por la izquierda, ver tabla 5.

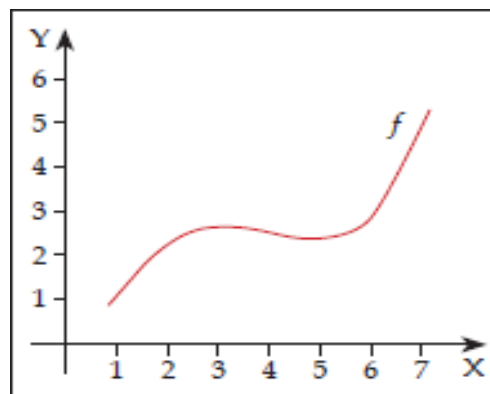
Tabla 5: Tabulación en acercamiento infinitesimal al cero, y para valores altos en ambos sentidos

x	1 / x	x	1 / x		x	1 / x	x	1 / x
0,5	2	- 0,02	- 50		5	0,20	- 6	- 0,166
0,05	20	- 0,01	- 100		10	0,1	- 20	- 0,05
0,01	100	- 10 ⁻³	- 1000		500	0,002	- 100	- 0,01
10 ⁻³	1000	- 10 ⁻⁴	- 10.000		4000	0,00025	- 2000	- 0,0005

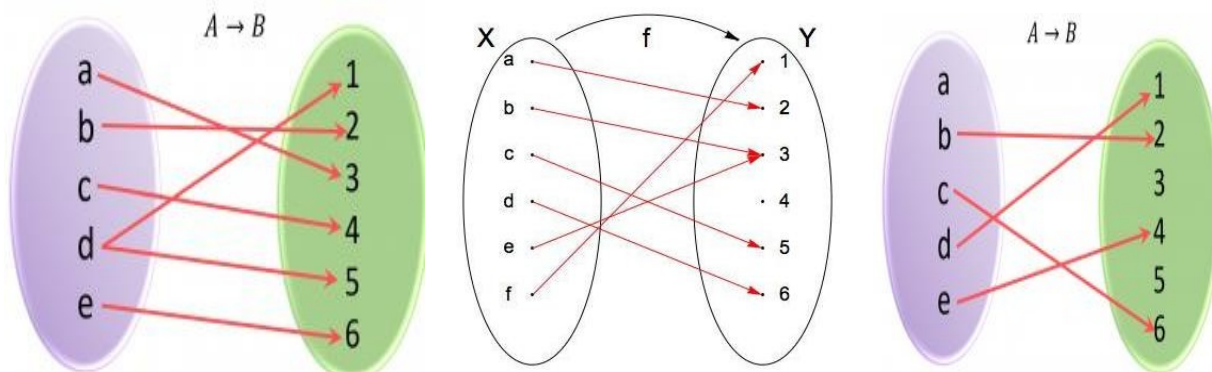
La función tiende a infinito en ambos sentidos verticales para valores muy cercanos al cero, siendo la recta $X = 0$, su asíntota. Luego para valores asumidos al infinito la función tiende al cero por ambos encima y por debajo; es decir, la recta $Y = 0$, es su asíntota horizontal.

Ejercicios propuestos del tema 7

61) De la siguiente figura de la función "f" mostrada, determine aproximadamente su dominio, rango, imágenes de 3 y 7; como: $f(3)$, $f(7)$, y la Contra imagen de 4, $C^i(4)$. R: $[1; 7]$. $[1; 5]$. $f(3) = 2,5$. $f(7) = 5$. $C^i(4) = 6,5$.

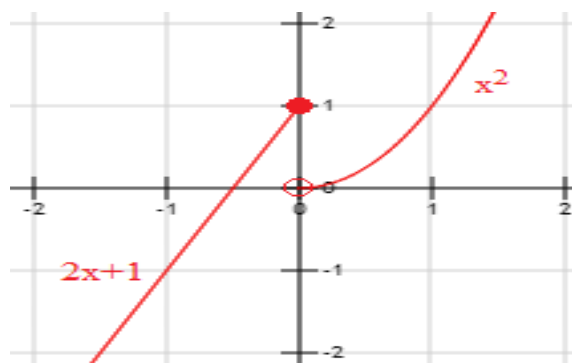
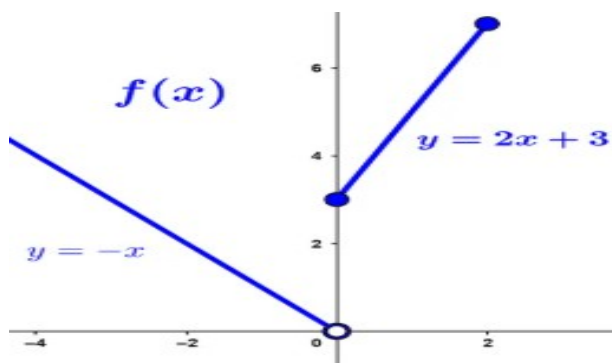


62) De los dos siguientes esquemas sagiales diga si la relación es función, y su característica de Inyectividad.



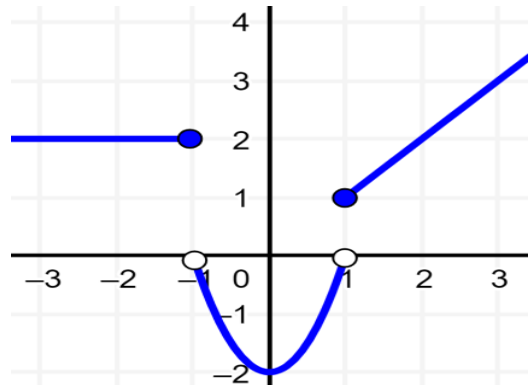
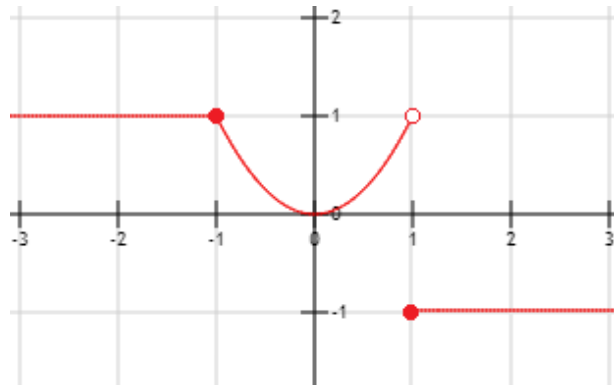
R: El primer esquema no es función. La segunda relación de conjuntos es función sin ser Inyectiva ni Sobreyectivas. La tercera no es función.

63) Diga sobre las siguientes dos gráficas si son funciones, su dominio y rango.



R: Azul. Es función. $\text{Dom}f (-\infty; 2]$. $\text{Ran}f (0; \infty)$. Roja. Es función. Dominio y Rango, todos los reales.

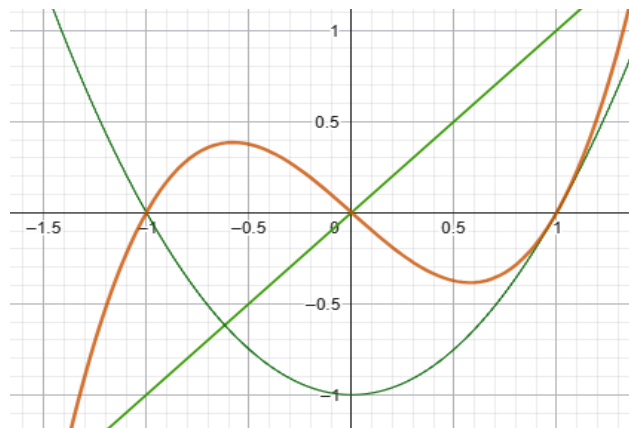
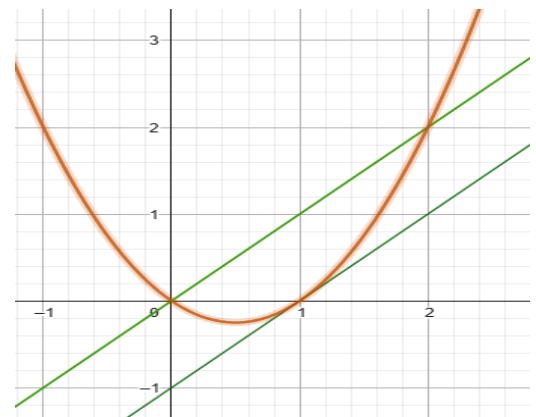
64) Para las siguientes gráficas de funciones, responda por observación su dominio, rango y condición de Inyectividad.



R: Roja. Dominio todos los reales. Ranf $\{-1\} \cup [0; 1]$. Sobreyectiva. Azul. Dominio todos los reales. Ranf $[-2; 0) \cup [1; \infty)$. Sobreyectivas.

65) En la función suma $f(x) = x^2 - x$. Como el producto entre las rectas: $x \cdot (x - 1)$. Por observación de su gráfica a construir, determine su dominio rango y cortes con los ejes coordenados.

R: Dominio todos los reales. Rango $(-0,25; +\infty)$. Cortes en el origen, y en el punto $(1, 0)$.

