Compás
capacitación e investigación

2025

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2
MODELOS DE REDES Y MÉTODOS HEURÍSTICOS:
UN ENFOQUE PRÁCTICO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE SISTEMASCOMPLEJOS

Adriano Ramírez Galeano
Laura Luzmila Vega González

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2
MODELOS DE REDES Y MÉTODOS HEURÍSTICOS:
UN ENFOQUE PRÁCTICO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE SISTEMASCOMPLEJOS

Adriano Ramírez Galeano
Laura Luzmila Vega González

ISBN: 978-9942-53-119-3 DOI: http://doi.org/10.48190/9789942531193

© **Adriano Ramírez Galeano**
Docente de la Universidad Técnica de Machala
Correo: adramirez@utmachala.edu.ec
ORCID: 0009-0000-0328-836X

Laura Luzmila Vega González
Docente de la Universidad Técnica de Machala
Correo: lvega@utmachala.edu.ec
ORCID: 0000-0003-0015-3026

Primera edición, 2025-11-05

ISBN: 978-9942-53-119-3
DOI: http://doi.org/10.48190/9789942531193
Distribución online
Acceso abierto

Cita
Ramírez, A., Vega, L. (2025) INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2. MODELOS DE REDES Y MÉTODOS HEURÍSTICOS: UN ENFOQUE PRÁCTICO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE SISTEMASCOMPLEJOS. Editorial Grupo Compás

Este libro es parte de la colección de la Univesidad Técnica de Machala y ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad de la publicación. El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

Agradecimientos

Adriano Ramirez:

Agradezco a mi bondadoso maestro Ing. Eléctrico Sant Rajinder Singh Ji Maharaj, por su inspiración y apoyo.

Agradezco a mi padre(+), a mi madre, a mis hermanas, a mi esposa y mis hijos

Laura Vega:

Infinito agradecimiento a Dios por su constante presencia en mi vida

Contenido

PREFACIO ***7***

Estructura del libro ***10***

PARTE 1. MODELO DE REDES -MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES ***13***

CAPITULO 1. MODELO DE REDES **14**
1.1.-OBJETIVOS 14
1.2.-INTRODUCCION 14
1.3.-DESARROLLO 20
1.4.-EJERCICIO PROTOTÍPICO DISTRIBUIDORA 22
1.5.-CONCLUSIONES 32
1.6.-CUESTIONARIO 32
1.6.1.-VERDADERO-FALSO 32
1.6.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 33
1.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 33
1.7.-GLOSARIO 34

PARTE 1. MODELO DE REDES -MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES ***37***

CAPITULO 2. FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO DE TRANSPORTE **38**
2.1.-OBJETIVOS 38
2.2.-INTRODUCCION 38
2.3.-DESARROLLO 43
2.4.-CONCLUCIONES 50
2.5.-GLOSARIO 51

PARTE 1. MODELO DE REDES -MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES ***53***
3.1.-OBJETIVOS 54
3.2.-INTRODUCCION 54
3.3.-DESARROLLO 54
3.4.-ALGORITMO ESQUINA NOROESTE 55
3.6.-CONCLUCIONES 66
3.7.-CUESTIONARIO 66
3.7.1.-VERDADERO-FALSO 66
3.7.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 66
3.7.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 67
3.8.-GLOSARIO 68

PARTE 1. MODELO DE REDES -MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES ***69***

CAPITULO 4. MÉTODO MULTIPLICADORES **70**

4.1.-OBJETIVOS 70
4.2.-INTRODUCCION 70
4.3.-ALGORITMO MÉTODO MULTIPLICADORES 71
4.4.-EJERCICIO PROTOTÍPICO FLORES TROPICALES. 72
4.5.-CONCLUSIONES 87
4.6.-CUESTIONARIO 87
4.6.1.-VERDADERO-FALSO 87
4.6.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 88
4.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 89
APENDICE OPERATIONAL RESEARCH 90
4.7.-GLOSARIO 98

PARTE 1. MODELO DE REDES -MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES 102

CAPITULO 5. ASIGNACIÓN ALGORITO HUNGARO 103
5.1.-OBJETIVOS 103
5.2.-INTRODUCCION 103
5.3.-DESARROLLO 104
5.3.1.-EJERCICIO PROTOTÍPICO FLORES TROPICALES CON SOLVER ASIGNACION PERSONAL CONTROL DE CALIDAD DE FLORES TROPICALES. 105
5.3.2.-SOLUCION DE ASIGNACION CON ALGORITMO METODO HUNGARO 111
5.4.-CONCLUSIONES 123
5.5.-CUESTIONARIO 123
5.5.1.-VERDADERO-FALSO 123
5.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 124
5.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 125
5.6.-GLOSARIO 129
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS PARTE 1 133

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA 136

CAPITULO 6. HEURÍSTICAS, METAHEURÍSTICAS Y REDES NEURONALES EN LA OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA, PROGRAMACIÓN LINEAL E INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 137
6.1. OBJETIVOS 137
6.2. INTRODUCCIÓN 137
6.3.-DESARROLLO. 140
6.3.1.-Heurísticas: Soluciones Rápidas y Prácticas 140
6.3.1.1.-Definición y Características 140
6.3.1.2.-Clasificación de Heurísticas 140
6.3.1.3.-Ventajas y Limitaciones 141
6.3.2.-Metaheurísticas: Exploración Global del Espacio de Soluciones 141
6.3.2.1.-Definición y Principios 141
6.3.2.2.-Clasificación de Metaheurísticas 142
6.3.2.3.- Aplicaciones en la Investigación de Operaciones 142

6.3.2.4.- Rol en la Optimización 143
6.3.2.5.- Ejemplos Prácticos 143
6.3.2.6.- Interacción con la Programación Lineal 143
6.4.- EJERCICIOS PROTOTIPICOS 144
6.5.-CONCLUSIONES 152
6.6.- CUESTIONARIO 153
6.6.1.-PREGUNTAS DE VERDADERO O FALSO 153
6.6.2.- OPCIÓN MÚLTIPLE 154
6.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 155
6.7.-GLOSARIO 157

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA 161

CAPITULO 7. PROBLEMA DELAURY CON ALGORITO DE LA RUTA MAS CORTA 162
7.1.-OBJETIVOS 162
7.2.-INTRODUCCION 162
7.3.-DESARROLLO 162
7.3.1.-SOLUCION DE RUTA MAS CORTA CON SOLVER 162
7.3.2.-Ejercicio prototípico DELAURY S.A.con SOLVER 163
7.3.3.-SOLUCION DE RUTA MAS CORTA CON ALGORITMO 172
7.5.-CUESTIONARIO 186
7.5.1.-VERDADERO-FALSO 186
7.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 186
7.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 187
7.5.-GLOSARIO 187

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA 189

CAPITULO 8. ALGORITMO ARBOL DE EXPANSION MINIMA 190
8.1.-OBJETIVOS 190
8.2.-INTRODUCCION 190
8.3.-DESARROLLO 191
8.3.1. ARBOL DE EXPANSION MINIMA CON SOLVER. 191
8.3.2.-ALGORITMO ARBOL DE EXPANSION MINIMA 198
8.4.-CONCLUSIONES 210
8.5.-CUESTIONARIO 210
8.5.1.-VERDADERO-FALSO 210
8.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 211
8.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 212
8.6.-GLOS 212
ARIO 212

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA 215

CAPITULO 9. MODELO DE FLUJO MAXIMO 216
9.1.-OBJETIVOS 216
9.2.-INTRODUCCION 216
9.3.-DESARROLLO 217

9.3.1.-SOLUCION DE FLUJO MAXIMO CON SOLVER PROBLEMA MANTENIMIENTO VIAL. 217
9.3.2.-SOLUCION DE Problema MANTENIMIENTO VIAL CON ALGORITMO METODO de FLUJO MAXIMO 222
9.4.-CONCLUCIONES 225
9.5.-CUESTIONARIO 225
9.5.1.-VERDADERO-FALSO 225
9.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 226
9.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 226
9.6.-GLOSARIO 227
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS PARTE 2. 229

PARTE 3. ALGORITMO ADMINISTRACION DE PROYECTOS _232

CAPITULO 10: MÉTODO CPM -RUTA CRITICA 233
10.1.-OBJETIVOS 233
10.2.-INTRODUCCION 233
10.3.-DESARROLLO 234
10.3.1.-SOLUCION CON SOLVER 234
10.3.2.-SOLUCION CRITICA CON ALGORITMO 242
10.4.-CONCLUSIONES 264
10.5.-CUESTIONARIO 264
10.5.1.-VERDADERO-FALSO 264
10.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE 265
10.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS 267
10.6.-GLOSARIO 269

PARTE 3. ALGORITMO ADMINISTRACION DE PROYECTOS _273

CAPITULO 11: MÉTODO PERT (PROYECT EVALUETION AND REVIEW TECHNIQUE) 273
11.1.-OBJETIVOS 274
11.2.-INTRODUCCION 274
11.3.-EJEMPLO PROTOTÍPICO ACABADOS SARANGO 275
11.4.-CONCLUSIONES 281
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS PARTE 3. 282

PREFACIO

Este libro tiene como objetivo principal proporcionar una guía clara y estructurada para los estudiantes que se enfrentan por primera vez al curso de investigación de operaciones. Busca unificar los procedimientos de enseñanza, organizando de manera lógica los temas a tratar, para evitar que los estudiantes perciban la asignatura como un conjunto desconectado de conceptos. A través de este enfoque, se aborda la diversidad de modelos y métodos de optimización, desde los clásicos hasta los heurísticos, así como la aplicación práctica en problemas administrativos y económicos, como mezclas de producción, asignaciones y rutas óptimas. De esta manera, se pretende facilitar el aprendizaje y evitar la sobrecarga cognitiva, promoviendo una mejor comprensión y organización mental de los contenidos.

La programación lineal, como herramienta matemática fundamental, se centra en la optimización de recursos y toma de decisiones eficientes. Este enfoque, introducido magistralmente por el Ing. Dantzig mediante el método simplex, permite resolver problemas complejos de manera sistemática. En este libro, la estructura de los capítulos se orienta a consolidar las bases analíticas del estudiante, asegurando una comprensión sólida del modelo matemático básico que sustenta esta disciplina.

El enfoque principal de los temas tratados será la formulación de sistemas matemáticos de programación lineal. Posteriormente, se procederá a resolver dichos enfoques utilizando el método simplex a través del programa SOLVER de Excel, considerado una herramienta accesible y eficaz de la cual se anexa el manual de instalación. Este procedimiento permitirá observar cómo, a pesar de la diversidad de los temas, todos convergen gracias a la solución propuesta por el ingeniero Dantzig. Además, el uso de herramientas tecnológicas actuales como computadoras y dispositivos móviles facilitará el análisis matemático y la interpretación de los resultados obtenidos. El objetivo principal será verificar estos resultados, comparándolos con los generados por el programa, para garantizar su validez y precisión.

los Modelos de Optimización Combinatoria son herramientas esenciales en la resolución de problemas complejos donde se busca la mejor solución entre un conjunto finito de posibilidades. Aunque al principio puedan parecer confusos, especialmente para estudiantes que están iniciando en este campo, su conexión con la Programación Lineal y el método Simplex permite comprender su utilidad y aplicabilidad en diversas áreas. A medida que se avanza en el curso, se podrá apreciar cómo estas técnicas forman parte de un marco más amplio para abordar problemas matemáticos y de optimización.

Los enfoques heurísticos y metaheurísticos son herramientas poderosas dentro de la programación lineal, especialmente en problemas donde las soluciones exactas son difíciles o imposibles de obtener en un tiempo razonable. Estas técnicas aprovechan aproximaciones y reglas basadas en la intuición para encontrar soluciones cercanas al óptimo, lo que las convierte en una opción valiosa en la resolución de problemas complejos.

En el contexto educativo, su importancia radica en que permiten a los estudiantes comprender cómo las matemáticas pueden trascender los límites teóricos y aplicarse en escenarios prácticos. Este enfoque fomenta el desarrollo de habilidades analíticas y creativas, necesarias para abordar problemas en áreas como la inteligencia artificial.

Un ejemplo claro de su impacto es el uso de redes neuronales, que han revolucionado la inteligencia artificial al emular procesos cognitivos humanos. Estos modelos, que combinan fundamentos matemáticos con heurísticas, han logrado avances significativos en tareas como el reconocimiento de patrones, procesamiento del lenguaje natural y toma de decisiones automatizadas.

En definitiva, los procedimientos de enfoques aproximados no solo representan una herramienta técnica, sino también un puente entre el rigor matemático y la capacidad intuitiva, abriendo nuevas posibilidades tanto en la investigación como en la práctica profesional.

Estos procedimientos de aproximación serán fundamentales para abordar problemas clásicos de optimización como la determinación de la ruta más corta, la construcción del árbol de expansión mínima, el cálculo de flujo máximo y la planificación de proyectos mediante los procedimientos PERT-CPM o de ruta crítica. Cada uno de estos enfoques ofrece herramientas poderosas para resolver problemas complejos en diversas áreas, desde la logística y la ingeniería hasta la gestión de proyectos.

Por ejemplo, en el caso de la ruta más corta, algoritmos como el de las Etiquetas se basan en enfoques aproximados para encontrar soluciones eficientes en redes de transporte o sistemas de comunicación. Por otro lado, los algoritmos para construir árboles de expansión mínima, como los voraces (greedy), son esenciales en el diseño de redes óptimas, minimizando costos o

recursos. El análisis de flujo máximo permite optimizar redes donde se requiere maximizar la capacidad de transporte o distribución, como en sistemas de tuberías, tráfico o telecomunicaciones.

El uso combinado de estas técnicas ofrece soluciones robustas y eficientes para problemas complejos, adaptándose a las necesidades específicas de cada contexto.

La aplicación OPERATIONAL RESEARCH de Ketan Cheuhan es una excelente herramienta educativa diseñada para facilitar el aprendizaje y la aplicación de enfoques fundamentales en investigación de operaciones. Esta aplicación, compatible con dispositivos móviles, permite resolver problemas utilizando enfoques como el método simplex, el procedimiento de la esquina noroeste, el de los multiplicadores y el de asignación. Su enfoque paso a paso no solo simplifica el proceso, sino que también ayuda a los usuarios a entender cada etapa de manera clara y práctica. Gracias a su diseño intuitivo y portátil, elimina la dependencia de laboratorios de informática o software especializado, lo que la convierte en una solución accesible para estudiantes y profesores. La posibilidad de practicar en cualquier lugar y momento fomenta un aprendizaje más dinámico, mejorando la comprensión y retención de conceptos clave. En resumen, OPERATIONAL RESEARCH es una herramienta moderna y eficiente que apoya tanto a quienes se inician en la investigación de operaciones como a quienes buscan reforzar sus conocimientos.

Estructura del libro

El **Capítulo 1** Introduce la terminología básica y la simbología grafica de los modelos de redes fundamentales para resolver problemas de optimización en áreas como logística, planificación y gestión de recursos. Estos modelos utilizan nodos y arcos para representar situaciones reales, facilitando el análisis y la toma de decisiones. Basados en principios de programación lineal, estos modelos se formulan matemáticamente y se resuelven mediante procedimientos como el simplex, del cual haremos un ejemplo prototípico de un distribuidor de Molinos de Bolas quien quiere distribuir al menor costo a un grupo de concesionarias, aquí utilizaremos el termino de oferta-demanda, hallando el modelo matemático y resolviéndolo con SOLVER de Excel, permitiendo intuir que del modelo gráfico y de las tablas pueden ser hallados otros métodos de enfoque aproximado. En el **Capítulo 2** se analiza el modelo de transporte, una clase especial de problemas de programación lineal que se utilizan para minimizar los costos de transporte al satisfacer las restricciones de oferta y demanda entre varios orígenes y destinos representados por nodos y arcos. Resolveremos con SOLVER un problema prototípico en el que los demandantes podrán escoger entre un grupo de proveedores quienes previamente han desarrollado sus soluciones de oferta a través de los enfoques de redes visto en el capítulo 1. También el grafico y las tablas del modelo de transporte nos permitirá intuir una solución heurística. En los **Capítulos 3 y 4** se abordarán los primeros algoritmos de estrategia de búsqueda para resolver el problema de transporte, específicamente mediante el procedimiento de la esquina noroeste y el desarrollo de los multiplicadores. Estos enfoques permitirán profundizar en el análisis del problema, cuya solución ya se exploró previamente en los capítulos 1 y 2 utilizando el modelo matemático de programación lineal y su resolución con la herramienta SOLVER. El enfoque incluirá una explicación detallada y paso a paso del método Esquina Noroeste y Multiplicadores, permitiendo comprender su funcionamiento y aplicación práctica. Además, se realizará una comparación de los resultados obtenidos para analizar su efectividad. Como complemento, se utilizará la aplicación OPERATIONAL RESEARCH para verificar las soluciones obtenidas, lo que facilitará el aprendizaje y comprensión didáctica de los procesos involucrados. Esté enfoque integral no solo permitirá reforzar los conocimientos adquiridos previamente, sino también explorar técnicas adicionales que amplían las herramientas disponibles para resolver problemas de transporte en programación lineal. En el **Capítulo 5** se presentará el algoritmo húngaro, solución heurística que seguirá siendo respaldada por el

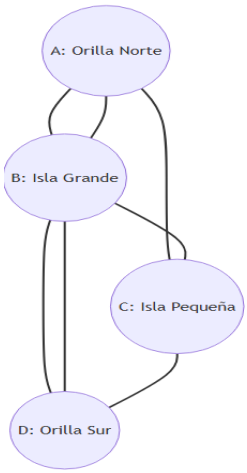
método simplex de programación lineal. Para ilustrar este nuevo procedimiento, se trabajará con un problema prototípico. Inicialmente, se resolverá el problema utilizando alternativas matemáticas y se obtendrá la solución mediante la herramienta SOLVER. Posteriormente, se aplicará el Método Húngaro, explicando cada paso de manera detallada para asegurar una comprensión clara del procedimiento. Finalmente, se utilizará la aplicación OPERATIONAL RESEARCH para visualizar de manera didáctica el proceso completo, analizando las tablas paso a paso. Esto permitirá reforzar los conceptos aprendidos acerca de la optimización. En el **Capítulo 6** se analiza el cambio de enfoque del método SIMPLEX hacia el uso de algoritmos heurísticos, que responde a la necesidad de adaptarse a un mundo en constante evolución, donde la optimización y la eficiencia son clave. Aunque el método SIMPLEX ha sido una herramienta poderosa para resolver problemas de programación lineal, los algoritmos heurísticos y metaheurísticos ofrecen una flexibilidad y adaptabilidad que los hacen ideales para enfrentar desafíos más complejos y dinámicos. Nuestra naturaleza biológica y física nos impulsa a buscar soluciones prácticas y eficientes, incluso si estas no son perfectas. En el ámbito industrial, esto se traduce en encontrar respuestas que, aunque no alcancen un nivel absoluto de efectividad, sean lo suficientemente buenas para reducir costos y aumentar la competitividad. Aquí es donde los algoritmos heurísticos entran en juego, proporcionando soluciones aproximadas en un tiempo razonable, especialmente en problemas donde métodos tradicionales como SIMPLEX pueden ser poco prácticos o demasiado costosos en términos de recursos computacionales. Además, la creciente influencia de la inteligencia artificial en nuestras actividades diarias refuerza la relevancia de estos enfoques. Las redes neuronales artificiales, basadas en principios heurísticos y metaheurísticos, están transformando sectores enteros al ofrecer soluciones innovadoras y eficientes. Esto no solo tiene implicaciones prácticas, sino también filosóficas, ya que nos invita a reflexionar sobre nuestro papel en un futuro donde la tecnología y la naturaleza humana convergen para resolver problemas complejos. En los **Capítulos 7, 8 y 9** se explorarán procesos heurísticos clave: la ruta más corta, el árbol de expansión mínima y el flujo máximo. El enfoque comenzará con la formulación del modelo matemático utilizando Programación Lineal, resolviéndolo mediante la tabla Simplex con el apoyo del SOLVER de Excel. Este paso inicial asegura que seguimos basándonos en un procedimiento riguroso y validado. Posteriormente, se aplicará un procedimiento de aproximación específico para cada caso, detallando cada paso del proceso. Esto permitirá comparar los resultados obtenidos con los proporcionados por SOLVER, reforzando la conexión entre el modelo matemático y las soluciones heurísticas. Este enfoque no solo consolida el uso de la Programación Lineal como base, sino que también

amplía las perspectivas al incorporar soluciones innovadoras y prácticas a través de algoritmos heurísticos. En resumen, este proceso busca equilibrar el rigor matemático con la flexibilidad y creatividad de los métodos heurísticos, ofreciendo una visión integral y práctica para abordar problemas complejos. En los **Capítulos 8 y 9** se abordarán los algoritmos CPM y PERT, los cuales tienen una gran relevancia en las áreas de administración y control. Aunque estos métodos podrían estudiarse de manera más extensa, incluso dedicándoles un libro completo, en este caso se presentarán de manera resumida, enfocándose en sus fundamentos básicos. El análisis incluirá la resolución de estos métodos como programas lineales mediante el uso de SOLVER, seguido de una explicación detallada y paso a paso de los enfoques aproximados que los sustentan. Este enfoque permitirá comprender tanto la aplicación práctica como la lógica detrás de estas herramientas fundamentales en la gestión de proyectos.

PARTE 1. MODELO DE REDES - MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES

Vista real de los Puentes de Königsberg

Descripción en forma de grafos de los Puentes de Königsberg



CAPITULO 1. MODELO DE REDES

FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO DE TRANSBORDO CAPACITADO

1.1.-OBJETIVOS

- Introducir los temas de redes y transporte.
- Entender la relación entre las redes y los problemas de programación lineal.
- Demostrar que un problema de redes se puede expresar como un modelo matemático de programación lineal..
- Hallar la solución a través de un paquete como SOLVER.

1.2.-INTRODUCCION

MODELO DE REDES

Los modelos de redes los utilizaremos en muchos de los problemas de optimización que encontraremos. Estos problemas serán por lo general problemas reales, como los de transporte o flujo de activos y recursos. En su mayoría los problemas de redes serán más que una simple representación simbólica de procesos o actividades, como el del camino crítico en los procesos entre las redes de una gestión administrativa. Los mismo serán representados de manera sencilla utilizando arcos de redes, y nodos.

DEFINICIÓN DEL MODELO DE RED

En general, cualquier sistema que represente gráficamente un proceso que requiera una serie de actividades entrelazadas para llevar energía-materia o información a través de referencias geográficas bien definidas, tal como podrían ser un mapa de carreteras, un tendido eléctrico o una red de internet, lo podríamos simbolizar o describir por medio de una red. Que al ser una representación de un entorno real le llamaremos modelo de red, así como los siguientes:

Nodo:

Es un punto específico dentro de una red de transporte y distribución donde se concentran actividades logísticas esenciales, como almacenamiento, clasificación, consolidación y distribución de mercancías.

Arco:

Es una línea que conecta dos nodos, y en logística y transporte representa los caminos entre localidades

Modelo de Transporte y costo mínimo de flujos- Modelo de Camino más corto- Modelo de Problemas de asignación- Modelo de Flujo máximo- Modelo de Camino crítico.

El modelo de transbordo con capacidades (llamado a veces el modelo de red) es importante debido a que varios problemas de decisión administrativa. Concretamente, el problema de transporte, el de asignación y el de la ruta más corta son casos particulares del modelo de transbordo con capacidades, y el problema de flujo máximo está estrechamente emparentado. (Eppen,Gould y Schmidt, 1993).

Los problemas serán establecidos fácilmente mediante el uso de arcos de redes y de los nodos, y contarán con terminología exclusiva, necesaria para su descripción e interpretación.

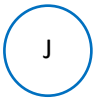
De acuerdo con (Taha, 2017,pp.209-211) Presentaremos a continuación la notación y terminología que utilizaremos.

NODO

Denominado también vértice, o punto. Representado generalmente por un círculo. En las redes de transporte, serán las localidades o ciudades en un mapa (gráfico 1.1).

Gráfico 1.1.

Representación gráfica de un nodo.



Nota: *gráfico elaboración propia*

ARCO

Denominado también borde o flecha. Este podría ser directo o indirecto. La cabeza es el destino, y la cola el origen. La cabeza y la cola son nodos que pueden estar tanto al origen como al final. En las redes de transporte, los **arcos** podrían ser los caminos, los canales de navegación en un río, o los patrones

La simbología utilizada en redes tiene sus raíces en diversas disciplinas, como las matemáticas, la ingeniería y la informática. A lo largo de la historia, esta simbología ha evolucionado para representar de manera gráfica y simplificada los componentes y relaciones dentro de una red. A continuación, se presentan algunos antecedentes históricos clave relacionados con la simbología en redes:

1. Orígenes en la teoría de grafos (siglo XVIII)

La base de la simbología en redes proviene de la teoría de grafos, una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre puntos (nodos o vértices) y las conexiones entre ellos (arcos o aristas).

Leonhard Euler (1736): Es considerado el fundador de la teoría de grafos. Su trabajo sobre el problema de los "Puentes de Königsberg" introdujo el concepto de grafo para modelar problemas de conectividad. En este contexto, los nodos representaban lugares y los arcos, los puentes que los conectaban.

Este enfoque inicial sentó las bases para representar redes mediante puntos y líneas, lo que sigue siendo el núcleo de la simbología en redes.

2. Representaciones en ingeniería eléctrica (siglo XIX)

Con el desarrollo de la ingeniería eléctrica en el siglo XIX, se comenzaron a utilizar diagramas para representar circuitos eléctricos, que compartían similitudes con las redes modernas.

Los nodos representaban puntos de conexión (como terminales o componentes eléctricos), mientras que las líneas representaban los conductores.

Esta simbología influyó en la representación de redes de flujo, como redes de transporte o de comunicación.

de vuelo de un avión. Los arcos proporcionan la conectividad entre los nodos. Una calle de una sola dirección podría ser representada por un arco, mientras que una calle de dos direcciones podría representada por un arco sin dirección o por dos arcos que apuntan a direcciones opuestas.

Gráfico 1.2.

Representación gráfica de un arco.

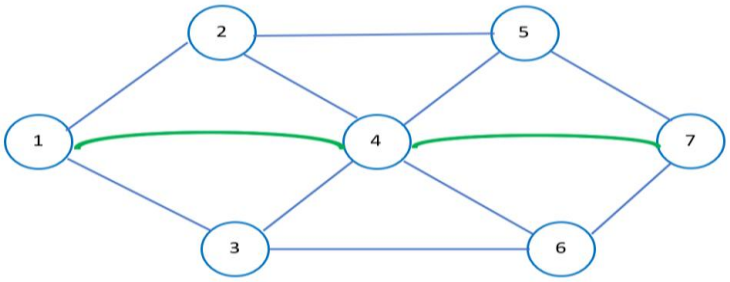
Nota: *gráfico elaboración propia*

CADENA:

Una cadena es una secuencia de elementos que conecta un nodo con otro, como se describe en el gráfico 1.3.

Gráfico 1.3.

Representación gráfica de una cadena.



Nota: *gráfico elaboración propia*

RUTA: mientras que una ruta se refiere específicamente a los nodos que forman parte de esa cadena, como se describe en el grafico 4.4.

3. Desarrollo de redes de transporte y flujo (siglo XIX y XX)

La necesidad de modelar redes de transporte, como ferrocarriles, carreteras y sistemas de distribución de agua, llevó a la adopción de simbología para representar nodos (estaciones, ciudades) y arcos (rutas, tuberías).

Los mapas de redes ferroviarias y de carreteras comenzaron a emplear símbolos estándar para puntos de conexión y trayectorias.

4. Redes de comunicación y computación (siglo XX)

Con el auge de las telecomunicaciones y la informática, la simbología en redes evolucionó para representar sistemas más complejos.

Telégrafo y telefonía: Los diagramas de redes telegráficas y telefónicas utilizaban símbolos para representar centrales, nodos de conexión y líneas de transmisión.

Redes informáticas (ARPANET y más): En los años 60 y 70, los diagramas de redes computacionales comenzaron a representar nodos como computadoras o servidores y arcos como cables o enlaces de comunicación.

5. Normalización de la simbología (finales del siglo XX)

Con el crecimiento de las redes informáticas y de telecomunicaciones, surgió la necesidad de normalizar la simbología para facilitar la comprensión y el diseño de redes.

Organizaciones como IEEE y ANSI: Estas instituciones promovieron estándares para la representación gráfica de componentes de redes.

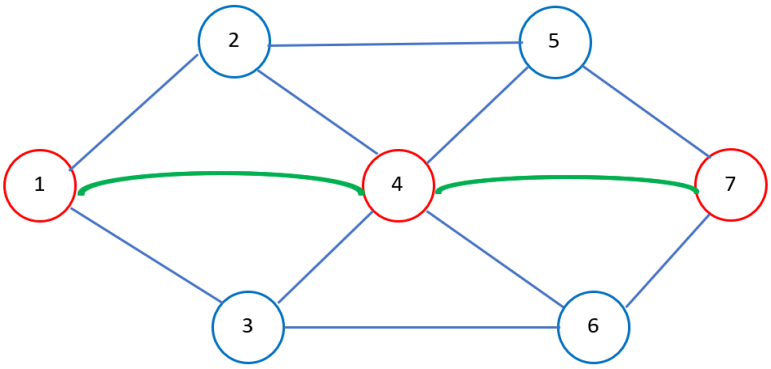
Diagramas de red modernos: Se adoptaron símbolos específicos para routers, switches, servidores y otros componentes, muchos de los cuales son utilizados en herramientas como Visio o diagramas UML.

6. Simbología en redes actuales

Hoy en día, la simbología en redes combina elementos de la teoría de grafos con estándares específicos para áreas como:

Gráfico 4.4.

Representación gráfica de una ruta.

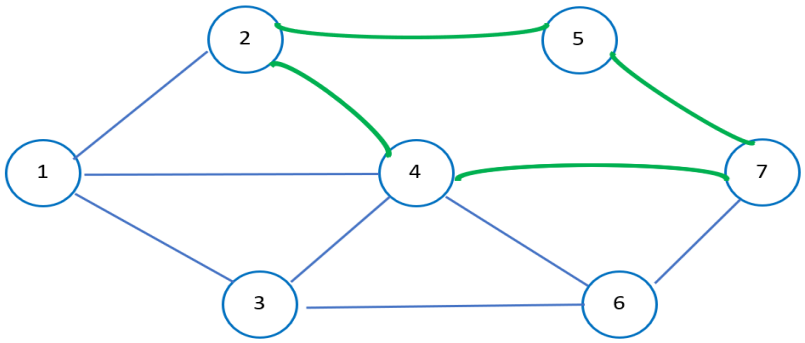


Nota: *gráfico elaboración propia*

CICLO: Un ciclo, por su parte, es una cadena cerrada que regresa al nodo inicial. Como se representa en el gráfico 5.5.

Gráfico 5.5.

Representación gráfica de un ciclo.



Nota: *gráfico elaboración propia*

RAMAL ORIENTADO: Los ramales orientados tienen una dirección específica, conectando un nodo fuente (de donde salen los ramales) con un nodo destino (donde llegan los ramales). Como se describe en el gráfico 6.6.

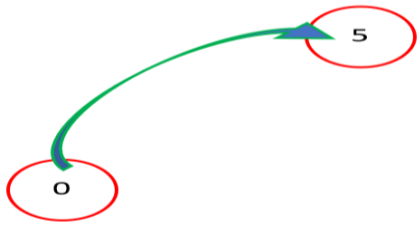
Redes de computadoras (símbolos para routers, switches, firewalls, etc.).Redes de transporte (símbolos para estaciones, rutas y nodos de trasbordo).Redes sociales (representación de usuarios como nodos y relaciones como arcos).

Conclusión

La simbología utilizada en redes tiene sus raíces en la teoría de grafos y ha evolucionado a lo largo de los siglos para adaptarse a las necesidades de disciplinas como la ingeniería, la informática y las telecomunicaciones. Su desarrollo ha estado impulsado por la necesidad de representar de manera clara y eficiente los componentes y relaciones dentro de sistemas complejos.

Gráfico 6.6.

Representación gráfica de un ramal orientado.

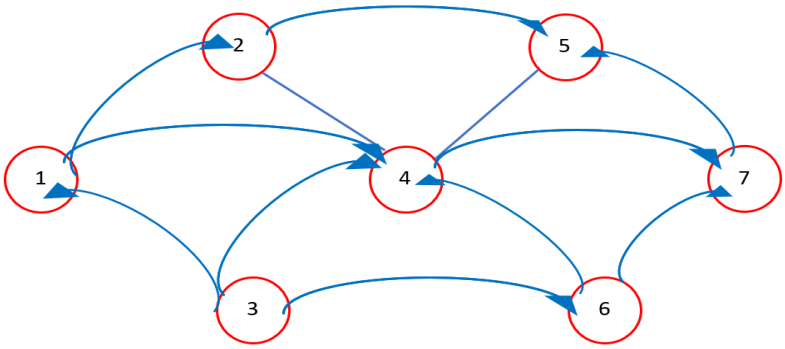


Nota: *gráfico elaboración propia*

GRÁFICA ORIENTADA: En una gráfica orientada, todos los ramales tienen una orientación definida. Como se representa en el gráfico 1.7.

Gráfico 1.7.

Representación gráfica de un arco.



Nota: *gráfico elaboración propia*

Árbol:

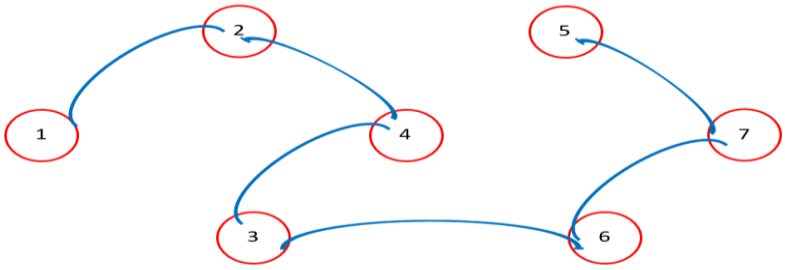
se puede definir como una estructura jerárquica y en forma no lineal, aplicada sobre una colección de elementos u objetos llamados nodos.

ÁRBOL: Por otro lado, un **árbol** es una gráfica sin ciclos.

ÁRBOL DE EXPANSIÓN: Y cuando este conecta todos los nodos de la red sin formar ciclos, se denomina árbol de expansión. Representación indicada en el grafico 8.8.

Gráfico 8.8.

Representación gráfica de un árbol de expansión.



Nota: *gráfico elaboración propia*

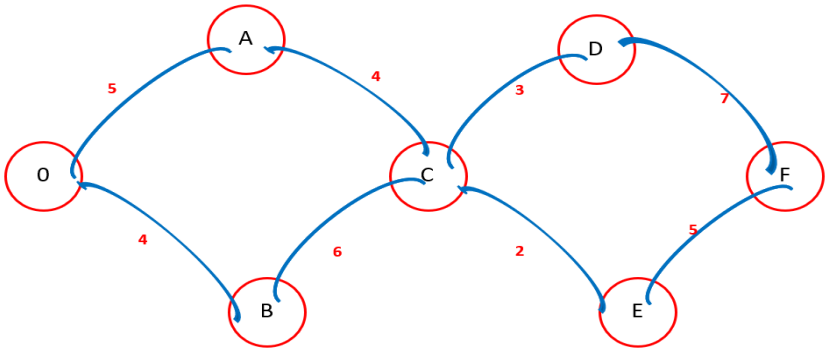
NODO FUENTE: Un nodo fuente es un punto en un sistema donde todas las conexiones o ramales parten desde él hacia otros nodos.

NODO DESTINO: Es donde todas las conexiones convergen hacia él. Esto es comúnmente utilizado en redes de flujo, sistemas eléctricos o diagramas de procesos para representar la dirección del flujo entre diferentes puntos.

MODELO EJEMPLO DE RED

Gráfico 1.9.

Representación gráfica de un modelo de red



Nota: *gráfico elaboración propia*

Los **nodos 0 y F** representan el origen y destino de la red, mientras que los **nodos A, B, C, D y E**, son nodos de trasbordo, el número en los arcos o líneas puede indicar distancia en kilómetros, por ejemplo, entre nodos adyacentes

1.3.-DESARROLLO

En este tema observaremos, como los problemas de redes o también llamados de trasbordo capacitado o limitado, son situaciones de programación lineal, y su modelo matemático corresponde a uno de PL.

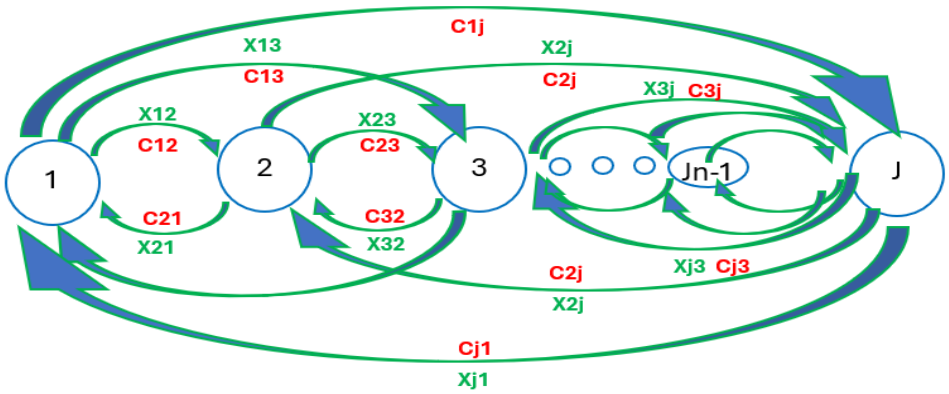
El objetivo en un ejercicio de trasbordo capacitado es llevar un producto, de un nodo fuente a un nodo destino, a través de todos los nodos que conforman la red de distribución, con el menor costo.

Este modelo también llamado modelo de red, es el más general de todos los modelos desarrollados para este tipo de situaciones.

El diagrama general de redes es:

Diagrama 1.10.

Diagrama general de redes



Nota: *gráfico elaboración propia*

Modelo Matemático de PL

De flujo de carga

Obtenido para resolverlo con **SOLVER**

FUNCION OBJETIVO

Según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., (2000)

$$\mathbf{Z(Min)=}\sum_{ij} C_{ij} X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_k X_{jk} - \sum_k X_{kj} = L_j \quad j = 1,2,\ldots,n$$

NODOS: 1,2,3, ...n...J

Variables de decisión: X_{ij}= Flujo del nodo i al j

(i, j) = ruta de transporte en la red

C_{ij} = costo de transporte en la red

$i \leqslant j$

L_j=Oferta total del nodo J.

Si $L_j \geqslant 0$ es un nodo de Oferta (Fuente)

Si $L_j \leqslant 0$ es un nodo Demanda (Sumidero)

Las restricciones del tipo:

$$\sum_k X_{jk} - \sum_k X_{kj} = L_j \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Expresan la capacidad de flujo L_j de cada uno de los nodos de la red, si el resultado de:

$$L_j = 0$$

Estará indicando que todo lo que entra-sale; por lo que es simplemente un nodo de transbordo. El termino Limitado u_{ij} , es referente a la capacidad de oferta o demanda del nodo.

Para poner en práctica el modelo matemático de un problema de flujo de carga(producto), realizaremos el siguiente ejemplo.

1.4.-EJERCICIO PROTOTÍPICO DISTRIBUIDORA MORALES.