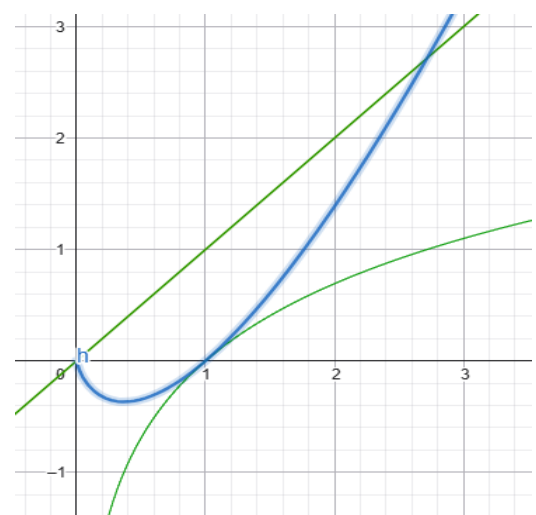


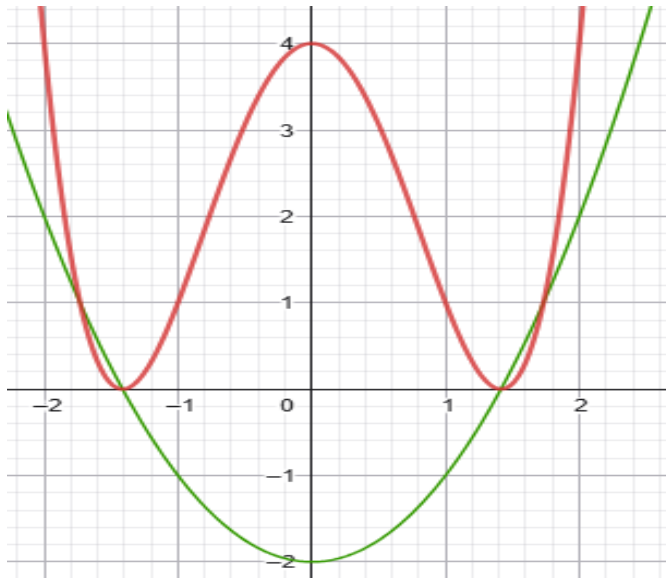
66) Para la función $f(x) = x^3 - x$. Como el producto: $x \cdot (x^2 - 1)$. Realice su gráfica, estime los cortes con los ejes coordenados, su dominio y rango por observación.

R: Cortes en los puntos $(-1; 0)$, $(0; 0)$, y $(1; 0)$. Dominio y rango todos los números reales.

67) De la función producto $g(x) = x \cdot \ln(x)$, entre la recta diagonal con el logaritmo natural. Realice su gráfica, estime su dominio, y condición de Inyectividad por observación.

R: Dominio $(0, +\infty)$, porque los logaritmo no tocan el número cero. Es función Sobreyectivas.



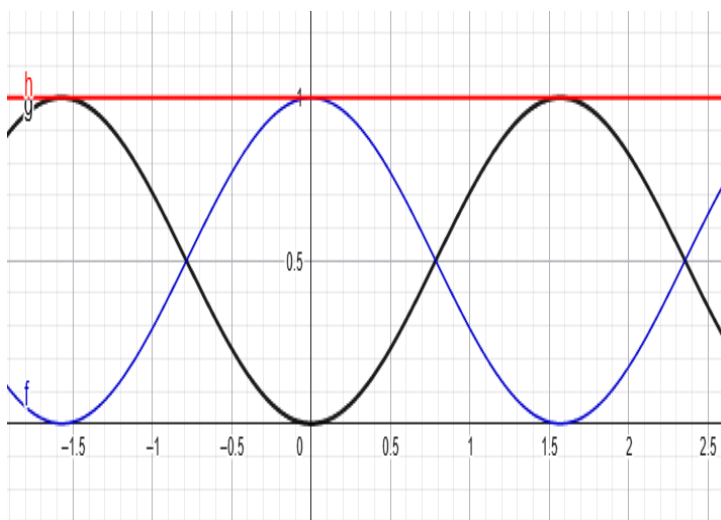
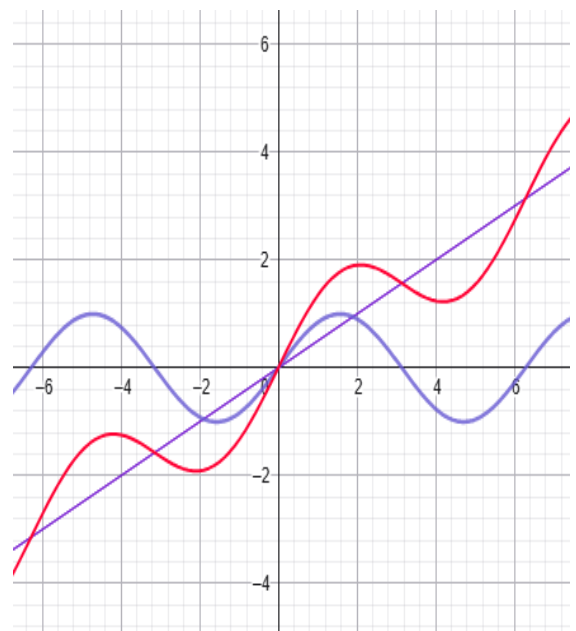


68) Grafique el producto de la siguiente función algebraica por sí misma, $y = (x^2 - 2)$, es decir la función $h(x) = (x^2 - 2)^2$. Luego por observación estime su dominio, rango y cortes con los ejes coordenados.

R: Dominio todos los reales. Rango $[0, +\infty)$. Cortes con la horizontal el $(\pm 1, 2)$ y con la vertical el 4.

69) De la siguiente función resta de la recta diagonal y el seno: $g(x) = \frac{x}{2} + \text{Sen}(x)$. Grafíquela y por observación estime su dominio, rango, e Inyectividad.

R: Dominio y rango todos los números reales. No es Inyectiva. Función en color rojo.



70) Demuestre gráficamente que la función: $I(x) = \text{Sen}^2(x) + \text{Cos}^2(x)$, tiene por resultado la recta horizontal $y = 1$.

R: Al hacer la suma de estas dos funciones trigonométricas clásicas al cuadrado, el $\text{Cos}^2(x)$ en azul, el $\text{Sen}^2(x)$ en negro. Se produce la recta $y = 1$, rojo.

TEMA 8: SECCIONES CÓNICAS

Las secciones cónicas tienen su origen desde la antigüedad, una vez reconocido el Cono como un volumen geométrico, luego si este se considera vacío y se sesiona por planos cortantes se logran figuras interesantes que los matemáticos del mediterráneo establecieron desde el 340 A.C., como líneas perimetrales que primero resultan como relaciones al expresarse en el plano coordenado, luego por medio de giros, partes o arcos, pueden ser funciones.

Las llamadas *Secciones Cónicas* se establecen con sus nombres hasta la actualidad desde el año 230 a.C., denominadas: *Circunferencia* al cortar un Cono por una sección paralela a la base, donde la base misma es un círculo, también se llama corte perpendicular al eje central del Cono. *Elipse* cuando el corte es igual completo pero inclinado. *Parábola* cuando el corte o sección es inclinado, y paralelo a una generatriz o arista proyectada, además de incluir la base. Y se llama *Hipérbole*, la superficie que genera un corte similar a la Parábola, pero no paralela a la arista, pudiendo ocurrir la llamada figura simétrica de la hipérbole, cuando el corte incluye un doble-Cono unidos por su vértice punta. A continuación, en la figura 30, un dibujo clásico de las secciones cónicas.

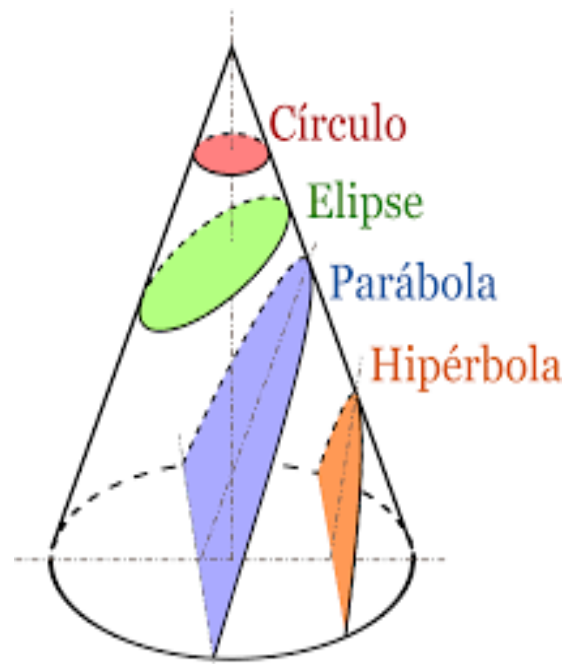


Figura 30: Secciones Cónicas

Partiendo de una ecuación general, para primero identificar qué tipo de sección Cónica es, luego lograr por algebra su expresión Canónica (similar al procedimiento para descubrir los dos puntos de cortes en eje de una recta recta), pero ahora en una ecuación cuadrática completando binomios); en una expresión que permite ubicar puntos característicos como: El centro, vértice(s), focos y tendencias; para el trazado tipo esbozo de la sección cónica en el plano coordenado (Stewart, 2012) y (Thomas y Finney, 1998).

Luego se busca obtener su dominio, rango, ubicación en el plano coordenado, cortes con los ejes, y la posible parte de la cónica que se a una función, al graficar un “Arco” como una parte de ella, que cumpla con esta condición.

La ecuación general de una sección Cónica es el siguiente polinomio de dos variables igualado a cero: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. De donde se obtiene que es una Circunferencia si los coeficientes A y B son iguales; y será una Elipse si son coeficientes diferentes positivos, siendo la elipse vertical si $A > B$, y horizontal cuando $B > A$. Como los lugares geométricos llamadas Cónicas cerradas, que no son funciones del plano. (Tirado y Figuera, 2017).

La figura de la ecuación será una Hipérbola, cuando A y B son de signos opuestos pudiendo ser iguales; donde la curva sea una o doble simétrica, será vertical si A es negativa y horizontal si B es el coeficiente negativo; se termina con la Parábola cuando solo hay una variable al cuadrado, siendo vertical para B = 0, en su versión cóncava si A es positivo, y convexa si es negativo. Luego la Parábola es horizontal para A = 0, con apertura hacia la derecha para B positivo y a la izquierda si b es negativo. Como las secciones Cónicas abiertas, donde sola la parábola vertical y la hipérbola inclinada son funciones del plano.