$0 \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij}$, *para todo* (i,j) *de la red*

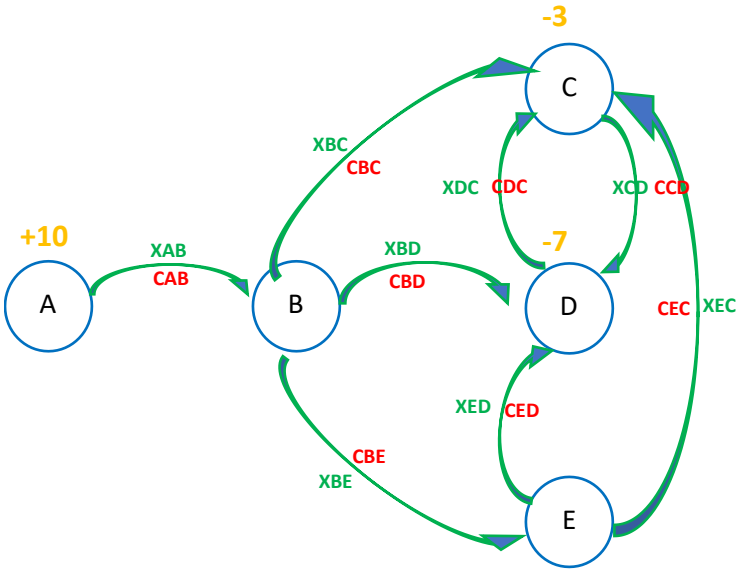
Industria Jaramillo, tiene un distribuidor a nivel nacional de sus molinos chilenos y de Bolas. Este es DISTRIBUIDORA MORALES, gerenciada por el Sr. Abelardo González.

Don Abelardo distribuye sus Molinos en cinco provincias. En la actualidad, DISTRIBUIDORA MORALES tiene 10 **molinos chilenos** M1 en lo que designaremos como la **central A**. Estos molinos deben ser enviados a los dos locales de minería más importantes, designados como **distribuidor C** y **D.** Se necesitan tres M1 en el **C** y siete M1 en el **D**.

Debido a horarios planificados con anterioridad, de los cuales depende la disponibilidad de los choferes, los **molinos** $0 \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij}$, *para todo* (i,j) *de la red* **chilenos** M1 solamente pueden ser distribuidos de acuerdo con las rutas alternativas que se muestran en la Gráfico 1.11.:

Gráfico 1.11.

Rutas *transporte*



Nota: *gráfico elaboración propia*

El problema de DISTRIBUIDORA MORALES consiste en encontrar un plan de transporte que satisfaga la demanda a un costo mínimo.

x_{ij} = número total de M1 enviadas por el arco (i, j) = flujo del **nodo i** al **nodo j**

En consecuencia, éste es el modelo:

Costos del transporte:

CAB= 100

CBC= 45

CBD= 50

CBE= 20

CCD= 60

CDC= 85

CEC= 10

CED= 55

Función Objetivo

Función Objetivo

Z(min)=100 XAB + 45 XBC + 50 XBD + 20 XBE + 60 XCD+ 85 XDC+ 10 XEC + 55 XED

Sujeto a:

Restricciones

XAB = 10

-XAB+XBC+XBD+XBE = 0

-XBC -XDC -XEC +XCD = -3

-XBD +XDC -XCD -XED = -7

-XBE +XEC +XED = 0

Modelo Matemático

Ecuaciones en forma estandarizada

XAB ≤ 10

XBC ≤ 4

XBD ≤ 3

XBE ≤ 3

XCD ≤ 2

XDC ≤ 4

XEC ≤ 3

XED ≤ 5

Dado que el modelo de DISTRIBUIDORA MORALES es una PL, se puede hallar la solución con SOLVER como cualquier otra PL.

La estructura especial de este modelo de red se observa al colocar la información en la siguiente tabla, que denominaremos tabla incidencia-arco (gráfico 1.12).

Gráfico 1.12.

Matriz de incidencia nodo-arco

	ARCO								
NODO	(A,B)	(B,C)	(B,D)	(B,E)	(D,C)	(E,C)	(C,D)	(E,D)	LD
A	1	0	0	0	0	0	0	0	10
B	-1	1	1	1	0	0	0	0	0
C	0	-1	0	0	-1	-1	1	0	-3
D	0	0	-1	0	1	0	-1	-1	-7
E	0	0	0	-1	0	1	0	1	0

Nota: *gráfico Según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

De acuerdo con (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000) Para resolver el problema planteado, se puede desarrollar un modelo matemático basado en programación lineal que represente la red de nodos y las rutas con capacidades limitadas. Este modelo debe incluir las restricciones de capacidad, oferta y demanda, así como la función objetivo que minimice los costos asociados al transporte.

El procedimiento sería el siguiente:

1. Definir las variables de decisión: Representan el flujo de productos entre los nodos de la red.
2. Establecer la función objetivo: Minimizar los costos totales de transporte.
3. Plantear las restricciones:

- Restricciones de capacidad en las rutas.

- Restricciones de oferta en los nodos proveedores.

- Restricciones de demanda en los nodos consumidores.

4. Resolver el modelo: Utilizando el método simplex, desarrollado por George Dantzig, o herramientas computacionales como SOLVER de Excel.

Una vez implementado el modelo en Excel, se puede usar SOLVER para encontrar la solución óptima. Esto permitirá identificar las rutas más económicas para satisfacer la demanda de los consumidores, cumpliendo con las limitaciones de capacidad y oferta disponibles.

El primer paso consiste en definir las fórmulas necesarias para diseñar la hoja de cálculo en EXCEL. Estas fórmulas permitirán crear las celdas correspondientes a las variables de decisión, la celda destinada a la función objetivo y las celdas que representarán las restricciones. Este proceso se detalla en la tabla 1.1 y se ilustra en el gráfico 1.13.

Tabla 1.1.

Formulas usadas en las celdas de la página electrónica de Excel.

Celda	**Fórmula**	**Cópiese a**
J10	**= C10*J3**	**J10:N14**
H10	**= SUMA (C10:G10)**	**H11:H14**
C15	**= SUMA (C10:C14)**	**D15:G15**

Nota: *Tabla Segun (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

Gráfico 1.13.

Datos ingreso DISTRIBUIDORA MORALES

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		MODELO DE TRANSPORTE CON CAPACIDADES														
2		CAPACIDAD DE NODOS	NODO 1	NODO 2	NODO 3	NODO 4	NODO 5		COSTO UNITARIO	NODO 1	NODO 2	NODO 3	NODO 4	NODO 5		
3		NODO 1	0	10	0	0	0		NODO 1		100					
4		NODO 2	0	0	4	3	3		NODO 2			45	50	20		
5		NODO 3	0	0	0	2	0		NODO 3				60			
6		NODO 4	0	0	4	0	0		NODO 4			85				
7		NODO 5	0	0	3	5	0		NODO 5			10	55			
8																
9		EMBARQUES	NODO 1	NODO 2	NODO 3	NODO 4	NODO 5	TOTAL EMBARCADO	COSTO TOTAL	NODO 1	NODO 2	NODO 3	NODO 4	NODO 5	TOTAL	
10		NODO 1	0	10	0	0	0	10	NODO 1	0	1000	0	0	0	1000	
11		NODO 2	0	0	4	3	3	10	NODO 2	0	0	180	150	60	390	
12		NODO 3	0	0	0	1	0	1	NODO 3	0	0	0	60	0	60	
13		NODO 4	0	0	0	0	0	0	NODO 4	0	0	0	0	0	0	
14		NODO 5	0	0	0	3	0	3	NODO 5	0	0	0	165	0	165	
15	TOTAL RECIBIDO		0	10	4	7	3		TOTAL	0	1000	180	375	60	1615	
16	EMBARCADO-RECIBIDO		0	0	0	0	0									
17	NETO REQUERIDO		0	0	0	0	0									
18																
19																

Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Moore, J. H. & Weatherford,*

L.R., 2000)

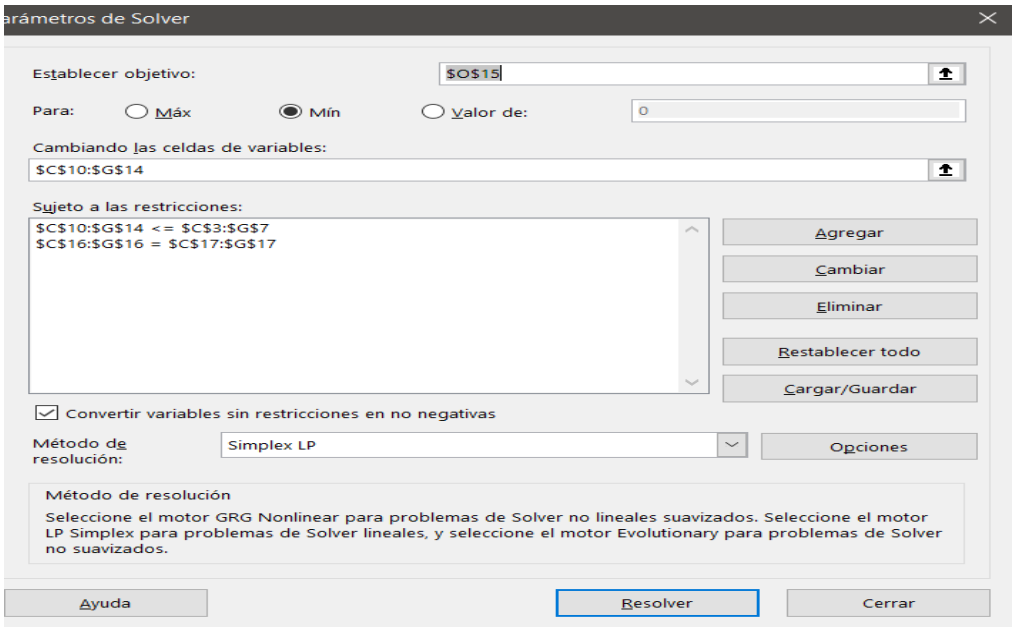
Solución del Problema Distribuidora Morales Utilizando SOLVER

Con lo que se verifica que los problemas de redes se pueden solucionar por el **METODO SIMPLEX**

Ahora podemos utilizar SOLVER y empezar a ingresar los datos que solicita directamente en la hoja de cálculo de Excel, tal como se muestra en el gráfico 1.14.

Gráfico 1.14.

Parámetros SOLVER



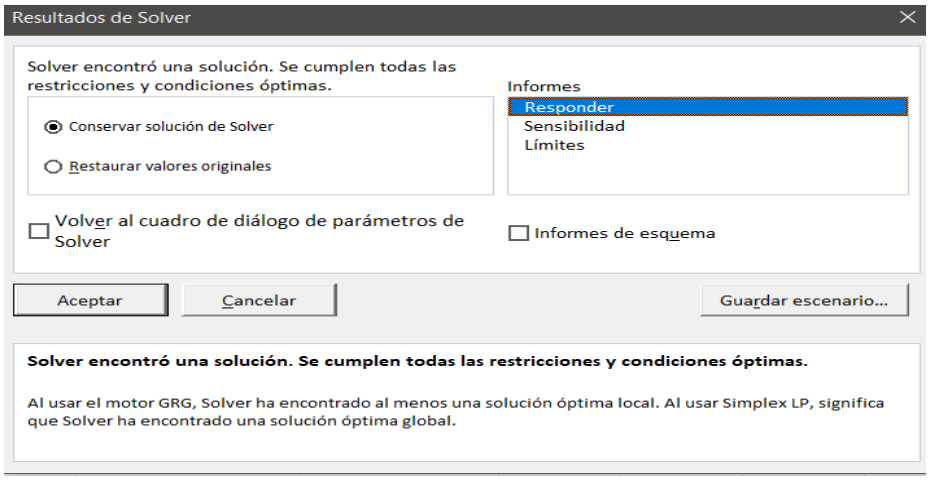
Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Moore, J. H. & Weatherford,*

L.R., 2000)

Se activa la solicitud de informe (RESPONDER) en SOLVER. Tal y como se observa en el gráfico 1.15.

Gráfico 1.15.

Resultados de SOLVER

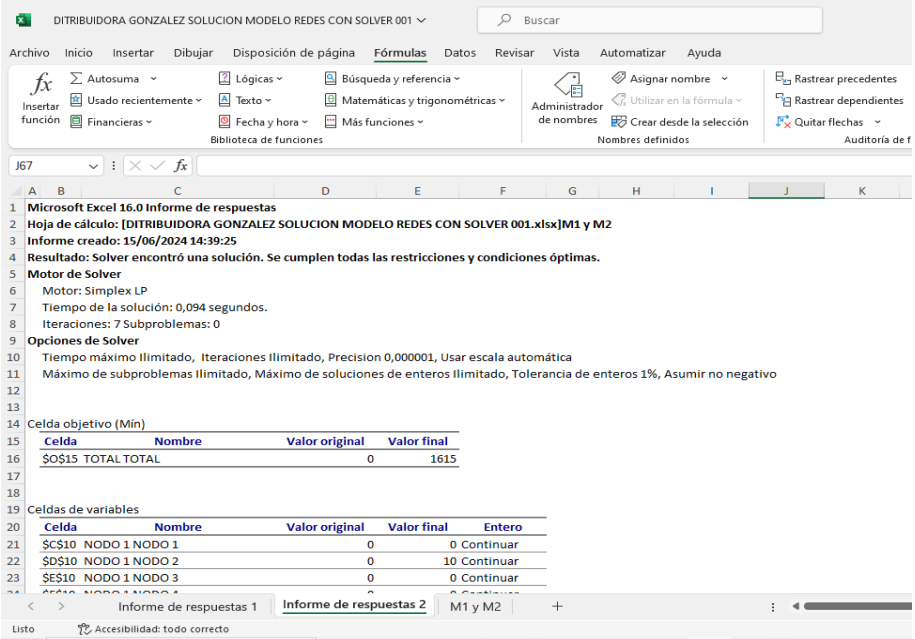


Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

La solución del problema de Redes se observa en los gráficos 1.15 y 1.16.

Gráfico 1.16.

Solución SOLVER

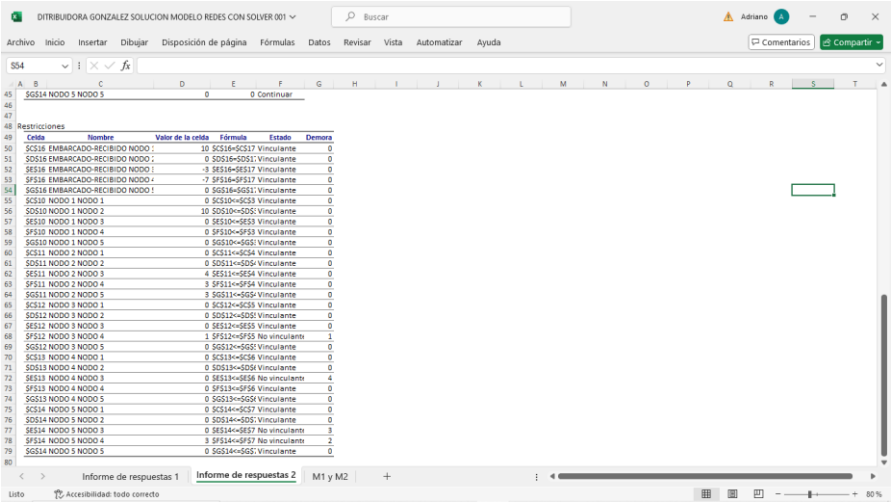


Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Moore, J. H. & Weatherford, L.*

R., 2000)

Figura 1.17.

Solución SOLVER



45	SGS14 NODO 5 NODO 5		0	0 Continuar	
48	Restricciones				
49	Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
50	$C$16 EMBARCADO-RECIBIDO NODO 1		10	$C$16=$C$17	Vinculante	0
51	$D$16 EMBARCADO-RECIBIDO NODO 2		0	$D$16=$D$17	Vinculante	0
52	$E$16 EMBARCADO-RECIBIDO NODO 3		-3	$E$16=$E$17	Vinculante	0
53	$F$16 EMBARCADO-RECIBIDO NODO 4		-7	$F$16=$F$17	Vinculante	0
54	$G$16 EMBARCADO-RECIBIDO NODO 5		0	$G$16=$G$17	Vinculante	0
55	$C$10 NODO 1 NODO 1		0	$C$10<=$C$3	Vinculante	0
56	$D$10 NODO 1 NODO 2		10	$D$10<=$D$5	Vinculante	0
57	$E$10 NODO 1 NODO 3		0	$E$10<=$E$3	Vinculante	0
58	$F$10 NODO 1 NODO 4		0	$F$10<=$F$3	Vinculante	0
59	$G$10 NODO 1 NODO 5		0	$G$10<=$G$3	Vinculante	0
60	$C$11 NODO 2 NODO 1		0	$C$11<=$C$4	Vinculante	0
61	$D$11 NODO 2 NODO 2		0	$D$11<=$D$4	Vinculante	0
62	$E$11 NODO 2 NODO 3		4	$E$11<=$E$4	Vinculante	0
63	$F$11 NODO 2 NODO 4		3	$F$11<=$F$4	Vinculante	0
64	$G$11 NODO 2 NODO 5		3	$G$11<=$G$4	Vinculante	0
65	$C$12 NODO 3 NODO 1		0	$C$12<=$C$5	Vinculante	0
66	$D$12 NODO 3 NODO 2		0	$D$12<=$D$5	Vinculante	0
67	$E$12 NODO 3 NODO 3		0	$E$12<=$E$5	Vinculante	0
68	$F$12 NODO 3 NODO 4		1	$F$12<=$F$5	No vinculante	1
69	$G$12 NODO 3 NODO 5		0	$G$12<=$G$5	Vinculante	0
70	$C$13 NODO 4 NODO 1		0	$C$13<=$C$6	Vinculante	0
71	$D$13 NODO 4 NODO 2		0	$D$13<=$D$6	Vinculante	0
72	$E$13 NODO 4 NODO 3		0	$E$13<=$E$6	No vinculante	4
73	$F$13 NODO 4 NODO 4		0	$F$13<=$F$6	Vinculante	0
74	$G$13 NODO 4 NODO 5		0	$G$13<=$G$6	Vinculante	0
75	$C$14 NODO 5 NODO 1		0	$C$14<=$C$7	Vinculante	0
76	$D$14 NODO 5 NODO 2		0	$D$14<=$D$7	Vinculante	0
77	$E$14 NODO 5 NODO 3		0	$E$14<=$E$7	No vinculante	3
78	$F$14 NODO 5 NODO 4		3	$F$14<=$F$7	No vinculante	2
79	$G$14 NODO 5 NODO 5		0	$G$14<=$G$7	Vinculante	0

Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

El costo mínimo del transporte es de $1615 dólares.

Y el recorrido dado por las variables de decisión es:

Flujo obtenido:

XAB = 10 M1

XBC = 4 M1

XBD = 3 M1

XBE = 3 M1

XCD = 1 M1

XED = 3 M1

El modelo matemático desarrollado permite abordar un esquema de redes como un problema de programación lineal. Este enfoque identifica el recorrido más eficiente en términos económicos para satisfacer la demanda solicitada,

considerando las restricciones de flujo, como la capacidad máxima de transporte.

1.5.-CONCLUSIONES

La idea principal se llevó a término, al poder interpretar un problema de redes de transporte como el prototípico presentado (DISTRIBUIDORA MORALES), en su forma de modelo matemático de Programación Lineal, y poder resolverlo rápidamente en un paquete como lo es SOLVER de Excel.

Lo siguiente que se obtuvo, fue poder iniciar un tema tan interesante como lo es el de las redes, de una manera práctica, con su propia terminología y puntos de vista de construcción en términos de redes.