8.1) Circunferencia y Elipse

La circunferencia es: Un lugar geométrico que traza una línea equidistante en una distancia llamada Radio, de su centro característico, siendo su expresión Canónica $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, la cual se obtiene de la fórmula de distancia entre dos puntos, uno el centro y cualquier otro punto de la circunferencia "P". Esta figura fue de las primeras estudiadas por la humanidad por la facilidad de su trazado constante con la herramienta del compás, siendo el llamado círculo trigonométrico la base para deducir las funciones Seno y Coseno; la circunferencia completa no es un función del plano.

La Elipse es una especie de circunferencia *Alargada* doblemente simétrica, requiriendo para su trazado del punto centro y dos *Vértices* relacionados con puntos internos llamados *Focos*, definida entonces como: El lugar geométrico en donde la suma de las distancias desde cualquier punto de borde hacia sus dos focos es constante.

A continuación, la figura 31 muestra estas dos secciones Cónicas cerradas, con sus características

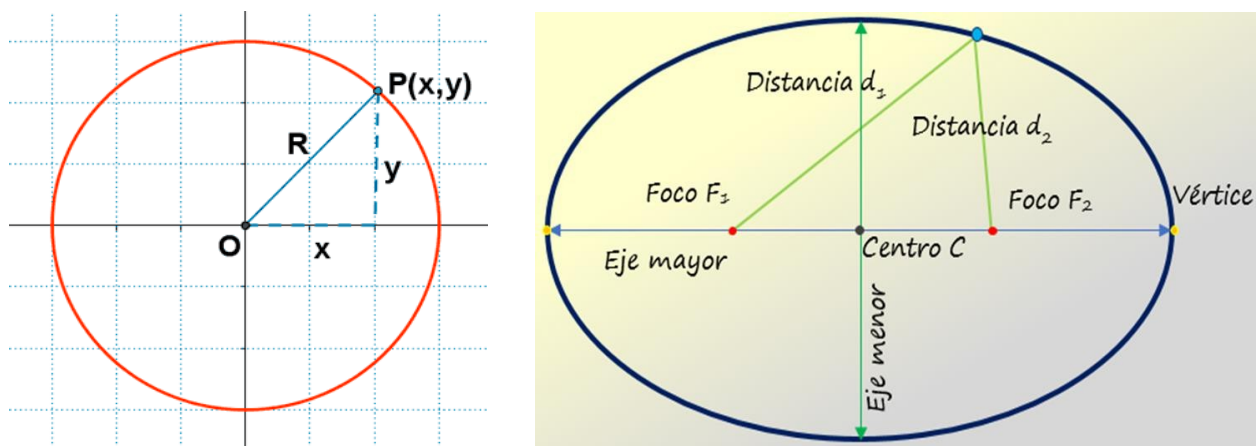


Figura 31: Circunferencia con su centro y radio. Elipse con su centro, vértices, focos y sus distancias "d" menores que los vértices que definen su orientación

La circunferencia como la más elemental de la secciones Cónicas, solo requiere de su Centro ubicado en plano y de la distancia del Radio para ser graficada, donde cada punto "P" está en relación con el triángulo rectángulo inscrito sin denominarse vértice, porque la

circunferencia es simétrica siempre con respecto a cualquier recta que la divida por su centro, (diámetro). Siendo su ecuación canónica Centro-Radio: $(X - h)^2 + (Y - k)^2 = r^2$, con centro en el punto $(h; k)$ y radio “r”.

La Elipse en cambio depende para su dibujo de la suma constante de las distancias d_1 y d_2 , o un trazo tipo esbozo alrededor de sus focos, conocida primero su orientación, sus vértices en el eje mayor y sus puntos en el eje menor; importante es el hecho que la Elipse es simétrica con respecto a sus dos ejes, a diferencia del Óvalo como figura similar que solo es simétrico a uno de sus ejes. La ecuación canónica Centro-Vértices de la Elipse: $\frac{(X - h)^2}{a^2} + \frac{(Y - k)^2}{b^2} = 1$.

La cual debe obtenerse desde su forma general dada; aquí el centro es $(h; k)$, los vértices focales, llamados mayores que establecen la orientación de la Elipse, se obtienen con el valor mayor entre “a” y “b”, los vértices menores con el valor menor, que implican el *Ancho* o la *Altura* de la Elipse, y los Focos con un valor de la letra “c”, cómo la resta positiva entre “a y b”.

Es decir, para una elipse clásica horizontal como la figura mostrada, ocurre que $a > b$; entonces los vértices focales son: $(h \pm a; k)$. Los vértices menores son: $(h; k \pm b)$. Los focos estarán ubicados en: $(h \pm c; k)$; con este valor como: $c^2 = a^2 - b^2$. Y por supuesto el centro de la elipse en el punto $(h; k)$. Interesante es obtener estos valores de manera similar para la Elipse vertical.

Ejemplo 41: Diga qué tipo de sección Cónica es la relación $2.X^2 + 2.Y^2 - 2Y = 8$, encuentre sus puntos de interés y grafique.

Respuesta: La ecuación describe una circunferencia porque los coeficientes de las variables al cuadrado son iguales; realizando el complemento de cuadrados, solo para la variable “Y”, de la forma: $X^2 + (Y - 1)^2 - 1 = 4$. De donde se obtiene la ecuación “Centro-Radio” de la circunferencia como: $X^2 + (Y - 1)^2 = 5$. Es decir, su centro es el punto $(0; 1)$ y su radio es $\sqrt{5}$.

Ejemplo 42: Encuentre la orientación, los focos, los vértices mayores, los vértices de ancho, y trace la siguiente Elipse: $9.X^2 + 25.Y^2 = 225$.

Respuesta: El ejemplo señala que es una Elipse porque los coeficientes cuadrados son diferentes y de signo positivos; la orientación es horizontal por ser $B > A$. Lo cual se invierte entre los valores a y b, cuando se obtiene la forma canónica de la ecuación, al ser divisores; esto ocurre al dividir la relación entre el valor de 225 como es: $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$.

La Elipse está ubicada en el origen coordenado, los vértices focales son: $(- 5; 0)$ y $(5; 0)$. Los vértices menores en este caso como las Alturas de la Elipse son: $(0; - 3)$ y $(0; 3)$. Y los focos con: $c^2 = 25 - 9$, son: $(- 4; 0)$ y $(4; 0)$. Ver Siguiente figura 32, con las gráficas de estos dos primeros ejemplos de relaciones cónicas

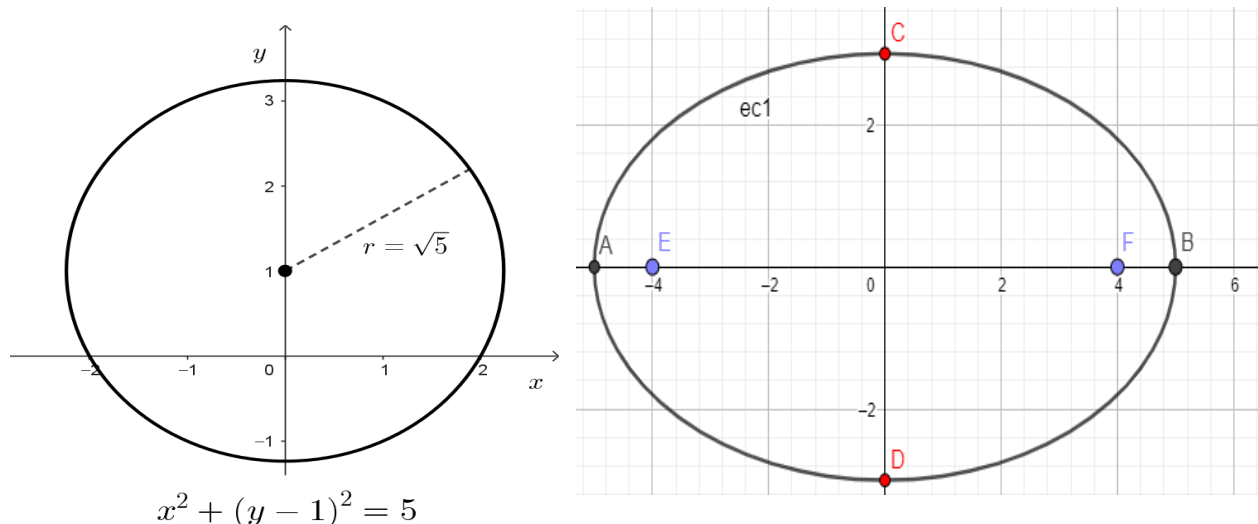


Figura 32: Gráfica de la circunferencia $X^2 + (Y - 1)^2 = 5$; su centro y radio. Gráfica de la Elipse en el origen $9.X^2 + 25.Y^2 = 225$. Sus vértices focales: A y B, Sus focos: E y F, Con sus vértices menores C y D.

8.2) Parábola e Hipérbola

La Parábola es una curvatura donde una de las variables no está al cuadrado, será vertical que es una función del plano, cuando $B = 0$ de la ecuación general, y horizontal cuando $A = 0$; con las aperturas de sus ramas indicadas. Para trazar la parábola se requiere de la su expresión Vértice-Foco de la forma: $(Y - k)^2 = 4P \cdot (X - h)$, para una parábola horizontal, con foco en el punto $(P + h, k)$; y de la forma $(X - h)^2 = 4P \cdot (Y - k)$, para una parábola vertical, con foco en el punto $(h, P + k)$. Donde el punto (h, k) será el vértice de la parábola en ambos casos; con ramas simétricas desde ese punto alrededor del foco; siendo la llamada *Directriz* una recta frontal y opuesta al foco, o sea fuera de la parábola y ubicada a la misma distancia “P” del vértice. Recta que permite el correcto trazado de la parábola.