1.6.-CUESTIONARIO

1.6.1.-VERDADERO-FALSO

2. En un modelo de transbordo con capacidades, si el lado derecho de la desigualdad de capacidad de cualquier arco es cero, el modelo no es factible. (V) (F)
3. En el modelo de red, la matriz de incidencia arco-nodo tiene solo un +1, -1, en cada columna. (V) (F)
4. En cada nodo de un modelo de redes con transbordo capacitado existe una variable. (V) (F)
5. El Nodo es también llamado vértice, o punto. (V) (F)
6. El objetivo en un ejercicio de trasbordo capacitado, es llevar un producto, de un nodo fuente a un nodo destino, con el menor costo. (V) (F)
7. En general, cualquier sistema que represente gráficamente un proceso que requiera una serie de actividades entrelazadas para llevar energía-materia o información lo llamaremos modelo de red. (V) (F)
8. El arco también puede ser llamado flecha. (V) (F)
9. Un árbol de expansión es aquel árbol que enlaza todos los nodos de la red. (V) (F)
10. Puede ser hallada la solución de un problema de redes con SOLVER. (V) (F)

11. Un ciclo corresponde a la cadena que une a un nodo consigo mismo. (V) (F)

1.6.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

En un modelo de redes de transbordo limitado, en la ecuación que representa el equilibrio de flujo, un lado derecho positivo indica:

a. Que este nodo es fuente

b. Que este nodo es sumidero

c. Que es un nodo de transferencia

d. ninguno de los anteriores

Los parámetros que conforman el modelo de red de transbordo son:

a. C_{ij}, L_j, u_{ij}

b. C_{ij}, x_{ij}, L_j,

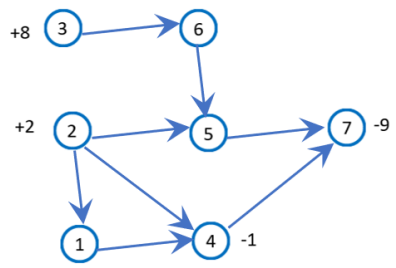
c. C_{ij}, x_{ij}, u_{ij}

d. ninguno de los anteriores

1.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

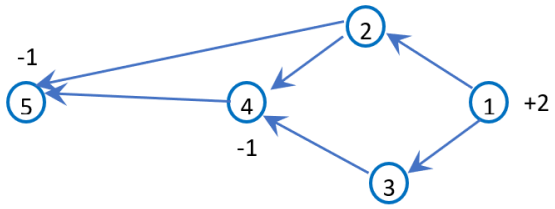
De la red en la siguiente figura, encuentre las restricciones

lineales correspondientes



De la red en la siguiente figura, encuentre las restricciones

lineales correspondientes



1.7.-GLOSARIO

Árbol:

se puede definir como una estructura jerárquica y en forma no lineal,

aplicada sobre una colección de elementos u objetos llamados nodos.

Arco:

Es una línea que conecta dos nodos, y en logística y transporte

representa los caminos entre localidades

Arcos dirigidos:

Permiten el flujo en una sola dirección.

Arcos no dirigidos:

Permiten el flujo en ambas direcciones.

Capacidad de arco:

Representa la cantidad máxima de flujo que puede circular por un arco

dirigido.

Gráfica:

Una gráfica es una serie de puntos llamados nodos que van unidos por

unas líneas llamadas ramales o arcos.

Nodo:

Es un punto específico dentro de una red de transporte y distribución

donde se concentran actividades logísticas esenciales, como

almacenamiento, clasificación, consolidación y distribución de

mercancías.

Nodo demanda (o nodo destino):

Es aquel en el que el flujo que llega es mayor al que sale.

Nodo de trasbordo (o nodo intermedio):

También conocido como nodo intermedio, es un punto dentro de una red que cumple con el principio de conservación del flujo, es decir, la cantidad de flujo que entra al nodo es exactamente igual a la cantidad de flujo que sale de él.

Nodo fuente (o nodo de origen):

Es aquel en el que el flujo que sale es mayor al que entra.

Red:

En el contexto descrito, es un conjunto de nodos (o vértices) conectados mediante arcos (o ligaduras, aristas o ramas), los cuales pueden ser dirigidos o no dirigidos.

Red conexa:

Una red es conexa si existe al menos una trayectoria no dirigida que conecta cada par de nodos, independientemente de si la red es dirigida o no.

Red dirigida:

Contiene únicamente arcos dirigidos, mientras que una red no dirigida tiene exclusivamente arcos no dirigidos.

Trayectoria:

Es una sucesión de arcos distintos que conectan dos nodos.

Trayectoria dirigida:

Si todos los arcos tienen una dirección hacia el nodo destino.

Trayectoria no dirigida:

Si los arcos pueden tener direcciones mixtas.

Los arcos:

Se etiquetan con los nombres de los nodos en sus puntos terminales.

PARTE 1. MODELO DE REDES - MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES

Contexto histórico general

La resolución de problemas de transporte comenzó a ganar relevancia a principios del siglo XX debido a la necesidad de optimizar los recursos en áreas como el comercio, la industria y los conflictos bélicos. En este contexto:

Problema del transporte: Introducido formalmente por el matemático ruso Leonid Kantorovich en 1939, quien desarrolló un marco matemático para minimizar costos de transporte en un sistema logístico. Este trabajo le valió el Premio Nobel de Economía en 1975.

Durante la Segunda Guerra Mundial, la optimización del transporte fue crucial para la logística militar, lo que impulsó el desarrollo de herramientas matemáticas en este campo.

En las décadas de 1940 y 1950, con el surgimiento de la programación lineal (liderada por George Dantzig, creador del método simplex), se desarrollaron métodos específicos para resolver problemas de transporte, entre ellos los métodos de asignación inicial como los que se mencionan aquí.

CAPITULO 2. FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO DE TRANSPORTE

2.1.-OBJETIVOS

-Entender el modelo de transporte asociado al modelo de redes de transbordo capacitado.

-Hallar el modelo matemático de un modelo de transporte para resolverlo en SOLVER.

-Analizar los resultados obtenidos en SOLVER.

2.2.-INTRODUCCION

Del análisis del modelo de redes, concluimos que los problemas de transporte se pueden resolver como uno de programación lineal (PL), anteriormente se resolvió un caso de transporte de suministros de la DISTRIBUIDORA MORALES, a través de SOLVER. Este desarrollo nos dejó una estructura particular denominada Matriz de incidencia nodo-arco (tabla 2.1.). desarrollada del modelo matemático obtenido:

Función Objetivo

En consecuencia, éste es el modelo:

Función Objetivo

Z(min)=100 XAB + 45 XBC + 50 XBD + 20 XBE + 60 XCD+ 85 XDC+ 10 XEC + 55 XED

Sujeto a:

XAB = 10

-XAB+XBC+XBD+XBE = 0

-XBC -XDC -XEC +XCD = -3

-XBD +XDC -XCD -XED = -7

-XBE +XEC +XED = 0

XAB ≤ 10

XBC ≤
4

XBD ≤
3

XBE ≤
3

XCD ≤
2

XDC ≤
4

XEC ≤
3

XED ≤
5

La estructura especial de este modelo de red se observa al colocar la información en la siguiente tabla, que denominaremos tabla incidencia-arco (tabla 2.1).

Tabla 2.1.

Matriz de incidencia nodo-arco

ARCO									
NODO	**(A, B)**	**(B, C)**	**(B, D)**	**(B, E)**	**(D, C)**	**(E, C)**	**(C, D)**	**(E, D)**	**LD**
A	1	0	0	0	0	0	0	0	10
B	-1	1	1	1	0	0	0	0	0
C	0	-1	0	0	-1	-1	1	0	-3
D	0	0	-1	0	1	0	-1	-1	-7
E	0	0	0	-1	0	1	0	1	0

Nota: *Tabla segun (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

En donde los lados derechos **LD** corresponden a nodos que son proveedores o consumidores, de acuerdo con el signo, e Igualmente, en cada columna que representa los arcos, los

unos positivos y negativos, indicando si el arco entra o sale del nodo.

Esta estructura reticular de la tabla 2.1 es la base para el desarrollo de otra tabla que será utilizada para la creación del ALGORITMO DE TRANSPORTE. Esta tabla usa el valor del costo de transporte mínimo c_{ij} , de distribuir una sola unidad desde el nodo que oferta i hasta el nodo que demanda j , en el problema de DISTRIBUIDORA MORALES, el nodo oferta es el A, y los nodos demanda son el C y el D. Obteniendo la siguiente Tabla 2.2.

Tabla 2.2.

Tabla de transporte para DISTRIBUIDORA MORALES

DESTINOS	C	D	OFERTAS
Origen A	c ac	c ad	10
DEMANDAS	3	7	

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

También nos permitirá vincular los problemas de modelos de redes con los algoritmos de transporte, los que a su ves tienden a requerir un número muy grande de restricciones y variables, de forma tal que el método simplex requerirá un trabajo computacional elevado.

Pero gracias a que en la tabla1. Se observa que los coeficientes técnicos a_{ij} en su mayoría son iguales a cero, se han desarrollado algoritmos que simplifican en gran manera estos procesos computacionales.

El modelo de transporte es una clase especial de programación lineal que tiene que ver con transportar un artículo desde sus fuentes hasta sus destinos. En el modelo se supone que el costo del transporte es proporcional a la cantidad de unidades transportadas en determinada ruta.

El objetivo del modelo es minimizar el costo de trasporte total al mismo tiempo que se satisfacen las restricciones de la oferta y la demanda. Es decir, hay m orígenes y n destinos, cada uno representado por un nodo. Los arcos representan las rutas que unen los orígenes con los destinos.

Los orígenes m mencionados representan una simplificación de todos los proveedores de un producto. Estos proveedores compiten entre sí, considerando el costo del transporte como un factor clave. En este caso, no se toman en cuenta las limitaciones de los flujos, ya que al demandante solo le interesaría saber cuánto le costaría el transporte desde ese proveedor específico.

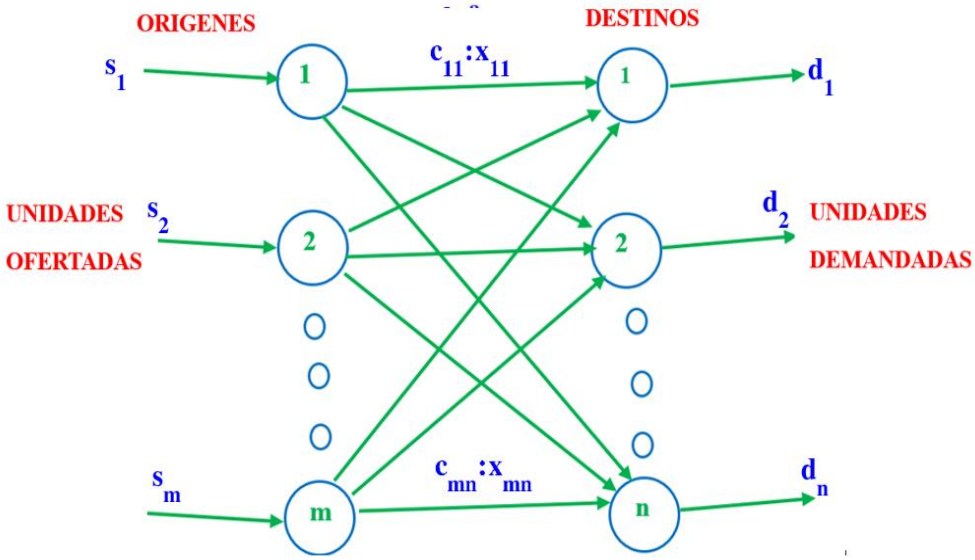
En forma de diagrama de redes general, el modelo de transporte tiene el siguiente esquema(gráfico 2.1).

Figura 2.1.

Diagrama red de un problema de transporte

DESTINOS	Destino1	Destino2	. . .	Destino n	OFERTAS
Origen 1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1n}	s_1
Origen 2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2n}	s_2
. . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .
Origen m	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mn}	s_m
DEMANDAS	d_1	d_2	. . .	d_n	

Ruta de transporte de un metro



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

Del que obtenemos el modelo matemático general de PL.

Según *(Moore, J. H. & Weatherford, L. R., (2000)*

Función Objetivo

$$\textbf{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Modelo Matemático de PL

De flujo de carga

Obtenido para resolverlo con **SOLVER**

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = s_i \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,n,$$

y

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } j.$$

s_i = ofertas

d_j = demandas

Esto indica que un problema de transporte puede ser solucionado como un problema de programación lineal (PL),

con los métodos tratados de la Tabla Simplex. Pero como habíamos indicado que este esquema genera la tabla 2.2. La misma que a través del Algoritmo de Transporte, simplifica los cálculos retribuyendo en uso de tiempo de computación, que en problemas de gran volumen de transporte como lo son los logísticos, se ven sus beneficios, esto lo veremos en los temas del Algoritmo de los MULTIPLICADORES.

De hecho, el modelo de asignación puede resolverse de forma directa como un modelo de transporte (o como una PL regular). Sin embargo, el hecho de que la oferta y la demanda sean iguales a 1 conduce al desarrollo de un algoritmo de solución simple llamado método húngaro. Aunque el nuevo método de solución parece totalmente ajeno al modelo de transporte, en realidad el algoritmo tiene su origen en el método simplex, al igual que el modelo de transporte. (Taha, H. A.,2017, p 211)

Rutas de transporte de una aerolinea

Por lo pronto vamos a desarrollar el siguiente ejemplo, primero hallando su modelo matemático y resolviéndolo con SOLVER.

2.3.-DESARROLLO

Ejercicio prototípico FLORES TROPICALES.

Flores tropicales es una industria florícola, que tiene tres zonas de cultivo en ciudades costeras del país (Machala, Babahoyo y Esmeraldas), distribuye a cuatro ciudades (Quito, Bogotá, Santiago, Buenos Aires), Las oferta en (cajas) y la demanda igualmente en (cajas), se simplifican en la tabla modelo de transporte indicada en el gráfico 2.2. En la misma los costos de transporte se colocan en un casillero en la esquina superior de cada casillero.

Tabla 2.3.

Demanda Flores

Ciudad	**Cantidad(cajas)**
Quito	400
Bogotá	900
Santiago	200
Buenos Aires	500

Nota: *tabla elaboración propia*

Tabla 2.4.

Oferta Flores

Ciudad	**Cantidad(cajas)**
Machala	500
Babahoyo	700
Esmeraldas	800

Nota: *tabla elaboración propia*

El costo de transporte se indica en la tabla 2.5.

Tabla 2.5.
Costo de transporte en dólares por caja

Del origen	**Al destino**			
	(1) Quito	**(2) Bogotá**	**(3) Santiago**	**(4) Buenos Aires**
(A) Machala	120	130	41	62
(B)Babahoyo	61	40	100	110
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42

Nota: *tabla elaboración propia*

El origen lo denotaremos con letras **(A, B, C)** y los destinos con números **(1,2,3,4)**.

X_{ij} cantidad de cajas enviadas
***i* _ A, B, C**
***j* _ l, 2, 3, 4**

Función Objetivo

función objetivo, se vuelve
$$Z(Min) = 120X_{A1} + 130X_{A2} + \ldots + 42X_{C4}$$
Sujeto a:
Restricciones de oferta

Restricciones

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} \leqslant 500$$
$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} \leqslant 700$$
$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} \leqslant 800$$

Restricciones de demanda
$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \geqslant 400$$
$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \geqslant 900$$
$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \geqslant 200$$
$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} \geqslant 500$$

Este problema lo solucionaremos de acuerdo con *(Taha, H. A.2017)*, primero aplicando SOLVER, al modelo de programación lineal encontrado, El objetivo es hallar las rutas con los mínimos costos de transporte ofertado por cada proveedor m, para poder abastecer los sitios de demanda.
Primero definiremos las fórmulas necesarias para diseñar la hoja de cálculo en Excel. Estas fórmulas permitirán crear las celdas correspondientes a las variables de decisión, la celda destinada a la función objetivo y las celdas que representarán las restricciones. Este proceso se detalla en la tabla 2.6 y se ilustra en la figura 2.2.

Solución del Problema FLORES TROPICALES Utilizando SOLVER

Con lo que se verifica que los problemas de transporte se pueden solucionar por el **METODO SIMPLEX**

Tabla 2.6.

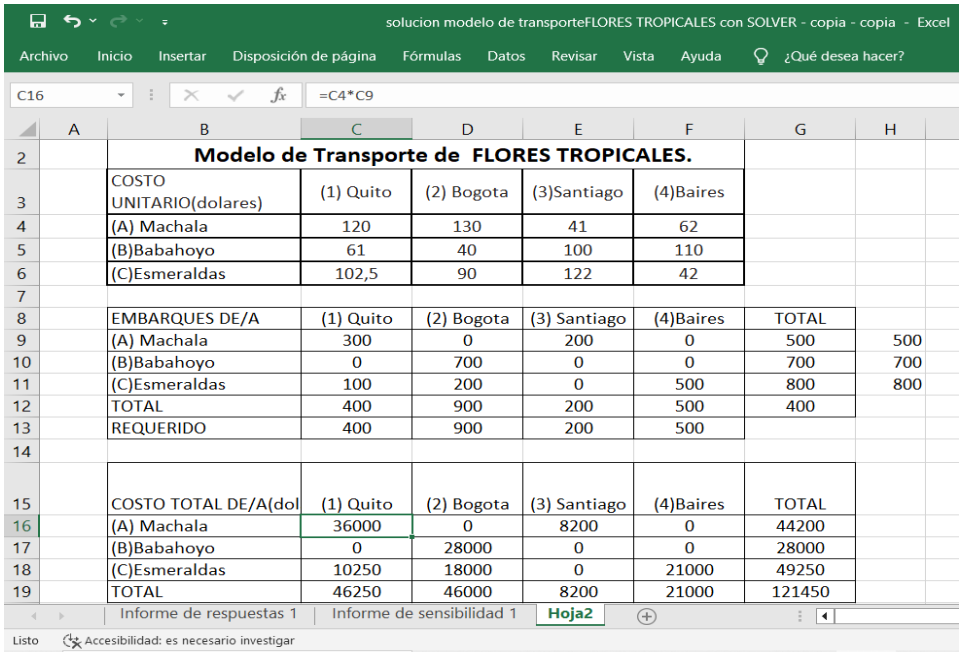
Formulas Excel FLORES TROPICALES.

Celda	Fórmula	Cópiese a
C16	= C4*C9	C16:F18
G9	= SUMA(C9:F9)	G10:G11
C12	= SUMA(C9:C11)	D12:F12

Nota: *tabla elaboración propia*

Gráfico 2.2.

Datos hoja FLORES TROPICALES Excel SOLVER



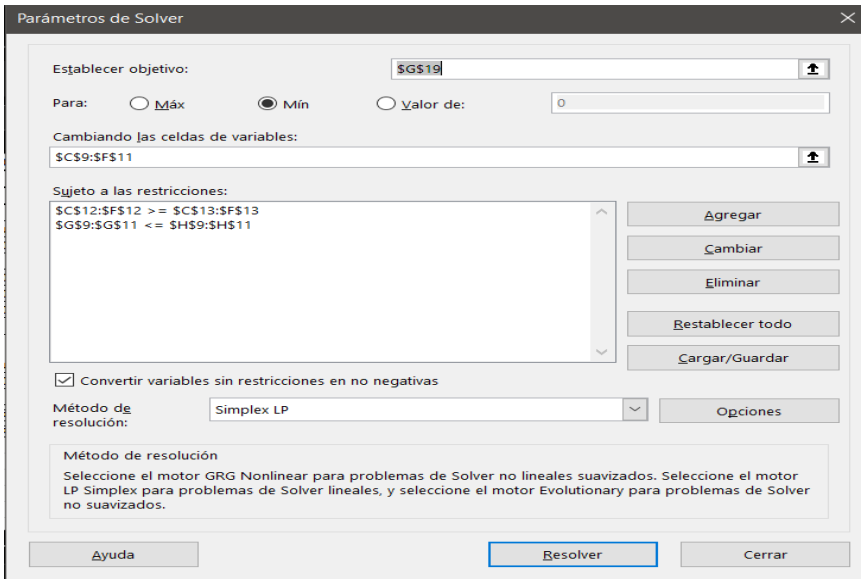
	A	B	C	D	E	F	G	H
2		**Modelo de Transporte de FLORES TROPICALES.**						
3		COSTO UNITARIO(dolares)	(1) Quito	(2) Bogota	(3)Santiago	(4)Baires		
4		(A) Machala	120	130	41	62		
5		(B)Babahoyo	61	40	100	110		
6		(C)Esmeraldas	102,5	90	122	42		
7								
8		EMBARQUES DE/A	(1) Quito	(2) Bogota	(3) Santiago	(4)Baires	TOTAL	
9		(A) Machala	300	0	200	0	500	500
10		(B)Babahoyo	0	700	0	0	700	700
11		(C)Esmeraldas	100	200	0	500	800	800
12		TOTAL	400	900	200	500	400	
13		REQUERIDO	400	900	200	500		
14								
15		COSTO TOTAL DE/A(dol	(1) Quito	(2) Bogota	(3) Santiago	(4)Baires	TOTAL	
16		(A) Machala	36000	0	8200	0	44200	
17		(B)Babahoyo	0	28000	0	0	28000	
18		(C)Esmeraldas	10250	18000	0	21000	49250	
19		TOTAL	46250	46000	8200	21000	121450	

Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Taha, H. A.2017)*

Utilizar SOLVER y empezaremos a ingresar los datos que solicita directamente en la hoja de cálculo de Excel, tal como se muestra en el gráfico 2.3.