La parábola entonces se define como: El lugar geométrico del plano de puntos equidistantes desde una recta llamada Directriz al punto focal; siendo el vértice el punto intermedio entre el foco y la recta directriz que será vertical u horizontal, según el tipo de parábola.

En la siguiente figura 33, se muestran dos parábolas con sus puntos notables Vértice-Foco, la primera a la izquierda es horizontal y la siguiente vertical, ambas positivas; es decir, en la primera la distancia entre el foco y el punto vértice: $(-1, 2)$, es igual a la unidad porque el valor $4P = 4$, distancia absoluta igual hacia la directriz, como recta vertical $X = -2$. Entonces su ecuación es: $(Y - 2)^2 = 4 \cdot (X + 1)$.

Y la parábola vertical al lado tiene esta distancia en dos, o sea, $4P = 8$; su vértice en el punto $(1, 2)$, con ecuación canónica como: $(X - 1)^2 = 8 \cdot (Y - 2)$.

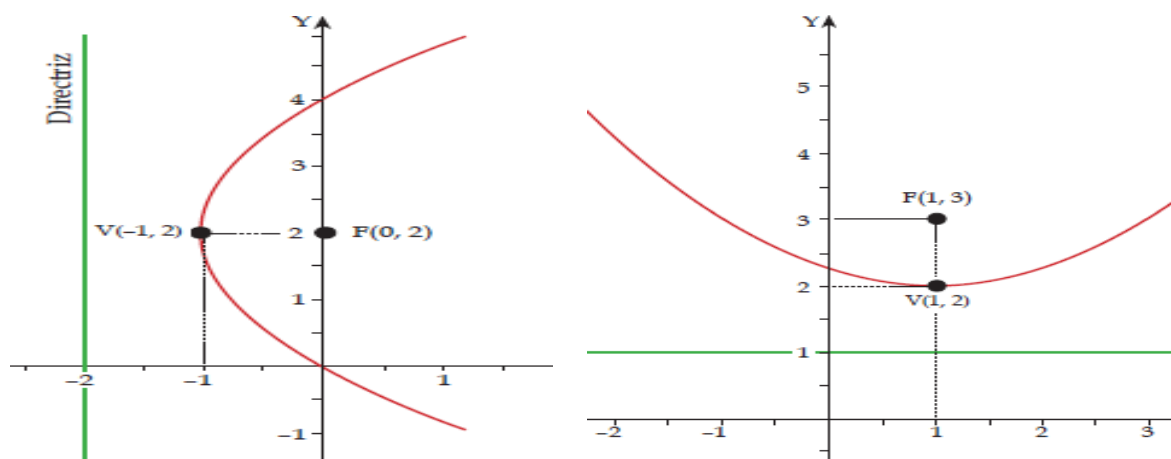


Figura 33: Gráfica de la Parábola horizontal: $(Y - 2)^2 = 4X + 4$. A la izquierda, y de la Parábola vertical a la derecha: $Y = 0,125.(X - 1)^2 + 2$; en rojos. Con sus respectivas rectas directrices en verde.

Una Hipérbola es un dibujo del plano parecido a una doble parábola encontradas simétricamente, con la diferencia fundamental que sus ramas tienen a una recta oblicua o inclinada en su fórmula clásica, como asíntotas; en la parábola sus ramas tienen apertura infinita sin tendencia; la Hipérbola igual puede ser horizontal o vertical, con la característica de poseer un centro orientativo, un vértice con su foco para cada rama de apertura infinita y asíntótica.

La Hipérbola entonces es: El lugar geométrico del plano que sigue la norma donde la resta absoluta entre las distancias de cualquier punto en ella hacia los dos focos es un número constante; esto significa que la distancia $|P.F_1 - P.F_2|$, es un valor constante equivalente a la distancia entre sus dos vértices de $2.a$. Ver la siguiente figura 34, donde se aprecia lo dicho y se observan sus puntos notables: Vértices, centro en el origen y sus focos, destacando que tiene disposición horizontal.

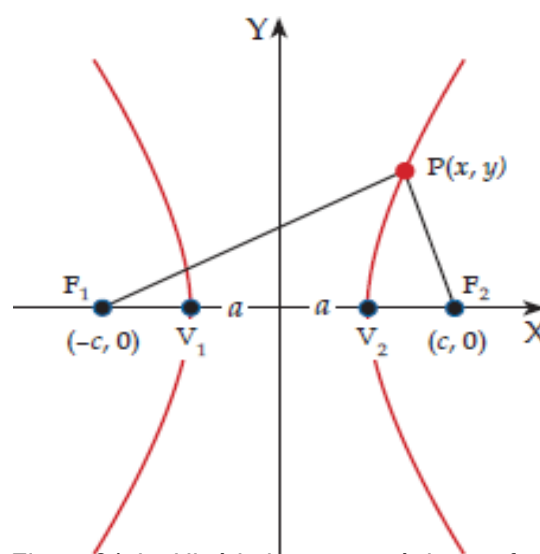


Figura 34: La Hipérbola centro, vértices, y focos

Al desarrollar la definición como la resta entre las distancias que son hipotenusas de triángulos rectángulos: $\sqrt{(X - c)^2 + (Y - 0)^2} - \sqrt{(X + c)^2 + (Y - 0)^2} = 2.a$, se logra obtener luego de varios pasos algebraicos de separaciones, elevar al cuadrado para suprimir las raíces, y juntar términos convenientes, la relación: $(c^2 - a^2).x^2 - a^2.y^2 = a^2.(c^2 - a^2)$. De donde se conoce que "c" es mayor que "a", por lo que podemos sustituir como valor positivo $b^2 = c^2 - a^2$. Quedando esta relación de la forma: $b^2.x^2 - a^2.y^2 = b^2.a^2$. De donde se obtiene la ecuación

canónica de la Hipérbola horizontal en el origen coordinado, en un proceso similar al de la Elipse, como: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Siendo su ecuación general como: $\frac{(X-h)^2}{a^2} - \frac{(Y-k)^2}{b^2} = 1$. Con su forma vertical cuando la “X”, es negativa; donde el valor de “a” permite ubicar sus vértices en la recta focal, y el valor de “c” sus focos; el punto “b” en las hipérbolas, es la distancia perpendicular entre un vértice en el eje focal y su asíntota de lado, que se usa para estimar al pendiente de estas rectas inclinadas.

Las Hipérbolas tienen por característica única en la Cónicas la presencia de asíntotas rectas que marcan la tendencia infinita de la apertura de sus ramas como se ha dicho; es decir, para su grafica solo se requieren de sus vértices y de estas rectas para realizar el trazado por aproximación. Estas asíntotas se obtienen a igual que su centro, vértices y focos a partir de su expresión canónica mediante los siguientes cálculos: Su centro igual es el punto (h ; k), los vértices en esta Hipérbola horizontal son (h ± a ; k), y sus focos estarán ubicados en los puntos (h ± c ; k), respectivamente; con este número como: $c^2 = a^2 + b^2$. Seguidamente sus asíntotas son dos rectas cruzadas que pasan por su centro referencial deducidas como: $y = \pm \frac{b}{a}(x - h) + k$. Similar e interesante para el lector, calcular estos puntos en la Hipérbola vertical.

Ejemplo 43: Encuentre la orientación, el foco, su vértice, su directriz, y diga si la siguiente cónica es una función del plano: $y = x^2 - 3x + 1$.

Respuesta: Es una Parábola vertical porque solo la variable “x” esta al cuadrado, y por ende es una función del plano cartesiano; primero se busca por complemento de cuadrados su expresión canónica: $y = x^2 - 3x + (3/2)^2 + 1 - 9/4$, $\rightarrow y = (x - 3/2)^2 - 5/4$. Que se expresa de la forma: $(y + 5/4) = (x - 3/2)^2$; para ubicar su vértice, en el punto: (3/2 ; - 5/4).

Su distancia focal es $4p = 1$, de 0,25; igual a la distancia a la directriz. Luego la Parábola, con todos sus elementos y su directriz horizontal como la recta $Y = - 1,5$. Resultados que se aprecian en la figura 35, al lado de estas líneas.

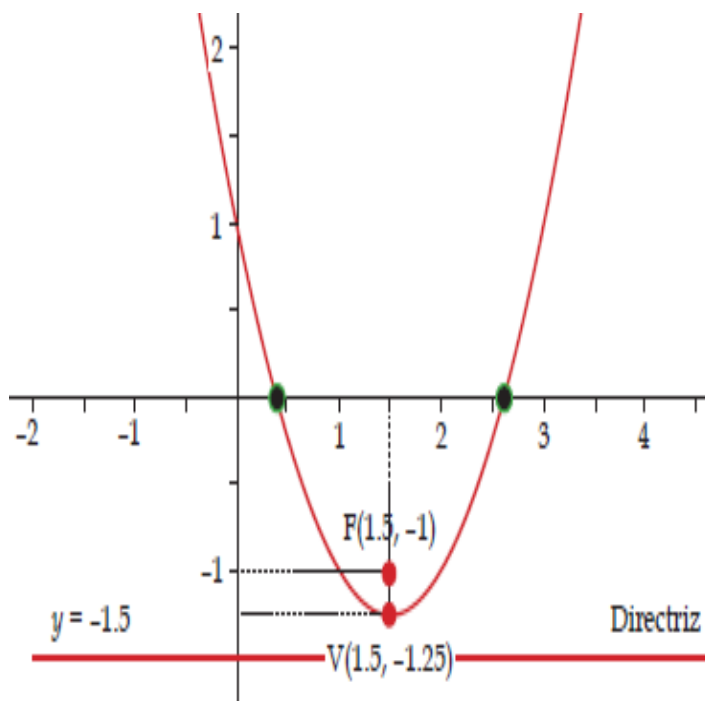


Figura 35: Parábola $y = x^2 - 3x + 1$. Su vértice, foco, y directriz

Ejemplo 44: Dada una Hipérbole centrada en el origen, con los focos en los puntos: $(\pm 2, 0)$, y vértices en los puntos $(\pm 1, 0)$. Diga su orientación, encuentre su ecuación canónica, sus asíntotas y realice su gráfica.