Gráfico 2.3.

Parámetros SOLVER ejercicio FLORES TROPICALES.

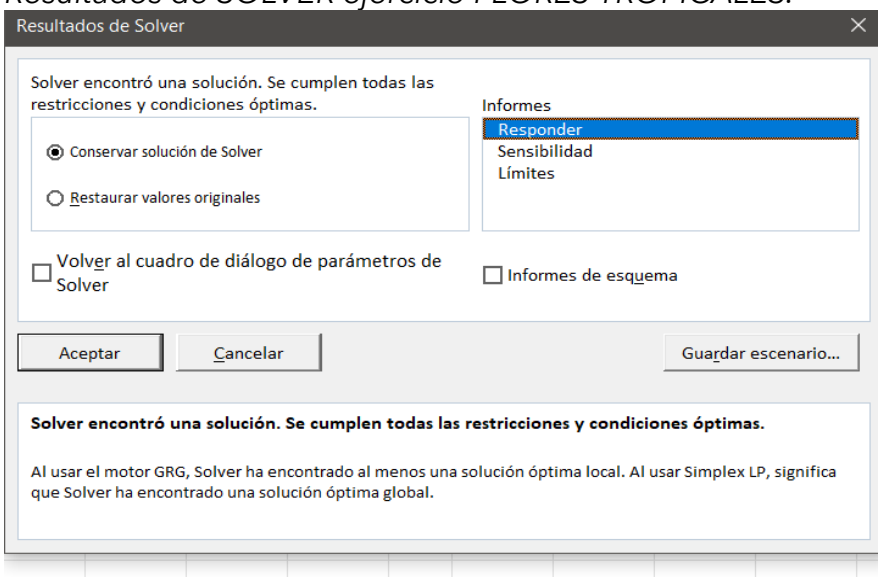


Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Taha, H. A.2017)*

Se activa la solicitud de informe (RESPONDER) en SOLVER. Tal y como se observa en el grafico 2.4.

Gráfico 2.4.

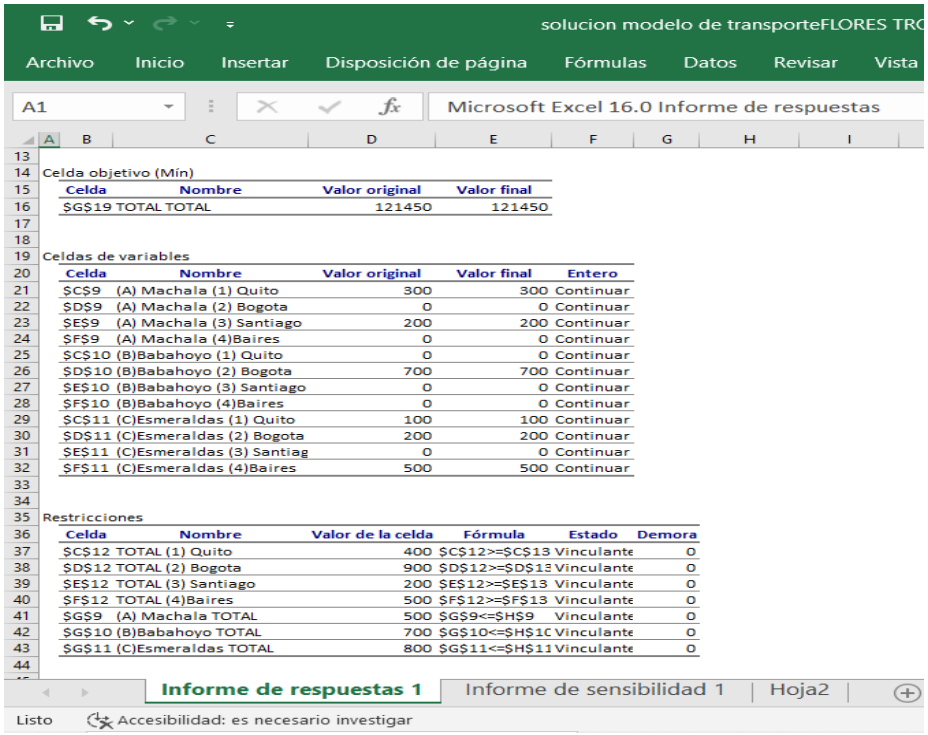
Resultados de SOLVER ejercicio FLORES TROPICALES.



Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Taha, H. A.2017)*

La solución del problema de transporte se observa en los gráficos 2.5. , 2.6., y 2.7.

Gráfico 2.5.
Resultados de SOLVER ejercicio FLORES TROPICALES.



Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$19	TOTAL TOTAL	121450	121450

Celdas de variables

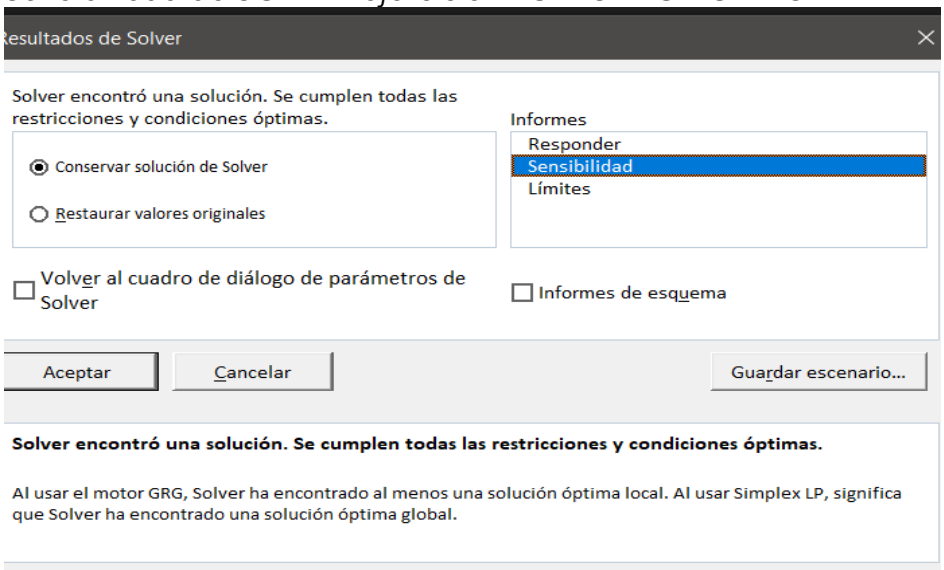
Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$9	(A) Machala (1) Quito	300	300	Continuar
$D$9	(A) Machala (2) Bogota	0	0	Continuar
$E$9	(A) Machala (3) Santiago	200	200	Continuar
$F$9	(A) Machala (4)Baires	0	0	Continuar
$C$10	(B)Babahoyo (1) Quito	0	0	Continuar
$D$10	(B)Babahoyo (2) Bogota	700	700	Continuar
$E$10	(B)Babahoyo (3) Santiago	0	0	Continuar
$F$10	(B)Babahoyo (4)Baires	0	0	Continuar
$C$11	(C)Esmeraldas (1) Quito	100	100	Continuar
$D$11	(C)Esmeraldas (2) Bogota	200	200	Continuar
$E$11	(C)Esmeraldas (3) Santiag	0	0	Continuar
$F$11	(C)Esmeraldas (4)Baires	500	500	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$C$12	TOTAL (1) Quito	400	$C$12>=$C$13	Vinculante	0
$D$12	TOTAL (2) Bogota	900	$D$12>=$D$13	Vinculante	0
$E$12	TOTAL (3) Santiago	200	$E$12>=$E$13	Vinculante	0
$F$12	TOTAL (4)Baires	500	$F$12>=$F$13	Vinculante	0
$G$9	(A) Machala TOTAL	500	$G$9<=$H$9	Vinculante	0
$G$10	(B)Babahoyo TOTAL	700	$G$10<=$H$10	Vinculante	0
$G$11	(C)Esmeraldas TOTAL	800	$G$11<=$H$11	Vinculante	0

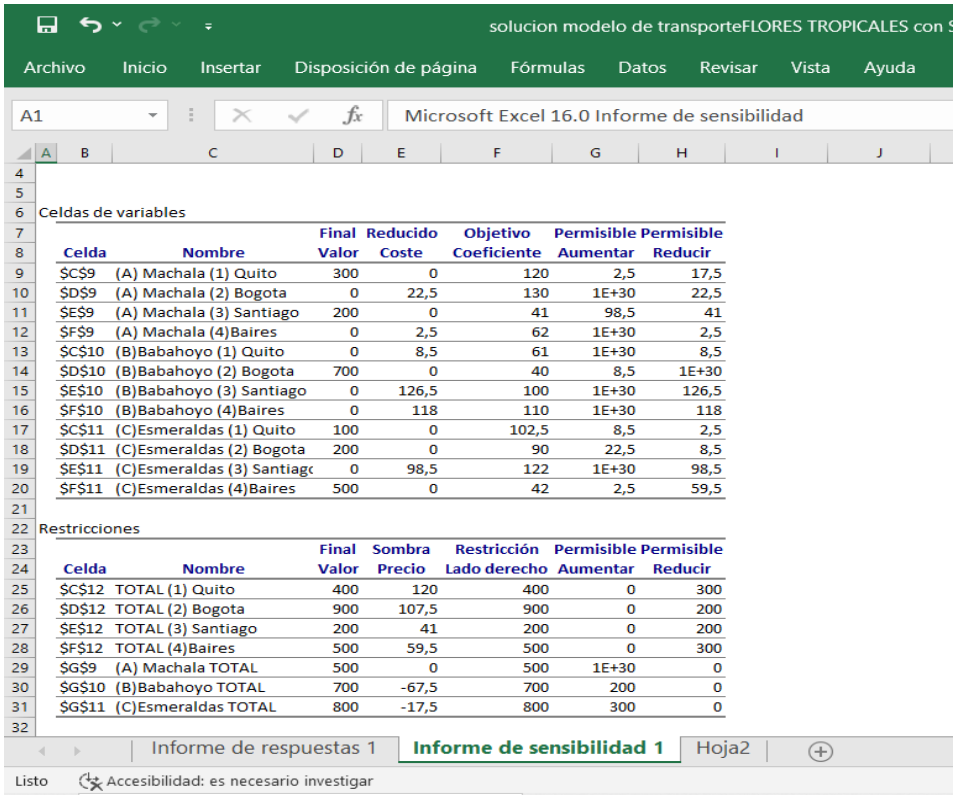
Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Taha, H. A.2017)*

Gráfico 2. 6.
Sensibilidad de SOLVER ejercicio FLORES TROPICALES



Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Taha, H. A.2017)*

Gráfico 2.7.
Informe Sensibilidad de SOLVER ejercicio FLORES TROPICALES.



Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$C$9	(A) Machala (1) Quito	300	0	120	2,5	17,5
$D$9	(A) Machala (2) Bogota	0	22,5	130	1E+30	22,5
$E$9	(A) Machala (3) Santiago	200	0	41	98,5	41
$F$9	(A) Machala (4)Baires	0	2,5	62	1E+30	2,5
$C$10	(B)Babahoyo (1) Quito	0	8,5	61	1E+30	8,5
$D$10	(B)Babahoyo (2) Bogota	700	0	40	8,5	1E+30
$E$10	(B)Babahoyo (3) Santiago	0	126,5	100	1E+30	126,5
$F$10	(B)Babahoyo (4)Baires	0	118	110	1E+30	118
$C$11	(C)Esmeraldas (1) Quito	100	0	102,5	8,5	2,5
$D$11	(C)Esmeraldas (2) Bogota	200	0	90	22,5	8,5
$E$11	(C)Esmeraldas (3) Santiago	0	98,5	122	1E+30	98,5
$F$11	(C)Esmeraldas (4)Baires	500	0	42	2,5	59,5

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$C$12	TOTAL (1) Quito	400	120	400	0	300
$D$12	TOTAL (2) Bogota	900	107,5	900	0	200
$E$12	TOTAL (3) Santiago	200	41	200	0	200
$F$12	TOTAL (4)Baires	500	59,5	500	0	300
$G$9	(A) Machala TOTAL	500	0	500	1E+30	0
$G$10	(B)Babahoyo TOTAL	700	-67,5	700	200	0
$G$11	(C)Esmeraldas TOTAL	800	-17,5	800	300	0

Nota: *gráfico obtenido de Excel según (Taha, H. A.2017)*

2.4.-CONCLUCIONES

La formulación y la solución, así como el Informe de sensibilidad de Excel para el modelo de transporte de FLORES TROPICALES se presentan en las figuras (2,3,4,5,6,7), respectivamente. Observe cómo la distribución del modelo aprovecha la organización "desde-hasta" del modelo de transporte y emplea tres bloques de celdas: parámetros de costos, variables de decisión y costos totales. En la tabla6, vemos que se usan 6 de las 12 rutas posibles y que el costo mínimo de transportación es de $121450.00 (figura5). Además, el análisis del Informe de sensibilidad nos muestra, por ejemplo, que los costos totales descenderían a razón de

$107.50 por caja hasta llegar a un máximo de 200 cajas si se redujeran los requerimientos desde Riobamba, y que los costos totales bajarían a razón de $17.50 por caja hasta un máximo de 300 cajas si aumentara la oferta de cajas en Esmeraldas. (El movimiento en la dirección opuesta [aumento de la demanda o disminución de la oferta] no es "permisible", pues provocaría situaciones no factibles.) Para que ponga usted a prueba su propia comprensión del Informe de sensibilidad del modelo intente responder la siguiente pregunta.
¿Cuánto tendría que descender el costo de transportación de una caja desde Babahoyo hasta Cuenca para que FLORES TROPICALES pudiera considerar atractiva esta ruta?

En los siguientes temas a tratar, veremos cómo solucionar este problema de FLORES TROPICALES, con algoritmos específicos (ESQUINA NOROESTE-METODO VOGUEL-METODO MULTIPLICADORES). En FRUTAS TROPICALES hemos demostrado que el problema de transporte es un problema del modelo de Redes, que es posible resolver con SOLVER.

2.5.-GLOSARIO

Arco.
Punto de conexión entre dos nodos de una red.
Destino.
Nodo de una red en el cual la demanda es positiva.
Diagrama de red.
Representación esquemática constituida por una serie de nodos y arcos a través de los cuales puede transitar el flujo.
Ecuación de balance (equilibrio) de flujo.
Restricción para el balance de materiales en un modelo de red, según la cual la suma de la oferta más el flujo total que entra en un nodo tiene que ser igual a la suma de la demanda más el flujo total que sale de dicho nodo.

Matriz de incidencia nodo-arco.
Formato de tabla para presentar los datos de las restricciones en un modelo de red. A cada uno de los arcos de la red corresponde una columna de la tabla. A cada nodo le corresponde una fila de la tabla. Cada columna tiene solamente dos entradas diferentes de cero, _1 y _1. El _1 (_1) se encuentra en la fila correspondiente al nodo en el cual se origina (o termina) el arco.

Modelo de red.
En general, se refiere al modelo de transbordo con capacidades o alguna de sus formas especiales.

Modelo de transbordo con capacidades.
Modelo de red donde las ofertas están en puntos de origen específicos, las demandas se localizan en puntos de destino específicos y las diversas alternativas de embarque se ofrecen a través de nodos intermedios, siguiendo rutas cuyas capacidades están definidas desde los orígenes hasta los destinos.

Modelo de transporte.
Modelo de PL para encontrar la forma menos costosa de satisfacer demandas en *n* destinos con suministros de *m* orígenes.

Nodo.
Uno de los elementos de una red.

Origen.
Nodo de una red en el cual la oferta es positiva.

Origen ficticio.
Fuente u origen imaginario que se agrega a un modelo de transporte para que la oferta total sea igual a la demanda total.

Rama.
Sinónimo de *arco*.

PARTE 1. MODELO DE REDES - MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES

Los métodos de optimización como el Método de la Esquina Noroeste, el Método de Costo Mínimo y el Método de Aproximación de Vogel surgen dentro del campo de la investigación de operaciones (Operations Research), específicamente en la resolución de problemas de transporte. Estos métodos tienen sus raíces en los desarrollos matemáticos y económicos del siglo XX, cuando se buscaban soluciones eficientes para problemas logísticos y de distribución.

A continuación, se presenta un recorrido histórico sobre el desarrollo de estos métodos:

1. Contexto histórico general

CAPITULO 3. METODO ESQUINA NOROESTE

3.1.-OBJETIVOS

- -Desarrollar tabla de transporte para un problema de programación lineal.
- -Aplicar el algoritmo esquina noroeste a un problema prototípico.

3.2.-INTRODUCCION

La programación lineal aplicado a los problemas de transporte y asignación, crea un nuevo peldaño de investigación a través de las soluciones más estilizadas. En este caso son motivadas por la estructura reticular arco-nodo, dado por la simplificación de la tabla simplex al mostrar el modelo matemático del problema de transporte. Esta nueva tabla denominada de transporte tendrá una serie de características, que permitirán hallar soluciones más rápidas y con menos carga informática (por lo general uso de memoria). Dentro de este amplio desarrollo de algoritmos, veremos aquellos que mejor despejan la comprensión de dichas soluciones. Estos métodos como el de la esquina Noroeste, dará una solución factible inicial, que permitirá la aplicación más adelante de otros métodos, con los que se obtendrá una solución factible óptima.

3.3.-DESARROLLO

La tabla de transporte estándar (gráfico 3.1), nos permitirá hallar una solución básica factible inicial. Existen una serie de métodos desarrollados, tales como:

-Método Esquina Noroeste

-Método Costo mínimo

-Método de Aproximación de Vogel

Todos ellos válidos, pero diferentes en su exactitud y sencilles.

En nuestro caso vamos a estudiar el método de la esquina Noroeste, aunque no es el más exacto, si el más sencillo.

1. Contexto histórico general

La resolución de problemas de transporte comenzó a ganar relevancia a principios del siglo XX debido a la necesidad de optimizar los recursos en áreas como el comercio, la industria y los conflictos bélicos. En este contexto:

Problema del transporte: Introducido formalmente por el matemático ruso Leonid Kantorovich en 1939, quien desarrolló un marco matemático para minimizar costos de transporte en un sistema logístico. Este trabajo le valió el Premio Nobel de Economía en 1975.

Durante la Segunda Guerra Mundial, la optimización del transporte fue crucial para la logística militar, lo que impulsó el desarrollo de herramientas matemáticas en este campo.

En las décadas de 1940 y 1950, con el surgimiento de la programación lineal (liderada por George Dantzig, creador del método simplex), se desarrollaron métodos específicos para resolver problemas de transporte, entre ellos los métodos de asignación inicial como los que se mencionan aquí.

2. Método de la Esquina Noroeste

Descripción del método

El Método de la Esquina Noroeste es un enfoque heurístico para encontrar una solución inicial factible al problema de transporte. Consiste en asignar unidades desde la esquina superior izquierda (noroeste) de la tabla de costos de transporte, avanzando fila por fila o columna por columna.

Historia del desarrollo

Este método fue uno de los primeros desarrollados debido a su simplicidad y facilidad de implementación manual.

Indicaremos los pasos de dicho algoritmo, y lo aplicaremos en un ejercicio prototípico (FLORES TROPICALES).

3.4.-ALGORITMO ESQUINA NOROESTE

Según *(Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)* Los pasos a seguir para desarrollar el algoritmo de la esquina noroeste son:

Paso 1. Construyamos una tabla de transporte con las ofertas y demandas (gráfico 3.1.).

Paso 2. Comencemos la ubicación en la fila uno y columna uno

(esquina noroeste, x_{11} ***),*** y si la oferta uno no se terminó continuemos

en la casilla x_{12} y así consecutivamente.

En el caso de que el total de la oferta uno no haya cubierto la

demanda del mercado uno, completar con la oferta dos, que es la celda

x_{21} y si no se terminó la oferta continuemos con la celda x_{22} y así hasta

concluir el proceso de asignación.

Paso 3. Actualice siempre la oferta y la demanda y ubique con ceros

el resto de las celdas (Filas o columnas) en donde la oferta y la

demanda hayan quedado cubiertas.

Paso 4. Continue hacia la derecha o hacia abajo, según haya quedado

disponible para asignar.

Paso 5. Repita los pasos del 3 al 4 sucesivamente hasta llegar a la

Surgió como una forma práctica de obtener una solución inicial rápidamente, aunque no garantiza la solución óptima.

Fue ampliamente utilizado en los años 1940 y 1950, cuando las computadoras todavía no estaban disponibles para resolver problemas complejos.

Se basa en la idea de satisfacer la demanda y oferta de manera secuencial, sin considerar inicialmente los costos, lo que lo hace menos eficiente que otros métodos.

3. Método de Costo Mínimo

Descripción del método

El Método de Costo Mínimo es un enfoque heurístico que asigna primero las unidades a las celdas con el costo más bajo en la tabla de transporte, buscando minimizar los costos desde el inicio.

Historia del desarrollo

Este método fue desarrollado como una mejora del Método de la Esquina Noroeste, ya que incorpora los costos en las decisiones iniciales.

Se introdujo en la misma época en que se desarrollaba la programación lineal, como parte de los esfuerzos por encontrar soluciones más eficientes a problemas de transporte.

Fue utilizado en aplicaciones logísticas durante la Segunda Guerra Mundial y en la posguerra, cuando las empresas buscaban optimizar sus cadenas de suministro.

Aunque ofrece mejores soluciones iniciales que el Método de la Esquina Noroeste, no siempre garantiza la solución óptima.

4. Método de Aproximación de Vogel

Descripción del método

El Método de Aproximación de Vogel (VAM, por sus siglas en inglés) es un método heurístico que busca encontrar una solución inicial factible al problema de transporte, considerando no solo los costos más bajos, sino también las penalizaciones asociadas a no elegir ciertas rutas.

esquina inferior derecha, en la que se eliminara fila y columna al

mismo tiempo. Lo aplicaremos paso a paso en el siguiente ejercicio

prototípico:

3.5.-EJERCICIO PROTOTIPICO FLORES TROPICALES.

Flores tropicales es una industria florícola, que tiene tres zonas de cultivo en ciudades costeras del país (Machala, Babahoyo y Esmeraldas), distribuye a cuatro ciudades (Quito, Bogotá, Santiago, Buenos Aires), Las oferta en (cajas) y la demanda igualmente en (cajas), se simplifican en la tabla modelo de transporte indicada en el gráfico 3.2. En la misma los costos de transporte se colocan en un casillero en la esquina superior de cada casillero.

Tabla 3.1.

Demanda Flores

Ciudad	**Cantidad(cajas)**
Quito	400
Bogotá	900
Santiago	200
Buenos Aires	500

Nota: *tabla elaboración propia*

Historia del desarrollo

Este método fue desarrollado en la década de 1950 como una herramienta más sofisticada para encontrar soluciones iniciales cercanas a la óptima.

Lleva el nombre de W. Vogel, quien lo propuso como una mejora significativa sobre los métodos anteriores.

El enfoque de penalizaciones permite priorizar las rutas más económicas mientras se minimiza el impacto de no usar otras rutas.

Fue diseñado para aprovechar la capacidad computacional emergente de la época, ya que es más complejo de calcular manualmente que los métodos anteriores.

Se popularizó en la década de 1960 gracias a su alta eficiencia en encontrar soluciones iniciales cercanas a la óptima, reduciendo el esfuerzo computacional necesario para alcanzar la solución final.

Relación con la programación lineal

Todos estos métodos se utilizan como pasos iniciales en la resolución del problema de transporte, que es un caso especial de programación lineal. Una vez que se obtiene una solución inicial factible, se puede utilizar el Método de Distribución Modificada (MODI) o el Método Stepping Stone para verificar y mejorar la solución hasta alcanzar la óptima.

Importancia histórica y actual

Estos métodos marcaron un hito en el desarrollo de técnicas de optimización y contribuyeron al avance de la investigación de operaciones como disciplina.

A pesar de su antigüedad, siguen siendo enseñados y utilizados en problemas logísticos debido a su simplicidad y aplicabilidad.

En la actualidad, los métodos computacionales han desplazado el uso manual de estas técnicas, pero su comprensión sigue siendo fundamental para el diseño y análisis de sistemas logísticos.

Resumen comparativo de los

Tabla 2.

Oferta Flores

Ciudad	**Cantidad(cajas)**
Machala	500
Babahoyo	700
Esmeraldas	800

Nota: *tabla elaboración propia*

El costo de transporte se indica en la tabla 3.3.

Tabla 3.3.

Costo de transporte en dólares por caja

Del origen	**Al destino**			
	(1) Quito	**(2) Bogotá**	**(3) Santiago**	**(4) Buenos Aires**
(A) Machala	120	130	41	62
(B)Babahoyo	61	40	100	110
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42

Nota: *tabla elaboración propia*

El origen lo denotaremos con letras **(A, B, C)** y los destinos con números **(1,2,3,4)**.

X_{ij} cantidad de cajas enviadas

***i* _ A, B, C**

***j* _ l, 2, 3, 4**

Según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)

función objetivo, se vuelve

$$Z(\text{Min}) = 120X_{A1} + 130X_{A2} + \ldots + 42X_{C4}$$

Sujeto a:

Restricciones de oferta

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} \leqslant 500$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} \leqslant 700$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} \leqslant 800$$

Restricciones de demanda

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \geqslant 400$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \geqslant 900$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \geqslant 200$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} \geqslant 500$$

$$X_{IJ} \geqslant 0$$

En el tema anterior se resolvió este problema de transporte, por medio de SOLVER, considerando el modelo matemático anterior.

Ahora vamos a utilizar la característica que habíamos hallado, que era la de poder describir un problema de transporte por medio de un cuadro de transporte (gráfico 3.1.).

Figura 3.1.

Cuadro de transporte general

DESTINOS	Destino1	Destino2	. . .	Destino n	OFERTAS
Origen 1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1n}	s_1
Origen 2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2n}	s_2
. . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .
Origen m	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mn}	s_m
DEMANDAS	d_1	d_2	. . .	d_n	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

d_n = demanda

s_m = oferta

C_{mn} = Costo por unidad distribuida desde el origen m al destino n

Con la tabla de la (gráfico 3.1.), elaboramos la tabla correspondiente al cuadro de transporte(gráfico. 3.2.).

Gráfico 3.2.

Cuadro de transporte

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	120	130	41	62	500
(B)Babahoyo	61	40	100	110	700
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42	800
DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Primero verificamos que la oferta y la demanda sean iguales.

Oferta=500+700+800=2000

Demanda=400+900+200+500=2000

la figura2 nos indica que al ser las restricciones del modelo matemático igualdades, se resuelve agregando variables artificiales, las mismas que son obviadas en el modelo del cuadro de transporte, permitiendo hallar directamente la solución básica factible inicial, por esto el método de la esquina noroeste nos permitirá hallar directamente la solución básica factible inicial.

El método lo comenzamos en la celda de la esquina noroeste (variable x_{A1}) correspondiente a una ruta.

Gráfico 3.3.

Primera Asignación.

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	120 **400**	130	41	62	500 **100**
(B)Babahoyo	61	40	100	110	700
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42	800
DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

El destino Quito solicita 400 cajas, y Machala oferta 500, por lo que se cubre la demanda total de Quito, pudiendo todavía Machala ofertar 100 más(gráfico 3.3). Lo mismos que son ofertados al siguiente demandante que es Bogotá(gráfico 3.4.).

Gráfico 3.4.

Segunda Asignación.

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	120 400	130 100	41	62	500 ~~100~~ 0
(B)Babahoyo	61	40 700	100	110	~~700~~ 0
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42	800
DEMANDAS	~~400~~ 0	~~900~~ 100	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Babahoyo le oferta la totalidad de los 700 que tiene, pero aún faltan 100 más para poder cubrir la demanda de Bogotá que son 900(gráfico 3.4.).

Gráfico 3.5.

Tercera Asignación.

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	120 400	130 100	41	62	500 ~~100~~ 0
(B)Babahoyo	61	40 700	100	110	~~700~~ 0
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42	~~800~~ 700
DEMANDAS	~~400~~ 0	~~900~~ ~~100~~ 0	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Los 100 que todavía le faltan a Bogotá, se los suministra Esmeraldas. Teniendo todavía para ofertar Esmeraldas 700(gráfico 3.5.).

Gráfico 3.6.

Cuarta asignación. Solución inicial factible.

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	120 400	130 100	41	62	500 ~~100~~ ~~0~~
(B)Babahoyo	61	40 700	100	110	~~700~~ ~~0~~
(C)Esmeraldas	102.50	90 100	122 200	42 500	~~800~~ ~~700~~ ~~500~~ ~~0~~
DEMANDAS	~~400~~ ~~0~~	~~900~~ ~~100~~ ~~0~~	~~200~~ ~~0~~	~~500~~ ~~0~~	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Esmeraldas ahora oferta 700, Santiago que está a continuación requiere de 200, con lo que Esmeraldas cubre la totalidad quedando solamente con 500, los cuales se los oferta a Buenos Aires, cubriendo la totalidad de la demanda requerida (gráfico 3.6.). La función objetivo de acuerdo con las rutas halladas es (tabla 3.4):

Tabla 3.4.

Calculo función objetivo

rutas	**cajas**	**Costo por caja ($)**	**Costo ($)**
X_{A1}	400	120	48000
X_{A2}	100	130	13000
X_{B2}	700	40	28000
X_{C2}	100	90	9000
X_{C3}	200	122	24400
X_{C4}	500	42	21000
Costo Total			$143400

Nota: gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)

Un modelo de transporte general con ***m*** orígenes y ***n*** destinos tiene ***(m+n)*** ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda) una de las ecuaciones es superflua, por lo que el modelo se reduce a **(*m*+*n*-1)** ecuaciones independientes.

En este problema tenemos m=3 orígenes y n=4 destinos, por lo que el número de variables básicas será:

(*m*+*n*-1) =3+4-1=6 variables básicas.

El número de variables que da el cuadro de la figura6. Son 6: X_{A1}, X_{A2}, X_{B2}, X_{C2}, X_{C3}, X_{C4}. Estas rutas corresponden a las variables básicas.

Esto indica que la solución inicial básica factible no es degenerada.

Con el método de la esquina noroeste La función objetivo arroja un valor de $143400 dólares. Este no es el valor optimo, es un valor factible inicial. Para obtener la solución óptima utilizaremos el método de los multiplicadores, utilizando la solución factible inicial hallada con el método de la esquina noroeste.

3.6.-CONCLUCIONES

Como podemos ver este método se caracterizará por ser sencillo y fácil de realizar, No tiene en cuenta los costos para hacer las asignaciones, pero por lo general siempre nos deja lejos de la solución óptima.

3.7.-CUESTIONARIO

3.7.1.-VERDADERO-FALSO

1. Si todas las ofertas, demandas y costos de transporte de un modelo de transporte tienen valores enteros entonces su solución también lo tiene. (V) (F)
2. Se incluye un origen ficticio de costo cero, cuando la demanda es menor que la oferta. (V) (F)
3. Para un problema de transporte el método de la esquina noroeste nos da la solución óptima. (V) (F)
4. El iniciar el proceso en la celda superior-izquierda de la tabla de transporte es la que da el nombre al método esquina noroeste. (V) (F)
5. Es el método de la esquina noroeste, el único método para hallar una solución factible básica inicial de un problema de transporte. (V) (F)

3.7.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

6.- El método de la esquina noroeste es usado para:

a.-Hallar la solución básica factible inicial.

b.-Hallar una solución optima

c.-Se respalda en la solución de minimización de costos de oportunidad.

d. Todas las anteriores

7.- En un ejercicio de transporte la degeneracion sucede cuando:

a.-La oferta es superada por la demanda

b.-son utilizadas menos de (m+n-1) celdas

c.-Es un caso especial del modelo de transporte

d.-Nada de lo anterior

3.7.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

8.- En la siguiente tabla de transporte, por medio de el metodo de la esquina noroeste halle la solucion basica factible inicial.

		DESTINO			OFERTA
		1	2	3	
FUENTES	A	41	45	40	500
	B	31	29	38	400
	C	46	36	35	600
DEMANDA		600	700	200	

9.- En la siguiente tabla de transporte, por medio de el metodo de la esquina noroeste

halle la solucion basica factible inicial.

		DESTINO			OFERTA
		1	2	3	
FUENTES	A	10	8	4	45
	B	9	5	7	50
	C	3	6	9	45
	D	5	7	6	30
DEMANDA		90	30	50	

3.8.-GLOSARIO

Algoritmo esquina noroeste:

Algoritmo que se usa para encontrar una solución inicial factible para problema de transporte en el que se satisfaga la demanda y se agote la oferta en un orden prescrito.

Matriz de incidencia nodo-arco.

Formato de tabla para presentar los datos de las restricciones en un modelo de red. A cada uno de los arcos de la red corresponde una columna de la tabla. A cada nodo le corresponde una fila de la tabla.

Modelo de transporte.

Modelo de PL para encontrar la forma menos costosa de satisfacer demandas en *n* destinos con suministros de *m* orígenes.

Método de aproximación de Vogel:

Algoritmo que se usa para encontrar una solución inicial factible al problema de transporte mediante la consideración de "costos penales" de no usar la ruta disponible más barata.

PARTE 1. MODELO DE REDES - MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES

CAPITULO 4. MÉTODO MULTIPLICADORES

4.1.-OBJETIVOS

-Utilizar el resultado encontrado por el método de la esquina noroeste, para hallar la solución Óptima.

-Aplicar el algoritmo del método de los multiplicadores en un ejercicio prototípico.

-Comparar con los resultados obtenidos con SOLVER

--Usar OPERATIONAL RESEARCH en el teléfono celular

4.2.-INTRODUCCION

Después de obtener una solución factible básica inicial por medio del método de la esquina noroeste, iniciamos el siguiente paso que es el de apoyarnos en este resultado y en la creación de la tabla de transporte y comenzar a buscar la solución óptima.

Esto lo podríamos realizar a través de varios métodos (eslabón, de banquillo, de los multiplicadores), pero solo usaremos el método de los multiplicadores, el mismo que lo aplicaremos al problema prototípico ya iniciado, con la solución básica factible inicial dada por la esquina noroeste, y a su vez este resultado lo confirmaremos con los resultados encontrados con SOLVER, en anteriores temas tratados en este capítulo.

La aplicación OPERATIONAL RESEARCH es una herramienta ideal para aprender y practicar procedimientos de resolución de problemas de transporte, como el de la esquina noroeste y los multiplicadores.

Esta aplicación permite visualizar cada paso del proceso directamente en tu celular, lo que facilita la comprensión y el análisis detallado de los cálculos realizados.

Además, ofrece la posibilidad de comparar los resultados obtenidos manualmente con los generados por la aplicación,

Joseph-Louis Lagrange

Los métodos mencionados — Método del Eslabón, Método de Banquillo y Método de los Multiplicadores — están relacionados con la optimización y resolución de problemas en áreas como la programación lineal, la teoría de redes y la investigación de operaciones. Aunque no son tan ampliamente conocidos como otros métodos clásicos, tienen sus raíces en el desarrollo de técnicas matemáticas para la solución de problemas complejos en logística, redes y transporte.

A continuación, se detalla la historia del desarrollo de estos métodos:

1. Método del Eslabón

Descripción del método

El Método del Eslabón es una técnica utilizada para resolver problemas de optimización en redes, como el problema del camino más corto o el problema de flujo máximo. Se basa en construir soluciones paso a paso, conectando "eslabones" o nodos de una red para formar rutas o flujos.

Historia del desarrollo

Este método tiene sus raíces en la teoría de grafos, desarrollada inicialmente por Leonhard Euler en el siglo XVIII, y en la teoría de redes del siglo XX.

Fue formalizado en el contexto de la investigación de operaciones durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se buscaban métodos para optimizar rutas logísticas y de transporte.

Su desarrollo está vinculado a técnicas como el algoritmo de Dijkstra (1956), que también utiliza un enfoque de construcción paso a paso para encontrar el camino más corto en una red.

El nombre "eslabón" hace referencia a la idea de conectar elementos individuales (nodos y arcos) para formar una solución completa.

Aplicaciones históricas

Optimización de rutas de transporte y logística.

Diseño de redes de telecomunicaciones y distribución de energía.

2. Método de Banquillo

Descripción del método

El Método de Banquillo es una técnica heurística utilizada en problemas de asignación y optimización, especialmente en contextos donde se requiere probar diferentes combinaciones de soluciones. Se basa en mantener un "banquillo" o conjunto de posibles soluciones candidatas que se evalúan y mejoran iterativamente.

Historia del desarrollo

Este método surgió como una extensión de las técnicas de prueba y error utilizadas en problemas de asignación y programación.

Fue desarrollado en el contexto de la programación heurística en la década de 1960, cuando los investigadores buscaban soluciones aproximadas para problemas grandes que no podían resolverse de manera exacta debido a limitaciones computacionales.

El término "banquillo" proviene de la analogía con los deportes, donde los jugadores en el banquillo están listos para entrar al juego si se considera que pueden mejorar el rendimiento del equipo.

Aplicaciones históricas

Resolución de problemas de asignación en logística y transporte.

Optimización de horarios y recursos en la industria y servicios.

3. Método de los Multiplicadores

Descripción del método

El Método de los Multiplicadores es una técnica matemática utilizada en la programación lineal y la programación cuadrática. Se basa en el uso de multiplicadores (también conocidos como multiplicadores de Lagrange) para incorporar

lo que la convierte en un tutor virtual perfecto para practicar y reforzar conocimientos. Es una excelente opción para estudiantes y profesionales que deseen mejorar sus habilidades en investigación operativa de manera práctica y accesible.

Al final del capítulo desarrollamos un apéndice para aprender a utilizar

OPERATIONAL RESEARCH.

4.3.-ALGORITMO MÉTODO MULTIPLICADORES

De acuerdo con *(Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

Primero determinaremos que el número de celdas asignadas de la solución

sea igual a ***m+n-1,*** donde ***m***, número de orígenes y ***n***, número de destinos,

si este número es menor agregue épsilon encerradas en un círculo,

dependiendo del número faltante para igualar a ***m+n*-1**.

El método confirmará si la solución actual puede mejorarse examinando las variables no básicas actuales (casilleros vacíos), comprobándolo en el valor de la función objetivo si existe una de esas variables, esta será la que entra, en cuyo caso una de las variables básicas actuales debe abandonar la solución (al igual que en el método simplex).