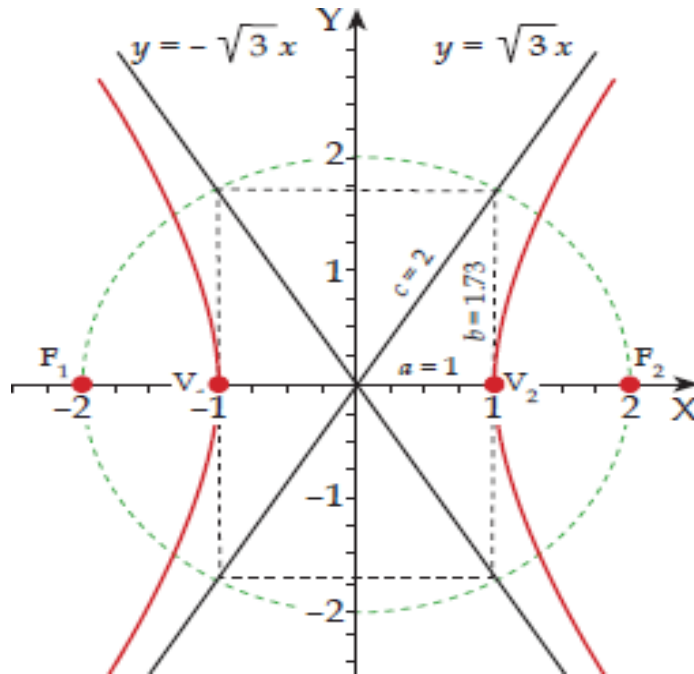


Figura 36: Hipérbole de focos y vértices dados.

Respuesta: La Hipérbole es horizontal por estar sus focos y vértices alineados en el eje "X"; con los valores de $c = 2$, y $a = 1$, se obtiene el valor de $b = \sqrt{4 - 1} \approx 1,73$. Recordando que este número permite el cálculo de las pendientes de las asíntotas inclinadas; estas son las rectas: $y = \pm \sqrt{3} \cdot x$, que cruzan por el origen. Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$. Ver la figura 36 con la gráfica de esta Hipérbole, y sus puntos de interés.

8.3) Resumen sobre Cónicas

La Circunferencia no es una función del plano, solo lo será uno de sus casquetes verticales, sea su parte alta llamada convexidad o su parte baja llamada concavidad; es decir los puntos en el plano que satisfacen una de estas dos posibilidades de signo: $(y - k) = \pm \sqrt{r^2 - (X - h)^2}$; siendo la ecuación positiva la convexa.

En la Elipse es similar, en cualquiera de sus orientaciones de alargamiento, solo será función uno de sus casquetes verticales, el cóncavo o el convexo, cuya grafica será una de las dos posibilidades de la ecuación: $(y - k) = \pm \sqrt{E^2 - A \cdot (X - h)^2}$.

La Parábola vertical es la única Cónica que es función con sus dos ramas, en el caso de su versión horizontal solo será función una de sus ramas que salen del vértice, sea la superior o inferior; es decir, una de las dos posibilidades de la ecuación: $(y - k) = \pm \sqrt{4P \cdot (X - h)}$.

La Hipérbole vertical no es función, al menos que solo se tome una de sus curvas asíntoticas: La superior o la inferior, o dos de sus ramas contrapuestas; y en la Hipérbole horizontal solo será función las ramas contrapuestas, o las ramas frontales; es decir y como se aprecia en la figura 36 del ejemplo 44, será función si se toman: Las dos ramas positivas o negativas frontales, y cualquier combinación contrapuestas.

Las Cónicas tiene su versión oblicua o inclinada en el eje coordenado, salvo la circunferencia; la Elipse y la Parábola inclinadas no son funciones, y solo la Hipérbole es función del plano en su completitud cuando se le inclina; es decir cuando sus focos y vértices están sobre una recta inclinada o oblicua diferente a los ejes coordenados clásicos, siendo estos sus asíntotas (Tirado y Figuera, 2017).

Las tres secciones Cónicas inclinadas incluyen el término “x.y” de tal manera que ahora su ecuación general es: $Ax^2 + Bx.y + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; donde será una Parábola inclinada si A o C son cero, será una elipse oblicua si el producto A.C es mayor a cero, y será una Hipérbole inclinada si el producto A.C es negativo.

De esta última surge una función del plano muy estudiada en el Cálculo diferencial, cuando A y C son cero, se produce una Hipérbole inclinada a 45°; con asíntotas en los ejes coordenados, y su eje focal como la recta inclinada $y = x$, su versión clásica es para B positiva de valor uno; similar a la hipérbole vista en el ejemplo 40, de fórmula $f(x) = 1/x$.

Ejemplo 45: De la hipérbole oblicua o inclinada del ejemplo 40, con centro en el origen coordenado, punto (0; 0). Calcule y agregue a su grafica los vértices, focos, y la distancia b.

Respuesta: Por observación se deduce que los vértices sobre la recta focal $y = x$, son los puntos $V_1 (1; 1)$ y $V_2 (-1; -1)$. De tal forma que la distancia “a” es $\sqrt{2}$, como la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales a uno; y el valor de “b” se aprecia igualmente un valor de $\sqrt{2}$, o distancia de cada vértice a su asíntota cercana mediante una recta tangente a la hipérbole en dichos puntos.

Ver la siguiente figura 37 que ilustra esto junto con el llamado rectángulo de las asíntotas, que facilita su trazado; que en este caso es un cuadrado por ser una hipérbole simétrica.

El valor de “c” se calcula como, $c = \sqrt{2 + 2} = 2$. Entonces los focos sobre la recta oblicua $y = x$, son los puntos $F_1 (\sqrt{2}; \sqrt{2})$ y $F_2 (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, cuyas distancias al centro tienen el valor de $c = 2$.

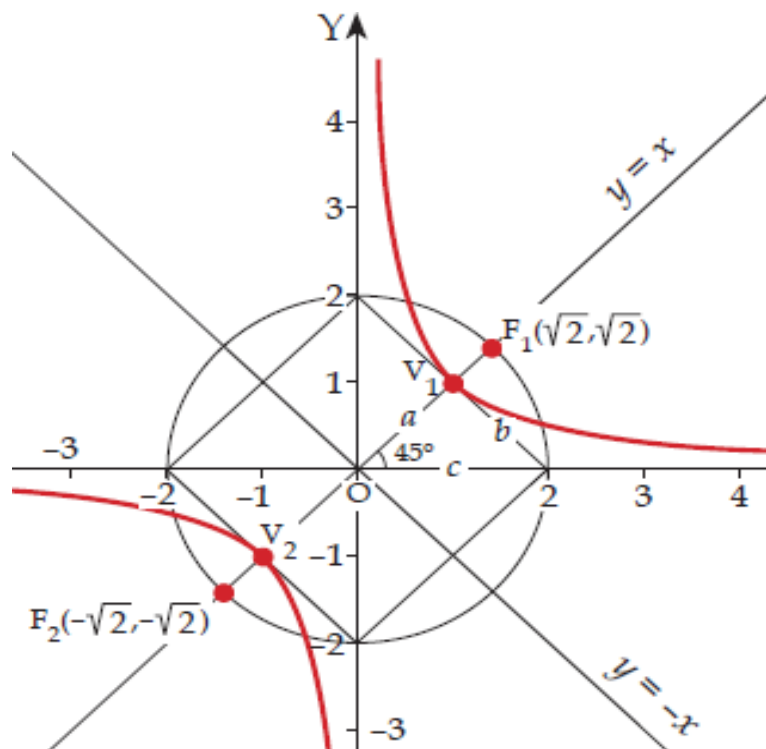


Figura 37: Hipérbole inclinada clásica, $y = 1/x$.

Ejercicios propuestos del tema 8

71) De las siguientes ecuaciones generales de curvas en el plano, reconozca que tipo de sección Cónica es, y diga su orientación

a) $8x^2 + 8y^2 + 22x - 54y + 86 = 0$.

b) $x^2 + 4y^2 - 3x - 12y + 8 = 0$.

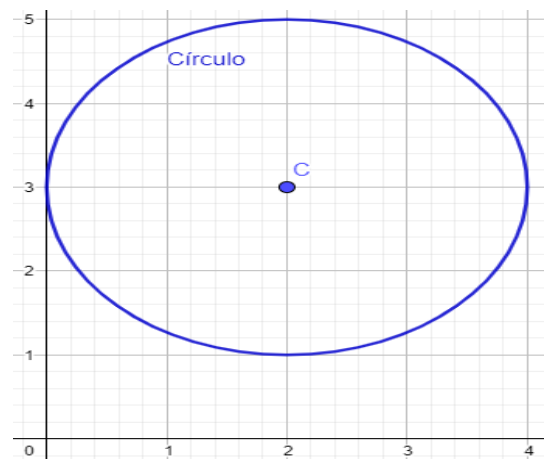
c) $x^2 - y^2 + 4x - 6y + 100 = 0$.

d) $x^2 + 2x - 8y + 28 = 0$.

R: Circunferencia. Elipse horizontal. Hipérbole horizontal. Parábola vertical cóncava.