Con la finalidad de determinar la variable que entra y la que sale, se identifica un circuito cerrado para cada variable no básica. Este circuito comenzará y terminará con la variable no básica designada. Un circuito consiste en líneas horizontales y verticales sucesivas (enlazadas) cuyos puntos extremos deben ser variables básicas (casilleros llenos),

excepto para las 2 líneas de inicio y finalización en la variable no básica.

las variables no básicas se evalúan en cada iteración. Para cada fila i existen multiplicadores con la variable ui; similarmente para cada columna j existen multiplicadores con la variable vj. Esto lo desarrollaremos paso a paso en el siguiente ejercicio prototípico (FLORES TROPICALES).

4.4.-EJERCICIO PROTOTÍPICO FLORES TROPICALES.

Flores tropicales es una industria florícola, que tiene tres zonas de cultivo en ciudades costeras del país (Machala, Babahoyo y Esmeraldas), distribuye a cuatro ciudades (Quito, Bogotá, Santiago, Buenos Aires), Las oferta en (cajas) y la demanda igualmente en (cajas), se simplifican en la tabla modelo de transporte indicada en el grafico 2. En la misma los costos de transporte se colocan en un casillero en la esquina superior de cada casillero.

Tabla 4.1.

Demanda Flores

Ciudad	**Cantidad(cajas)**
Quito	400
Bogotá	900
Santiago	200
Buenos Aires	500

Nota: *tabla elaboración propia*

3. Método de los Multiplicadores

Descripción del método

El Método de los Multiplicadores es una técnica matemática utilizada en la programación lineal y la programación cuadrática. Se basa en el uso de multiplicadores (también conocidos como multiplicadores de Lagrange) para incorporar restricciones en un problema de optimización.

Historia del desarrollo

Este método tiene sus raíces en la teoría de Lagrange, desarrollada por el matemático francés Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII. Lagrange introdujo los multiplicadores como una forma de resolver problemas de optimización con restricciones.

En el siglo XX, el método fue adaptado a la programación lineal y cuadrática, especialmente en el contexto de la investigación de operaciones y la economía.

Durante la década de 1960, los multiplicadores de Lagrange se incorporaron en técnicas como el Método de Descomposición de Dantzig-Wolfe y el Método de Penalización, utilizados para resolver problemas grandes y complejos.

El Método de los Multiplicadores Aumentados (una extensión del método original) fue desarrollado en la década de 1970 y se utiliza ampliamente en optimización no lineal.

Aplicaciones históricas

Optimización de sistemas económicos y logísticos.

Diseño de redes de transporte y telecomunicaciones.

Resolución de problemas de equilibrio general en economía.

Relación entre los métodos y su evolución

Aunque estos métodos tienen diferentes enfoques y aplicaciones, todos forman parte de la evolución de las técnicas de optimización en la investigación de operaciones y la teoría de redes. Su desarrollo estuvo impulsado por:

Tabla 4.2.

Oferta Flores

Ciudad	**Cantidad(cajas)**
Machala	500
Babahoyo	700
Esmeraldas	800

Nota: *tabla elaboración propia*

El costo de transporte se indica en la tabla 4.3.

Tabla 4.3.

Costo de transporte en dólares por caja

Del origen	**Al destino**			
	(1) Quito	**(2) Bogotá**	**(3) Santiago**	**(4) Buenos Aires**
(A) Machala	120	130	41	62
(B)Babahoyo	61	40	100	110
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42

Nota: *tabla elaboración propia*

El origen lo denotaremos con letras **(A, B, C)** y los destinos con números **(1,2,3,4)**.

X_{ij} cantidad de cajas enviadas

***i* _ A, B, C**

***j* _ l, 2, 3, 4**

función objetivo, se vuelve

$$Z(\text{Min}) = 120X_{A1} + 130X_{A2} + \ldots + 42X_{C4}$$

Sujeto a:

Restricciones de oferta

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} \leqslant 500$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} \leqslant 700$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} \leqslant 800$$

Restricciones de demanda

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \geq 400$$
$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \geq 900$$
$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \geq 200$$
$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} \geq 500$$
$$X_{IJ} \geq 0$$

Gráfico 4.1.

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	400 120	100 130	41	62	500
(B)Babahoyo	61	700 40	100	110	700
(C)Esmeraldas	102.50	100 90	200 122	500 42	800
DEMANDAS	400	900	200	500	

Solución inicial factible dada por método ESQUINA NOROESTE.

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

La función objetivo de acuerdo con las rutas halladas es(tabla4):

Relación entre los métodos y su evolución

Aunque estos métodos tienen diferentes enfoques y aplicaciones, todos forman parte de la evolución de las técnicas de optimización en la investigación de operaciones y la teoría de redes. Su desarrollo estuvo impulsado por:

La necesidad de resolver problemas logísticos y de transporte durante y después de la Segunda Guerra Mundial.

El avance de las matemáticas aplicadas y la programación lineal en el siglo XX.

La creciente capacidad computacional, que permitió implementar métodos más complejos y eficientes.

Importancia histórica y actual

Estos métodos reflejan la evolución de las técnicas de optimización desde enfoques manuales y heurísticos hasta métodos matemáticos formales.

Siguen siendo relevantes en campos como la logística, la economía y la ingeniería, aunque en muchos casos han sido reemplazados por algoritmos computacionales más avanzados.

Su estudio es fundamental para comprender la historia de la optimización y su impacto en la toma de decisiones en sistemas complejos.

En resumen, los Métodos del Eslabón, de Banquillo y de los Multiplicadores representan diferentes enfoques para abordar problemas de optimización, cada uno con su propia historia y aplicaciones específicas en el contexto de la investigación de operaciones y la teoría de redes.

Industria de la energía

Empresa: British Petroleum (BP)

Problema: Optimización de redes de distribución de petróleo y gas.

Aplicación: En la década de 1970, BP utilizó el Método de los Multiplicadores Aumentados para resolver problemas relacionados con la distribución eficiente de productos derivados del petróleo entre refinerías y centros de distribución. La técnica permitió incorporar restricciones complejas, como capacidades de transporte, costos y demandas regionales, en un modelo matemático.

Impacto: Reducción significativa de los costos operativos y mejora en la eficiencia de las rutas de transporte.

Tabla 4.4.

Calculo función objetivo dado por método ESQUINA NOROESTE

rutas	cajas	Costo por caja ($)	Costo ($)
X_{A1}	400	120	48000
X_{A2}	100	130	13000
X_{B2}	700	40	28000
X_{C2}	100	90	9000
X_{C3}	200	122	24400
X_{C4}	500	42	21000
Costo Total			$143400

Nota: *tabla elaboración propia*

En base al cuadro de transporte dado por la solución entregada por el método de la esquina noroeste(gráfico 4.1.), vamos a hallar la solución óptima a través del método de los Multiplicadores.

Explicación del método de los multiplicadores con el método simplex *La relación entre el método de los multiplicadores y el método simplex puede explicarse con base en las relaciones primal-dual. Por la estructura especial de la programación lineal que representa el modelo de transporte, el problema dual asociado se escribe como sujeto a ui y vj (*Taha, H. A. 2017, *p.199*).

La relación entre el método de los multiplicadores y el método simplex puede explicarse con base en las relaciones primal-dual.

Por la estructura especial de la programación lineal que representa el modelo de transporte el problema dual asociado se escribe como:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

Sujeto a:

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij}, \text{ para toda i y j}$$

$$u_i \text{ y } v_j \text{ irrestricta}$$

Donde:

a_i = Oferta en el origen i

b_j = demanda en el destino j

c_{ij} = Costo de transporte por unidad del origen i al destino j

u_i = Variable dual de la restriccion asociada con el origen i

v_j = Variable dual de la restriccion asociada con el destino j

En cualquier iteración simplex, el coeficiente de x_j en la ecuación objetivo (costo reducido) se calcula como sigue:

Cálculos con la fila **z** objetivo:

$$\begin{matrix}\textit{Coeficientede la variable } x_1 \\ \textit{en la ecuacion z primal}\end{matrix} = \begin{matrix}\textit{Lado izquierdo de} \\ \textit{la restriccion dual } j-\textit{esima}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{Lado derecho de la} \\ \textit{restriccion dual } j-\textit{esima}\end{matrix}$$

los coeficientes de la función objetivo (costos reducidos) de la variable X_{ij} son iguales a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la restricción dual correspondiente; es decir,

$$u_i + v_j - c_{ij}$$

Sin embargo, sabemos que esta cantidad debe ser igual a cero para cada variable básica, lo que produce el siguiente resultado:

$$u_i + v_j = cij \text{ para cada variable basica } x_{ij}$$

Como hay ***m+n-1*** ecuaciones como esas cuya solución (después de suponer un valor arbitrario ($u1$=0) dan por resultado los multiplicadores u_i y v_j. Una vez calculados estos multiplicadores, se realiza la prueba de optimalidad hallando su costo marginal:

Costo marginal celdas no básicas=elJ= $u_i + v_j - c_{ij}$

para cada celda no básica, se escoge la que tenga el valor más positivo, ya que es la que da una función objetivo con un costo menor reflejado en el dual.

Industria de telecomunicaciones

Empresa: AT&T

Problema: Diseño y optimización de redes de telecomunicaciones.

Aplicación: Durante las décadas de 1960 y 1970, AT&T utilizó el Método de los Multiplicadores en problemas de diseño de redes de larga distancia. Esto incluía la optimización del flujo de información a través de múltiples nodos y la asignación eficiente de recursos en redes telefónicas.

Impacto: El método ayudó a minimizar costos operativos y a garantizar un servicio más confiable, incluso con restricciones de capacidad en los nodos y enlaces de la red.

Comenzamos hallando los multiplicadores con la Solución inicial factible dada por método ESQUINA NOROESTE (gráfico 4.1.), esto lo detallamos en la (tabla 4.5.).

Tabla 4.5.

Valores multiplicadores celdas básicas tabla inicial (ESQUINA NOROESTE)

RUTA A SER USADA	COSTO POR CAJA	ECUACION CELDA BASICA
X_{A1}	120	$u_A + v_1 = 120$
X_{A2}	130	$u_A + v_2 = 130$
X_{B2}	40	$u_B + v_2 = 40$
X_{C2}	90	$u_C + v_2 = 90$
X_{C3}	122	$u_C + v_3 = 122$
X_{C4}	42	$u_C + v_4 = 42$

Nota: *tabla elaboración propia*

Con 6 ecuaciones y 7 variables (u_A, u_B, u_C, v_1, v_2, v_3, v_4), podemos solucionarlos dando un valor inicial a u_A de cero. Obteniendo:

$u_A + v_1 = 120$ reemplazando $0 + v_1 = 120$ por lo que $v_1 = 120$

$u_A + v_2 = 130$ reemplazando $0 + v_2 = 130$ por lo que $v_2 = 130$

$u_B + v_2 = 40$ reemplazando $u_B + 130 = 40$ por lo que $u_B = -90$

$u_C + v_2 = 90$ reemplazando $u_C + 130 = 90$ por lo que $u_C = -40$

$u_C + v_3 = 122$ reemplazando $-40 + v_3 = 122$ por lo que $v_3 = 162$

$u_C + v_4 = 42$ reemplazando $-40 + v_4 = 42$ por lo que $v_4 = 82$

Con estos valores calcularemos los costos marginales de las celdas no básicas.

costo marginal celdas no básicas

$e_{A3} = u_A + v_3 - c_{A3} = 0 + 162 - 41 = 121$

$e_{A4} = u_A + v_4 - c_{A4}$ **= 0+82- 62 = 20**

$e_{B1} = u_B + v_1 - c_{B1}$ **= -90+120- 61 =-31**

$e_{B3} = u_B + v_3 - c_{B3}$ **= -90+162 - 100= -28**

$e_{B4} = u_B + v_4 - c_{B4}$ **= -90+82 - 110 = -118**

$e_{C1} = u_C + v_1 - c_{C1}$ **=-40+120 -102.5=-22.5**

Los valores de los costos marginales nos dan dos cantidades positivas, e_{A3} y e_{A4}, escogemos la de mayor valor positivo: e_{A3}. Que da la mayor reducción de costos. (gráfico 4.2)

Gráfico 4.2.

Cuadro inicial ESQUINA NOROESTE costos marginales variables no básicas

	vj	v1=120	v2=130	v3=162	v4=82	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=0	(A) Machala	400 120	100 130	41 eA3=121	62 EA4=20	500
uB=-90	(B)Babahoyo	61 EB1=-31	700 40	100 eB3=-28	110 EB4=-118	700
uC=-40	(C)Esmeraldas	102.50 EC1=-22.5	100 90	200 122	500 42	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Transporte y logística

Empresa: FedEx

Problema: Planificación de rutas de transporte y distribución.

Aplicación: En la década de 1980, FedEx utilizó el Método de los Multiplicadores para optimizar su red de transporte aéreo y terrestre. El método permitió resolver problemas de asignación de carga y rutas, considerando restricciones como capacidades de los aviones, horarios y costos operativos.

Impacto: FedEx logró reducir tiempos de entrega y costos, consolidándose como líder en el sector de logística y transporte rápido.

eA3 corresponde a la variable X_{A3}, que es la variable no básica que pasa a ser básica, tenemos que reconfigurar el recorrido para no desbalancear el sistema oferta-demanda, y permanecer dentro de una solución básica factible(fig.3). Dentro de este nuevo recorrido, las cantidades de cajas en los puntos indicados negativos, X_{A2} y X_{C3}. Son:

X_{A2}**=100**

X_{C3}**=200**

Escogemos el valor menor (=100) y restándoselas y sumándoselas a las celdas del recorrido, tenemos:

X_{A2}**=100-100=0**

X_{C2}**=100+100=200**

X_{C3}**=200-100=100**

X_{A3}**=0=100**

Esto lo vemos en el gráfico 4.4.

Industria del petróleo y gas

Empresa: Shell

Problema: Optimización en la mezcla de combustibles.

Aplicación: Shell utilizó el Método de los Multiplicadores para resolver problemas de mezcla de combustibles, maximizando la calidad del producto final mientras se cumplían restricciones de costos y disponibilidad de materias primas.

Impacto: Mejora en la eficiencia de las operaciones y en la calidad de los productos, reduciendo costos de producción.

Gráfico 4.3.

Cuadro costos marginales establecimiento recorrido primera iteración.

	vj	v1=	v2=	v3=	v4=	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=	(A) Machala	120 / 400	130	41 / 100	62	500
uB=	(B)Babahoyo	61	40 / 700	100	110	700
uC=	(C)Esmeraldas	102.50	90 / 200	122 / 100	42 / 500	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Industria manufacturera

Empresa: General Motors (GM)

Problema: Optimización de la producción en múltiples plantas.

Aplicación: En la década de 1970, GM empleó el Método de los Multiplicadores para resolver problemas de programación de producción en sus fábricas. Este método permitió a GM asignar eficientemente recursos (como mano de obra y maquinaria) entre diferentes plantas, considerando restricciones de capacidad y costos de transporte de materiales.

Impacto: Incremento en la productividad y reducción de costos de producción, lo que ayudó a GM a competir en el mercado global.

Gráfico 4.4.

Cuadro costos marginales celdas nueva solución básica factible primera iteración.

	vj	v1=120	v2=130	v3=160	v4=80	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=0	(A) Machala	400 120	100 130	+ 41 eA3=121	62 EA4=20	500
uB=-90	(B)Babahoyo	61 EB1=-31	700 40	100 e33=-30	110 EB4=-118	700
uC=-40	(C)Esmeraldas	102.50 EC1=-22.5	100 90 +	200 122 -	500 42	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

En el gráfico 4.4., primero analizamos el balance de oferta-demanda, manteniéndose su diferencia en cero:

Lo segundo es la degeneración del sistema:

m+n-1=3+4-1=6

que es igual al número de celdas (X_{A1}, X_{A3}, X_{B2}, X_{C2}, X_{C3}, X_{C4})

A este nuevo cuadro (gráfico 4.4.), le hacemos el análisis de costos marginales e_{ij} y c_{ij}, a través de los multiplicadores u_i y v_j (tabla6).

Tabla 4.6.

Ecuaciones multiplicadores celdas básicas primera iteración.

RUTA A SER USADA	COSTO POR CAJA	ECUACION CELDA BASICA
X_{A1}	120	$u_A+v_1= 120$
X_{A3}	41	$u_A+v_3 =41$
X_{B2}	40	$u_B+v_2 =40$
X_{C2}	90	$u_C+v_2 =90$
X_{C3}	122	$u_C+ v_3 =122$
X_{C4}	42	$u_C+ v_4 =42$

Nota: *tabla elaboración propia*

Transporte público

Empresa: SNCF (Ferrocarriles Nacionales de Francia)

Problema: Optimización de horarios y asignación de trenes.

Aplicación: SNCF utilizó el Método de los Multiplicadores para diseñar horarios de trenes y asignar recursos de manera eficiente, considerando restricciones como la capacidad de las vías, la demanda de pasajeros y los tiempos de mantenimiento.

Impacto: Mejora en la puntualidad y eficiencia del sistema ferroviario, aumentando la satisfacción del cliente.

Con 6 ecuaciones y 7 variables (u_A, u_B, u_C, v_1, v_2, v_3, v_4), podemos solucionarlos dando un valor inicial a u_A de cero. Obteniendo:

$u_A+v_1= 120$ reemplazando $0+v_1=120$ por lo que $v_1=120$

$u_A + v_3 =41$ reemplazando $0+v_3=41$ por lo que $v_3=41$

$u_B+v_2 =40$ reemplazando $u_B+9 =40$ por lo que $u_B=31$

$u_C+v_2 =90$ reemplazando $81+ v_2 =90$ por lo que $v_2= 9$

$u_C + v_3 =122$ reemplazando $u_C+ 41=122$ por lo que $u_C =81$

$u_C + v_4 =42$ reemplazando $81+v_4=42$ por lo que $v_4=-39$

Con estos valores calcularemos los costos marginales de las celdas no básicas.

costo marginal celdas no básicas

$e_{A2}= u_A+v_2 - C_{A2}= 0+9-130- = -121$

$e_{A4}= u_A+v_4 - c_{A4} =0-39-62=-101$

$e_{B1}= u_B+v_1- c_{B1} =31+120-61 = 90$

$e_{B3}= u_B+v_3 - c_{B3} = 31+41- 100 =-28$

$e_{B4}= u_B+v_4 - c_{B4} = 31-39 - 110 =-118$

$e_{C1}= u_C+v_1-$ FedEx $=81+120-102.5 =98.5$

Los valores de los costos marginales nos dan dos cantidades

	vj	v1=120	v2=9	v3=41	v4=-39	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=0	(A) Machala	120 400 -	130 eA2=-121	41 100 +	62 EA4=-101	500
uB=31	(B)Babahoyo	61 EB1=90	40 700	100 eB3=-28	110 EB4=-118	700
uC=81	(C)Esmeraldas	102.50 + EC1=98.5	90 200	122 100 -	42 500	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

positivas, e_{B1} y e_{C1}, escogemos la de mayor valor positivo: e_{C1}. Que da la mayor reducción de costos. (gráfico 4.5.).

Gráfico 4.5.

Cuadro costos marginales segunda iteración.

	vj	v1=120	v2=9	v3=41	v4=-39	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=0	(A) Machala	120 400	130 eA2=-121	41 100	62 EA4=-101	500
uB=31	(B)Babahoyo	61 EB1=90	40 700	100 eB3=-28	110 EB4=-118	700
uC=81	(C)Esmeraldas	102.50 EC1=98.5	90 200	122 100	42 500	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Gráfico 4.6.

Cuadro recorrido de balanceo oferta-demanda segunda iteración.

Tecnología y computación

Empresa: IBM

Problema: Diseño de sistemas distribuidos y balanceo de carga.

Aplicación: En la década de 1980, IBM utilizó el Método de los Multiplicadores para resolver problemas de asignación de tareas en sistemas distribuidos. Esto incluyó la optimización del uso de recursos computacionales en redes de servidores, considerando restricciones de capacidad y tiempos de respuesta.