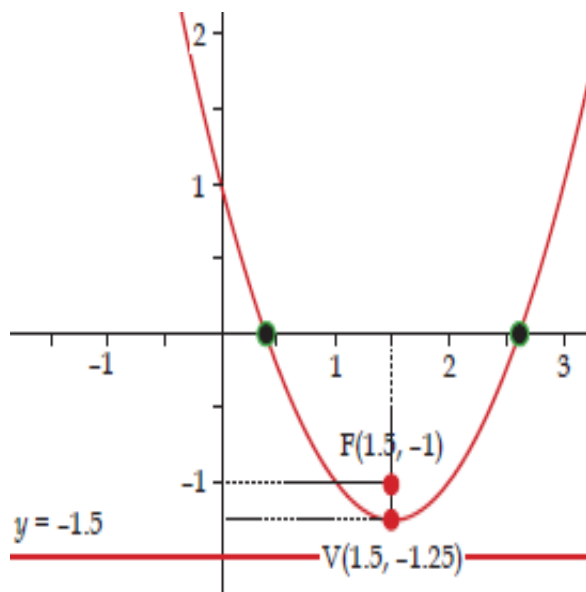
72) Dada la ecuación $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$, de una circunferencia. Dibuje su gráfica y estime por observación el dominio, rango y cortes con los ejes, de esta relación que no es una función del plano.

R: Domf [0; 4]. Ranf [1, 5]. Corte único con la vertical (0; 3).



73) Determine la ecuación de una circunferencia que tiene centro en el punto $(-1, 1)$ y es parte de su perímetro el punto $(2, 3)$. **R: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$.**

74) De la siguiente Parábola $y^2 - x - 2y + 1 = 0$. Diga si es una función del plano, calcule su vértice, foco, estime por observación en su gráfica su dominio, rango y cortes con los ejes coordenados. **R: No es función. V (0; 1). F (0,25; 1). Dom(f) $[1; +\infty)$. Ran(f), todos los reales.**



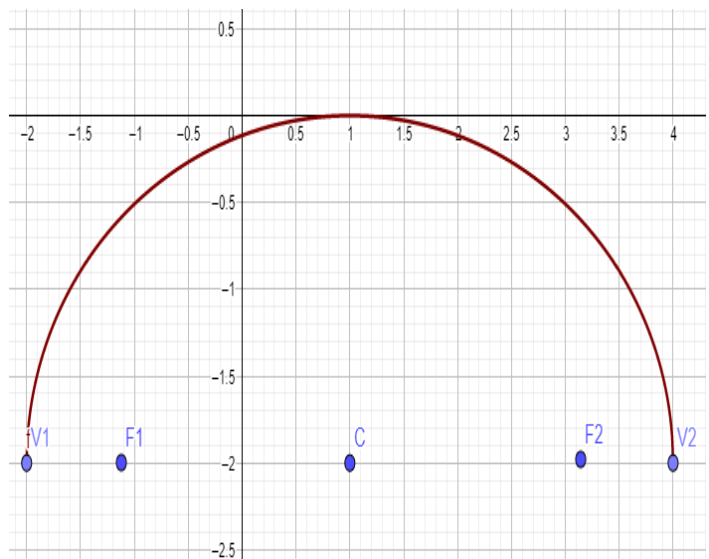
75) De la siguiente parábola vertical cóncava, abertura hacia arriba $y = x^2 - 3x + 1$. Calcule los puntos para su gráfica: vértice, foco, distancia "p" y directriz; luego a partir de ella estime el dominio y su rango. **R: V $(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4})$. P = 0,25. F (1,50; - 1,25).**

Directriz y = - 1,50. Dominio todos los números reales. Ran(f) $[-1,50; +\infty)$.

76) Determine la ecuación de una Elipse y su orientación, si tiene uno de sus focos en el punto sobre la horizontal (3; 0), y el vértice de ese lado es el punto (5; 0). **R: Es una Elipse centrada en el origen, del tipo horizontal, con fórmula $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.**

77) Determine el lugar geométrico de un punto P(x, y) que se mueve de forma tal que la distancia a otros dos puntos A(2, 0) y B(-1, 3) cumple con la condición de que la distancia PA es el triple de la distancia PB. **R: Es una circunferencia de ecuación general $8x^2 + 8y^2 + 22x - 54y + 86 = 0$.**

78) De la siguiente fórmula para una Elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$. Estime sus puntos de interés, vértices, centro y focos; realice la gráfica solo del casquete superior o convexidad, y estime por observación su dominio y rango. **R: Centro (1; - 2). F₁ (3,24; - 2). F₂ (-1,24; - 2). V₁ (- 2; - 2). V₂ (4; - 2). Dominio [- 2; 4]. Rango [- 2; 0].**

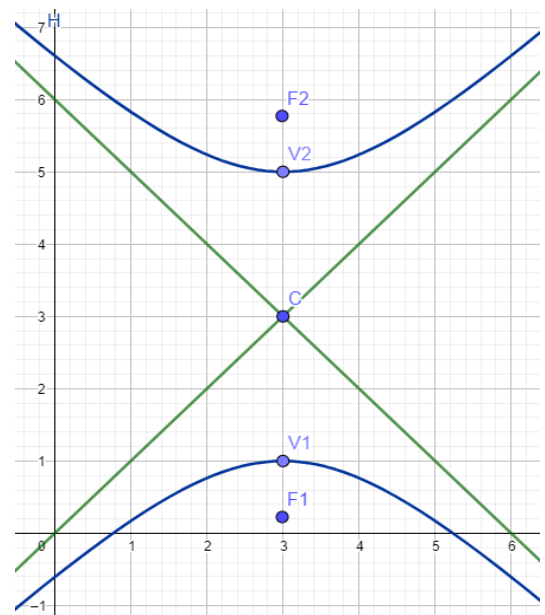


79) Determine la ecuación y sus rectas asintóticas, de una Hipérbole centrada en el origen con vértices (1; 0), y (- 1; 0). Focos (- 2; 0), y (2; 0). Luego estime con estos datos el dominio y el rango, de esta relación. **R: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$. Asíntotas $y = \pm (\frac{1}{\sqrt{3}})x$. Dominio $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.**

Rango de todos los números reales, por ser una Hipérbole vertical.

80) Realice la gráfica de la Hipérbole $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$. Calculando sus vértices, centro, focos y asíntotas; luego estime por observación el dominio y el rango de esta relación del plano. **R: Centro (3; 3). V₁ (3; 1). V₂ (3; 5). F₁ (3; 0,17). F₂ (3; 5,83). Dominio todos los números reales.**

Rango $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. Con la nota de ser una Hipérbola equilátera, por ser sus asíntotas de pendiente uno y por ende perpendiculares entre sí, de ecuaciones: $y = \pm (x - 3) + 3$.



EPÍLOGO DE LA OBRA

Esta obra es una parte importante y necesaria para que el estudiante que se inicia en la universidad tenga los conocimientos, experiencias y actitud idónea para cursar entender y superar el llamado Cálculo Diferencial o Matemática I, necesario en las carreras de ingeniería, y licenciaturas de las ciencias exactas; o incluso en mallas de carreras administrativas o médicas donde este contenido aparece en dos o tres asignaturas, y/o sin las funciones trascendentes (Tirado, 2020).

En su consulta se consigue un recorrido lógico e introductorio para las nociones usadas en la llamada primera matemática universitaria, a saber cómo: a) Noción de los números y los diferentes intervalos posibles en ambos ejes del plano coordenado, para ubicar el dominio y rango de las funciones; b) Conocimientos de trigonometría y geometría clásica que permiten identificar las pendientes de las rectas, perímetros, áreas, volúmenes, así como las funciones inherentes y consecuentes; c) Ejemplos puntuales que muestran la aplicación del conocimiento justo en el tiempo requerido más ejercicios propuestos con sus respuestas, de cada temática desarrollada. Con la idea de que una ejercitación específica conduce al logro de la habilidad requerida en la abstracta Matemática I (Tirado y Núñez, 2023).

La obra, sugiere los lineamientos y contenidos exactos y suficientes para desarrollar un curso completo introductorio o la llamada *Nivelación* entre el bachillerato y la universidad; a desarrollarse de forma presencial, en tres encuentros de dos horas cada uno a la semana para cada una de las 08 temáticas expuestas; para un total de 48 horas.

Como se señala en el epígrafe de *Al Estudiante*, el estudio de la matemática debe romper el esquema memorista algorítmico con una ejercitación solo para lograr el dominio algorítmico de la solución para cada temática; en una especie de *Calculismo* que no deja un aprendizaje significativo de los conocimientos matemáticos requeridos para ingresar y entender mejor el Cálculo Diferencial. Con sus ideas de lo infinito, indefinido e indeterminado, o el apriorismo de la derivación en sus notables aplicaciones prácticas en la vida para las ingenierías.

El texto por su agudeza y poderosa sencillez puede ser estudiado y desarrollado a manera individual o grupal, por estudiantes aspirantes a la educación superior, que lo adquieran en un desarrollo en lectura ordenada, consecutiva y con el suficiente compromiso de ejercitar sus ejercicios propuestos, como compromiso autodidacta, o en la asistencia en cursos seleccionados.

EJERCICIOS ADICIONALES CON SU RESPUESTA

81) Si mezclamos 8 litros de gasolina normal con 32 litros de gasolina súper, en cada litro de mezcla ¿Qué proporción hay de gasolina normal? **R: 1/5.**

82) La suma de 2 números es 24. Tres veces el mayor excede en dos unidades a cuatro veces el menor. Hallar los números. **R: 10 y 14.**

83) Si a una fracción ordinaria se le suman a sus dos términos su denominador, está resulta duplicada ¿Cuál es la fracción? **R. 1/3.**

84) Que intervalo resulta de unir $(0; 3]$ con la intersección $[-1, 4) \cap [2, \infty)$. **R: $(0; 4]$**

85) Despeje la incógnita "A" de: $\frac{A}{2(5-3)^2} = \frac{5}{8}$. **R: A = 5**

86) Resuelva la siguiente radical: $\sqrt[3]{2x-3} = 3$. **R: x = 15.**

87) Obtener los valores del sistema de tres ecuaciones

$$2x - 40z = 10z.$$

$$z + 8y = 20.$$

$$6x + 4y - 20z = 15. \quad \mathbf{R: z = 0,0386 \quad x = 0,965 \quad y = 2,495}$$

88) Resolver y obtener los valor posibles de la variable "x" de la relación: $(\sqrt[4]{(3x-1)})^2 = 7$.

R: $x_1 = 50/3, x_2 = -16$

89) Racionalice la siguiente expresión algebraica: $\sqrt[2]{\frac{x^2-2x+1}{a^2 \cdot (1-x)^2}}$. **R: $-1/a$**

90) Expresar en notación científica de 3 cifras significativas, en los siguientes valores 298.547,88 m/s y 12.840,83 metros. **R: $2,99 \times 10^5$ m/s. R: $1,28 \times 10^4$ m.**

91) En que tiempo un proyectil lanzado a velocidad de $(4i + 4j)$ m/s. Alcanza el piso referencial ubicado a 3 metros por debajo de la altura de lanzamiento, exprese la ecuación cuadrática que debe usarse. **R: $0 = 3 + 4 \cdot T_v - 4,9T_v^2$. 1,29 segundos.**

92) ¿Qué número sigue de la siguiente sucesión? 2; 5; 11; 23; ____; **R: 47.**

93) Realice la siguiente división: $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17$, entre $Q(x) = 3x^2 - x + 4$.
R: $2x - 3$; con factor resto de $(x - 5)$.

94) Factorice por ensayo el siguiente binomio potenciado: $4x^2 - 121$. **R: $(2x + 11).(2x - 11)$.**

95) Simplifique el siguiente cociente de polinomios $\frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 3x - 2}$. Como estrategia de reducir su expresión división. **R: $\frac{(x + 5)}{(2x + 1)}$**

96) Encuentre los factores que se conjugan por división, para formar el polinomio: $\sqrt[3]{x} - 3$.
R: $\frac{(x - 3)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9})}$.

97) Factorice el siguiente polinomio: $X^3 - 8X - X + 8$. **R: $(x - 8).(x + 1).(x - 1)$**

98) Qué distancia hay entre los siguientes puntos del plano: $(-3, -1)$, con $(4; 6)$ en pies; y estime el vector con su inclinación con respecto a la horizontal.

R: $d = 7\sqrt{2}$. $\vec{b} = (7i + 7j)$ pies. 45° .

99) Estime la coordenada Polar del vector anterior obtenido en el ejercicio 97, y su rumbo.
R: $(9,9; 45^\circ)$. Rumbo 45° al Norte de Este.

100) Cual es el valor de la diagonal mayor de un paralelepípedo que tiene 4 metros de largo, 3 metros de alto y 2 metros de profundidad. **R: 5,385 metros.**

101) Dado un triángulo con un ángulo interno de 60° y dos lados iguales de 40 metros que forman este ángulo, hallar los ángulos faltantes y el valor del otro lado. **R: 60° . 60° . Y 40 m.**

102) En un triángulo rectángulo dado, el ángulo opuesto a un lado de 50 metros es de 48° ; hallar el valor de su otro lado y su hipotenusa. **R: 45,02 m. 67,28 m.**

103) Un triángulo tiene dos ángulos internos de 60° y 100° , y un lado de 5 metros frente al primer ángulo; calcule sus otros dos lados. **R: 5,69 m. Y 1,97 m.**

104) Calcule el ángulo menor de un lanzamiento parabólico, cuyo proyectil cumple con la ecuación: $60 = 100.Tan^2\theta - (24,2).Sec^2\theta$. **R: 50°**

105) un perro sale de su casa y camina 120 metros al Este, luego desde allí corre 80 metros en dirección de 60° al Norte del Este; calcule por la Ley del Coseno la distancia recta que requiere para volver a su punto de partida. **R: 174,366 metros**

106) Del ejercicio anterior número 105, calcule por la Ley del Seno el rumbo requerido por el perro para volver a su casa. **R: debe ir en dirección de 23412° al Sur del Oeste.**

107) Encuentre la ecuación de una recta perpendicular a $L_2: 3x - 4; y$ que pasa por el punto del plano $(1; -1)$, y su corte o intersección con el eje horizontal. **R: $y = -1/3(x) - 2/3$. Corte $(-2; 0)$**

108) En qué punto del plano se interceptan las rectas que $L_1: 2y = -4x - 6$; con la recta que pasa por los puntos $P_1(0, 3)$ y $(-5; 0)$. **R: $(-2,308; 1,615)$.**

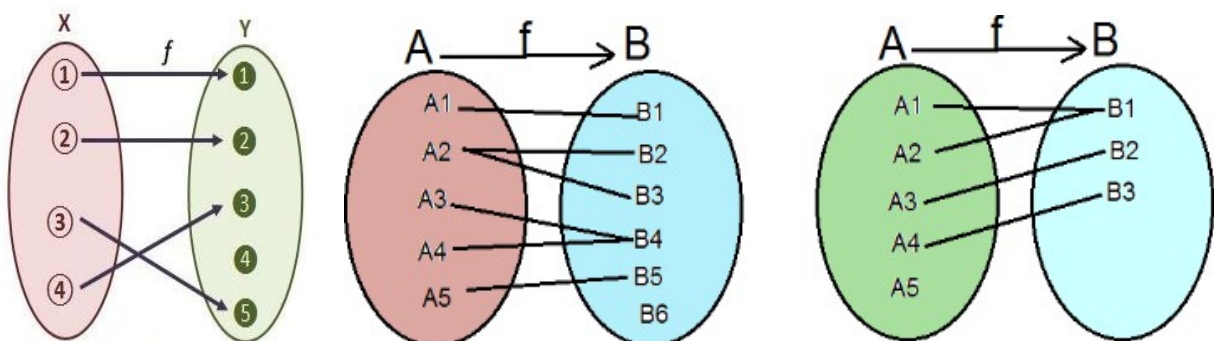
109) Calcule el área de un triángulo equilátero de lado 5 pulgadas, con un círculo como un agujero en su centro, de radio una pulgada. **R: 15,367 Pulg².**

110) Área de un triángulo rectángulo inscrito en un círculo trigonométrico en el origen, de dos metros de radio, cuando su ángulo barrido es de 40° ; es decir en el primer cuadrante. **R: 0,985 m².**

111) calcule el volumen de un cilindro de 20 centímetros de alto, 5 Cms, de diámetro y con un hueco circular de diámetro 2 Cms, y profundidad 12 centímetros. **R: 355 Cms³.**

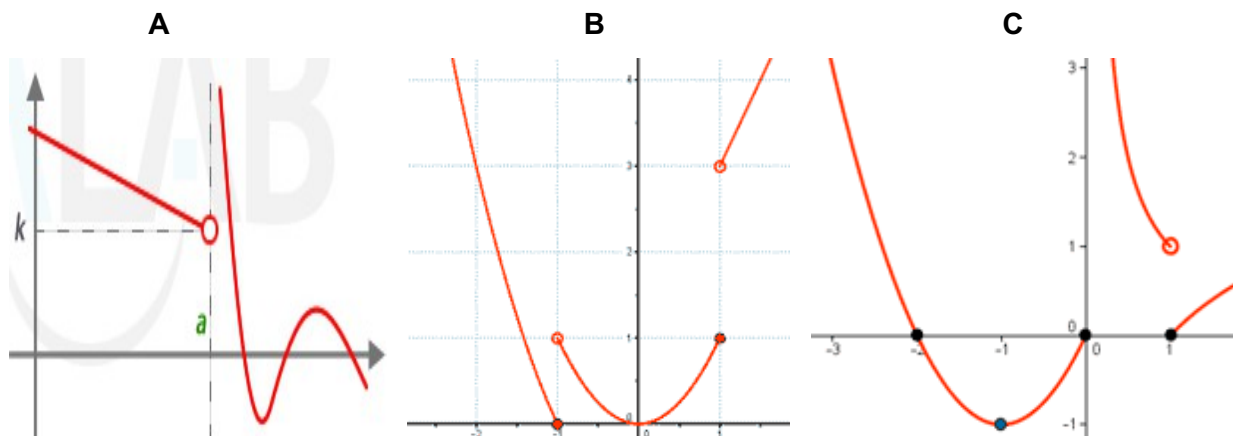
112) Una *Cuenta* es una esfera con una perforación circular completa, muy usada en la antigüedad para los *Ábacos*; calcule el volumen de una cuenta con 6 Cms de diámetro, y 1,5 centímetros de diámetro del hueco. **R: 102,5 Cms³.**

113) De los siguientes esquemas sagitales, diga cuales son funciones y su Inyectividad.



R: la primera es Inyectiva, sin ser Sobreyectivas; porque 4 no tiene contra imagen. La segunda no es Función, A2 tiene dos imágenes. La tercera No es Función A5 no tiene imagen

114) De las siguientes tres gráficas de funciones en el plano diga su dominio, y rango; asuma tendencia al infinito en las líneas de borde.



R: A, dominio todos los reales menos el valor “a” que es asíntota vertical; rango todos los reales. B, dominio todos los reales, rango $[0; +\infty)$. C, dominio todos los reales, rango $[-1; +\infty)$.

115) De la gráfica estime por observación el dominio, rango, y puntos notables de la función cúbica $y = x^3 - 3x + 1$. Adicionalmente por acercamiento infinitesimal con una tabla demuestre que su imagen en el origen es el número uno.

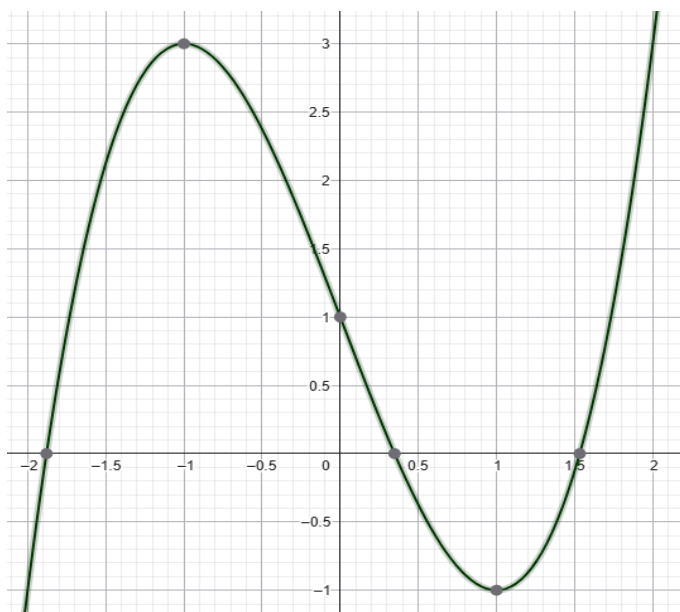


Tabla 6: Tendencia al cero por ambos lados

x	f(x)	x	f(x)
0,2	0,408	- 0,1	1,29
0,05	0,850	- 0,02	1,059
0,01	0,97	- 0,005	1,015
0,002	0,994	- 0,001	1,003

R: Dominio y rango todos los reales, un máximo en $(-1; 3)$; un mínimo en $(1; -1)$. La imagen en el origen es el uno.

116) Por observación en la siguiente función cociente $y = \frac{2x}{(x-1)}$ graficada, estime su dominio y rango, luego por apoyo tabular demuestre su asíntota horizontal al infinito positivo y su asíntota vertical por acercamiento a uno por la izquierda.



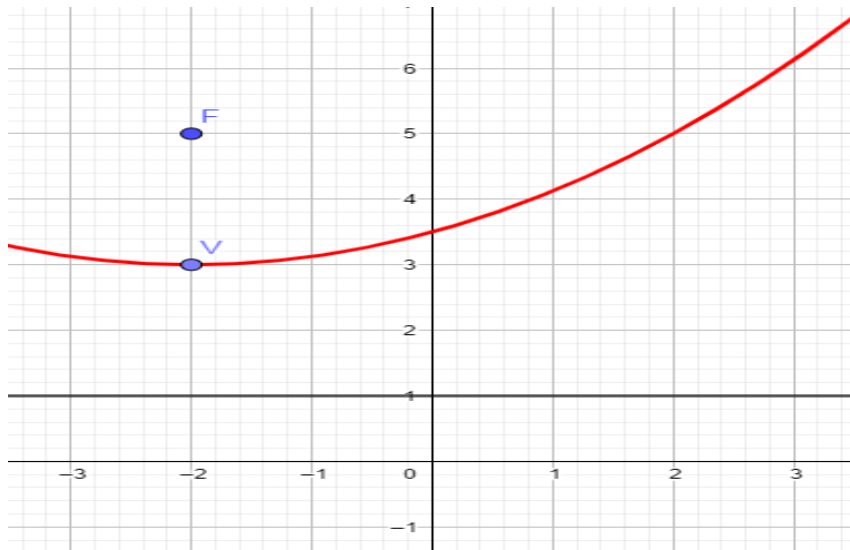
Tabla 7: Valores de tendencia al más infinito, y acercamiento infinitesimal al cero por la izquierda (0^-).

x	$\frac{2 \cdot x}{(x-1)}$	x	$\frac{2 \cdot x}{(x-1)}$	x	$\frac{2 \cdot x}{(x-1)}$	x	$\frac{2 \cdot x}{(x-1)}$
10	2,22	100	2,020	0,5	- 2	0,95	- 38
20	2,105	500	2,004	0,8	- 8	0,99	- 198
50	2,041	2.000	2,001	0,9	- 18	0,995	- 398

R: Dominio(f) $\mathbb{R} - \{1\}$. Rango(f) $\mathbb{R} - \{2\}$. La tendencia al más infinito dice que la función se acerca a la recta $y = 2$, y al 1^- , tiende a la recta $x = 1$.

117) Dada la ecuación: $3x^2 + 3y^2 + 2x - 3y - 8 = 0$. Determine que Cónica es y calcule los datos para su gráfica. **R: Circunferencia de centro $(-1/3; 1/2)$. Radio 1,74.**

118) De la siguiente Parábola. $x^2 + 4x - 8y + 28 = 0$, Calcule su ecuación canónica vértice, foco, y por observación de su gráfica estime su dominio y rango.

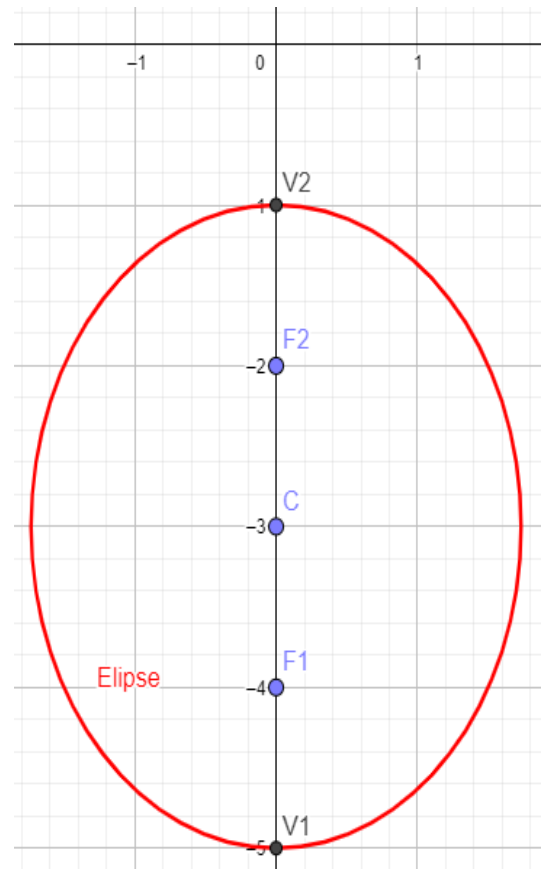


R: $(x + 2)^2 = 8.(y - 3)$.
Vértice (- 2; 3). **Foco** de la parábola vertical cóncava (- 2; 5). **P** = 2. **Directriz** la recta $y = 1$. **Parábola**. **Dominio** todos los reales. **Rango** $[3; + \infty)$.

119) De la siguiente Hipérbola horizontal $\frac{(X - 3)^2}{4} - \frac{(Y - 3)^2}{4} = 1$. Calcule sus vértices, centro, focos y asíntotas rectas. **R:** Centro (3; 3). **V₁** (1; 3). **V₂** (5; 3). **F₁** (0,17; 3). **F₂** (5,83; 3). **Asíntotas rectas** $y = x$. **Con** $y = 6 - x$.

120) Obtenga la ecuación canónica de la Elipse con ecuación: $4x^2 + 3y^2 + 18y + 15 = 0$. Calcule sus puntos notables, y con ellos diga su dominio y rango de esta relación del plano; en adicional con su gráfica confirme el resultado obtenido.

R: $\frac{(X)^2}{3} + \frac{(Y + 3)^2}{4} = 1$. **Elipse vertical de centro en el punto** (0; - 3). **Vértices** **V₁** (0; - 5). **V₂** (0; - 1). **Focos** **F₁** (0; - 4). **F₂** (0; - 1). **Anchos** **A₁** ($-\sqrt{3}$; - 3). **A₂** ($\sqrt{3}$; - 3). **Dominio** $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **Rango** $[- 5; - 1]$.



REFERENCIAS CONSULTADAS Y CITADAS

- Baldor, A. (2017). *Álgebra*. Patria. <https://www.amazon.es/Algebra-Baldor-J/dp/607744572X>
- Blázquez, S., Ortega, T. Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME*, 9(2), 211-226. <https://relime.org/index.php/relime/article/view/437>
- Benítez, R. (2006), *Cálculo diferencial*. Trillas.
- Santillana, S. (2010), *Matemática 2, edición del docente*. McGraw-Hill.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una Variable, transcendentales tempranas* (7^{ma} ed.). Cengage. https://eva.interior.udelar.edu.uy/pluginfile.php/96366/mod_resource/content/1/Stewart.
- Thomas G. / Finney R. (1998), *Cálculo en una variable*. Addison Wesley.
- Tirado, A. (2015). Física I, *mecánica clásica para estudiantes de ingeniería*. Editorial de la Universidad de Oriente.
- Tirado, A. (2020). *El aprendizaje universitario de la matemática básica, con los fundamentos de la praxis geométrica*. [Tesis doctoral, Universidad Pedagógica Experimental Libertador] .
- Tirado, A. Briones, J. Arroyo, J. (2021). *Manual Ser Bachiller, Razonamientos verbal, numérico y abstracto*. Compás. <http://142.93.18.15:8080/jspui/handle/123456789/667>
- Tirado, A., Núñez, G. (2023). Estudio en la Matemática I para describir debilidades en sus aprendizajes como un diagnóstico preliminar. *Revista Odigos*, 4(3), 49-67. <https://doi.org/10.35290/ro.v4n3.2023.926>
- Tirado, P., Figuera, J. (2017). *Cálculo diferencial, estudio geométrico analítico*. Bubok. <https://www.bubok.es/libros/251756/calculo-diferencial-estudio-geometrico-analitico>
- Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable, transcendentales tempranas*. Cuarta edición. Mc Graw Hill. México. Pp XVII. <https://es.slideshare.net/slideshow/calculo-trascendentales-tempranas-zill-4th-1pdf/251636424>

ISBN: 978-9942-53-202-2



Compás
capacitación e investigación