Impacto: Mejora en el rendimiento de los sistemas distribuidos y reducción de costos operativos, sentando las bases para tecnologías modernas de computación en la nube.

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

e_{C1} corresponde a la variable x_{C1} , que es la variable no básica que pasa a ser básica, tenemos que reconfigurar el recorrido para no desbalancear el sistema, y permanecer dentro de una solución básica factible(gráfico 4.6.). Dentro de este nuevo recorrido, las cantidades de cajas en los puntos indicados negativos, x_{A1} y x_{C3}. Son:

x_{A1}**=400**

x_{C3}**=100**

Escogemos el valor menor (=100) y restándoselas y sumándoselas a las celdas del recorrido, tenemos:

x_{A1}**=400-100=300**

x_{A3}**=100+100=200**

x_{C3}**=200-100=100**

x_{A3}**=100+10=100**

Esto lo vemos en el gráfico 4.7.

Gráfico 4.7.

Cuadro resultados de la segunda iteración.

	vj	v1=	v2=	v3=	v4=	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=	(A) Machala	300 120	130	200 41	62	500
uB=	(B)Babahoyo	61	700 40	100	110	700
uC=	(C)Esmeraldas	100 102.50	200 90	122	500 42	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

En el *gráfico* 4.7., primero analizamos el balance de oferta-demanda, manteniéndose su diferencia en cero:

Lo segundo es la degeneración del sistema:

m+n-1 =3+4-1=6

que es igual al número de celdas (X_{A1}, X_{A3}, X_{B2}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C4})

A este nuevo cuadro (gráfico *4*.4.), le hacemos el análisis de costos marginales e_{ij} y , a través de los multiplicadores u_i y v_j (tabla 4.7.).

Tabla 4.7.

Ecuaciones multiplicadores celdas básicas de la primera iteración.

RUTA A SER USADA	COSTO POR CAJA	ECUACION CELDA BASICA
X_{A1}	120	$u_A + v_1 = 120$
X_{A3}	41	$u_A + v_3 = 41$
X_{B2}	40	$u_B + v_2 = 40$
X_{C1}	102.5	$u_C + v_1 = 102.5$
X_{C2}	90	$u_C + v_2 = 90$
X_{C4}	42	$u_C + v_4 = 42$

Nota: *tabla elaboración propia*

Con 6 ecuaciones y 7 variables (u_A, u_B, u_C, v_1, v_2, v_3, v_4), podemos solucionarlos dando un valor inicial a u_A de cero. Obteniendo:

$u_A + v_1 = 120$ reemplazando $0+v_1=120$ por lo que $v_1=120$

$u_A+v_3=41$ reemplazando $0+v_2=41$ por lo que $v_3=41$

$u_C+v_1=102.5$ reemplazando $u_C+120=102.5$ por lo que $u_C=-17.5$

$u_C + v_2 = 90$ reemplazando $-17.5+v_2=90$ por lo que $v_2=107.5$

$u_B + v_2 = 40$ reemplazando $u_B+107.5=40$ por lo que $u_B=-67.5$

$u_C + v_4 = 42$ reemplazando $-17.5+v_4=42$ por lo que $v_4=59.5$

Con estos valores calcularemos los costos marginales de las celdas no básicas.

costo marginal celdas no básicas

$e_{A2} = u_A + v_2 - C_{A2}$ **= 0+107.5- 130 =-22.5**

$e_{A4} = u_A + v_4 - c_{A4}$ **= 0+59.5- 62 =-2.5**

$e_{B1} = u_B + v_1 - c_{B1}$ **= -67.5+120 - 61 =-8.5**

$e_{B3} = u_B + v_3 - c_{B3}$ **= -67.5+41-100-=-126.5**

$e_{B4} = u_B + v_4 - c_{B4}$ **= -67.5+59.5-110 =-118**

ec3 = $u_C + v_3$ **- cc3= -17.5+41-102.5=-98.5**

Los valores de los costos marginales nos dan todos cantidades negativas, ya

no puede haber mayor reducción de costos. Se terminan las iteraciones.

Sector financiero

Empresa: Goldman Sachs

Problema: Optimización de portafolios de inversión.

Aplicación: En la década de 1990, Goldman Sachs utilizó una variante del Método de los Multiplicadores para resolver problemas de optimización de portafolios, maximizando el rendimiento esperado mientras se cumplían restricciones de riesgo y liquidez. Este enfoque permitió incorporar múltiples restricciones regulatorias y de mercado en sus modelos.

Impacto: Mejora en la gestión de riesgos y en el rendimiento de los portafolios de inversión, consolidando su posición como líder en servicios financieros.

Gráfico 4.8.

Cuadro costos marginales tercera iteración.

	vj	v1=120	v2=107.5	v3=41	v4=59.5	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=0	(A) Machala	300 120	130 eA2=-22.5	200 41	62 EA4=-2.5	500
uB=-67.5	(B)Babahoyo	61 EB1=-8.5	700 40	100 EB3=-126.5	110 EB4=-118	700
uC=-17.5	(C)Esmeraldas	100 102.50	200 90	122 EC3=-98.5	500 42	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

La función objetivo es:

Tabla 4.10.

solucion modelo de transporteFLORES TROPICALES con SOLVER - copia - Excel

Archivo Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisa

A1 Microsoft Excel 16.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$19	TOTAL TOTAL	121450	121450

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$9	(A) Machala (1) Quito	300	300	Continuar
$D$9	(A) Machala (2) Bogota	0	0	Continuar
$E$9	(A) Machala (3) Santiago	200	200	Continuar
$F$9	(A) Machala (4)Baires	0	0	Continuar
$C$10	(B)Babahoyo (1) Quito	0	0	Continuar
$D$10	(B)Babahoyo (2) Bogota	700	700	Continuar
$E$10	(B)Babahoyo (3) Santiago	0	0	Continuar
$F$10	(B)Babahoyo (4)Baires	0	0	Continuar
$C$11	(C)Esmeraldas (1) Quito	100	100	Continuar
$D$11	(C)Esmeraldas (2) Bogota	200	200	Continuar
$E$11	(C)Esmeraldas (3) Santiag	0	0	Continuar
$F$11	(C)Esmeraldas (4)Baires	500	500	Continuar

Informe de respuestas 1 | Hoja2

Calculo función objetivo

rutas	**cajas**	**Costo por caja ($)**	**Costo($)**
X_{A1}	300	120	36000
X_{A3}	200	41	8200
X_{B2}	700	40	28000
X_{C1}	100	102.5	10250
X_{C2}	200	90	18000
X_{C4}	500	42	21000

Nota: *tabla elaboración propia*

El costo mínimo para obtener es de $121450 dólares, con las rutas (X_{A1}, X_{A3}, X_{B2}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C4}).

Que es exactamente lo mismo que obtuvimos con la solución SOLVER

(Gráfico 2.5. Capítulo 2. Parte 1.).

Solución con SOLVER, FLORES TROPICALES.

Gráfico 2.5. Capítulo 2. Parte 1.

El nuevo recorrido será (gráfico 4.9.):

Gráfico 4.9.

Recorrido optimo

	vj	v1=	v2=	v3=	v4=	
ui	DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
uA=	(A) Machala	120 300	130	41 200	62	500
uB=	(B)Babahoyo	61	40 700	100	110	700
uC=	(C)Esmeraldas	102.50 100	90 200	122	42 500	800
	DEMANDAS	400	900	200	500	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

4.5.-CONCLUSIONES

El desarrollo de la aplicación a través del proceso de los multiplicadores permitió observar un proceso muy cercano a el método simplex, pero más directo. Las pruebas de optimalidad y factibilidad se expresaron normalmente en cada circuito. Y los resultados comparativos con SOLVER confirmaron su eficiencia. La rapidez del proceso a nivel informático es un poco más difícil observarlo, en problemas con un menor rango de rutas a analizar.

4.6.-CUESTIONARIO

4.6.1.-VERDADERO-FALSO

1. El método de los multiplicadores, solo se inicia si se tiene una solución básica factible. (V) (F)
2. Se debe verificar si la solución inicial obtenida es degenerada o no con la siguiente desigualdad: #filas + #columnas − 1 ≤ #celdas llenas. (V) (F)
3. Los coeficientes de la función objetivo (costos reducidos) de la variable X_{ij} son iguales a la diferencia

entre los lados izquierdo y derecho de la restricción dual correspondiente; es decir, $u_i + v_j - c_{ij}$. (V) (F)

4. El que haya m+n-1 ecuaciones igual al número de variables básicas X_{ij}, nos permite crear los multiplicadores u_i y v_j. (V) (F)
5. La prueba de optimalidad en el método de los multiplicadores se encuentra hallando su costo marginal: $\text{costo marginal celdas no basicas} = e_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ (V) (F)

4.6.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

6.- El valor inicial que se le puede dar al multiplicador u_i puede ser:

a.- u_i=0

b.- u_i=10

c.- u_i=2,25

d.-Cualquiera de los anteriores

7.- Cuando el **#*filas* + #*columnas* – 1 ≤ # Celdas llenas** no se cumple entonces para igualar tendremos que aumentar con Épsilon las:

a. Celdas llenas

b. Celdas vacías

c. Los multiplicadores u_i y v_j

d.-Todas las anteriores

4.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

8.- En la siguiente tabla de transporte, hallar la solucion óptima por el metodo de los multiplicadores

		DESTINO			OFERTA
		1	2	3	
FUENTES	A	9 [47]	[14]	[0]	9
	B	6 [17]	[18]	[0]	6
	C	[21]	7 [19]	[0]	7
	D	[30]	6 [31]	3 [0]	9
DEMANDA		15	13	3	

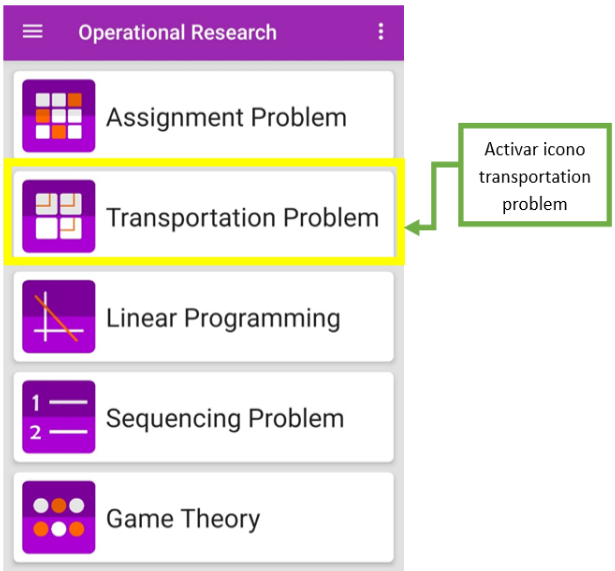
9.- En la siguiente tabla de transporte, hallar la solucion óptima por el metodo de los multiplicadores

		DESTINO			OFERTA
		1	2	3	
FUENTES	A	[450]	150 [350]	250 [300]	400
	B	50 [550]	150 [500]	[400]	200
	C	150 [700]	[650]	[550]	600
DEMANDA		200	300	250	

APENDICE OPERATIONAL RESEARCH

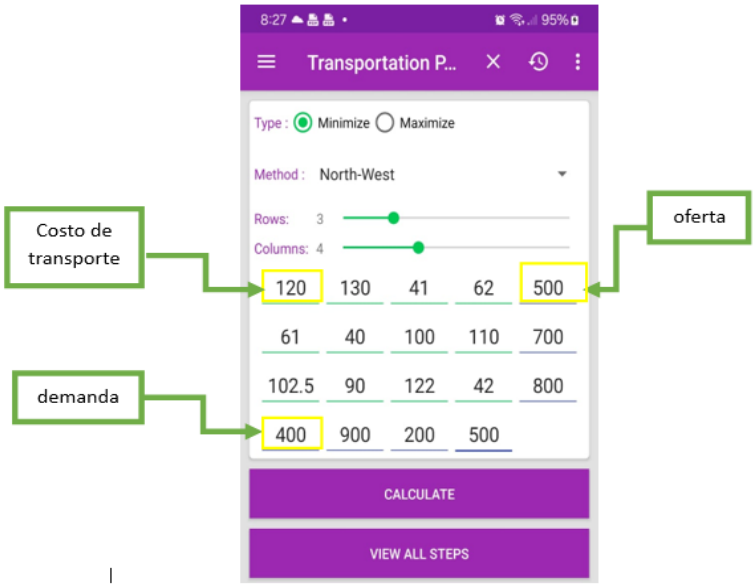
El siguiente es el procedimiento del uso de Operational Research:

1.-Activar el icono correspondiente a Transportation Problem.

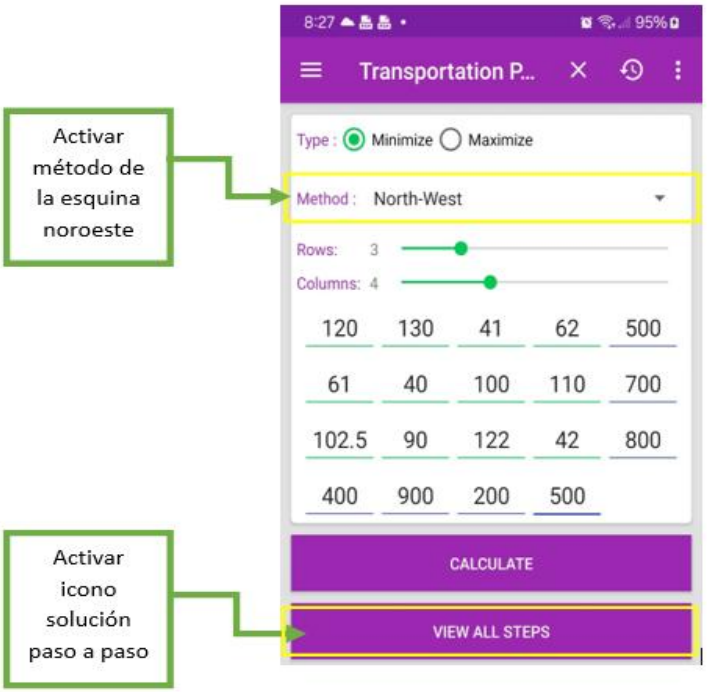


2.-Ingresar el modelo de transporte a ser resuelto.

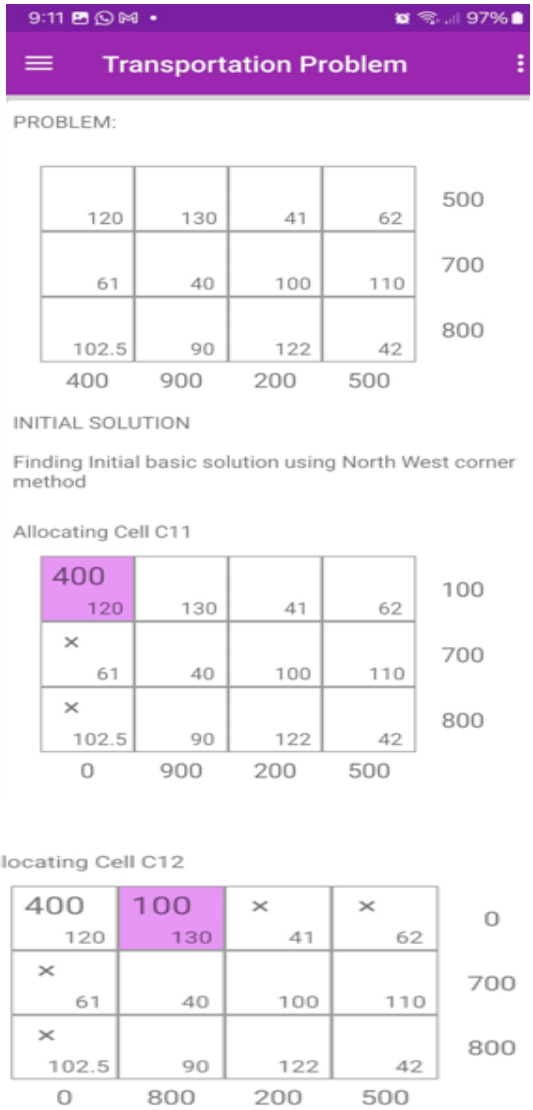
DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
(A) Machala	120	130	41	62	500
(B)Babahoyo	61	40	100	110	700
(C)Esmeraldas	102.50	90	122	42	800
DEMANDAS	400	900	200	500	

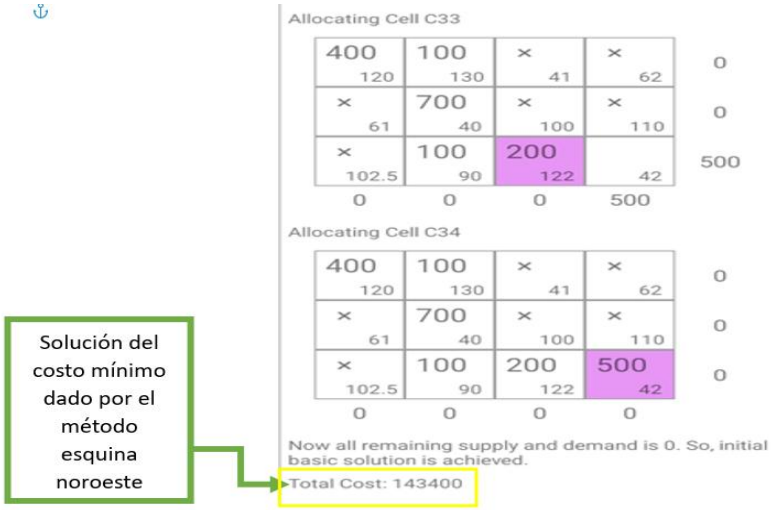


3.Activar solución paso por paso

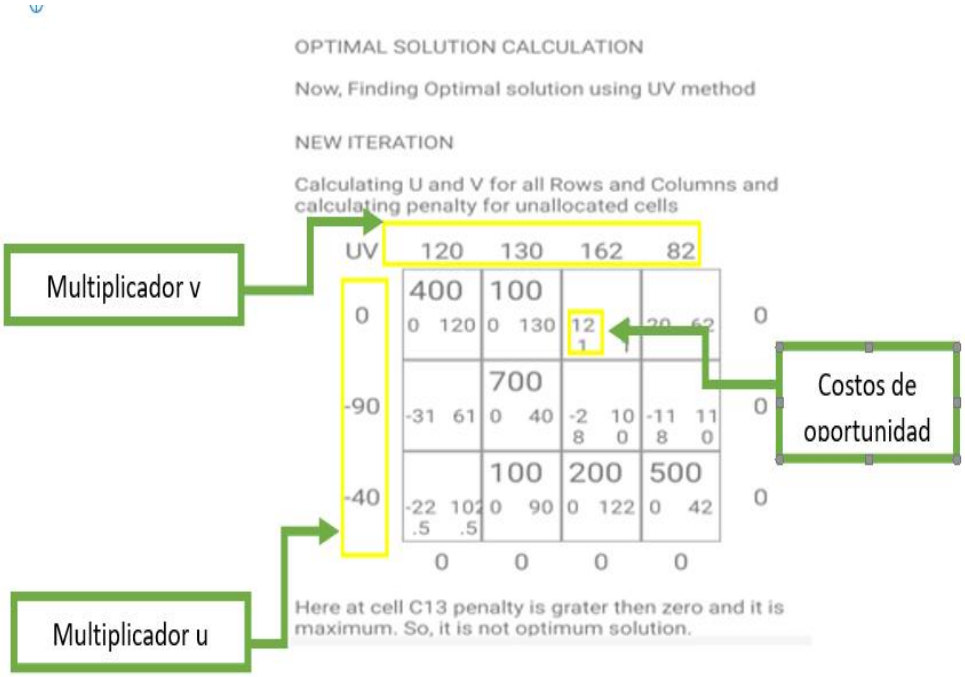


4.-Revisar la solución paso a paso. Primero obtenemos la solución básica factible, dada por el método de la esquina noroeste.

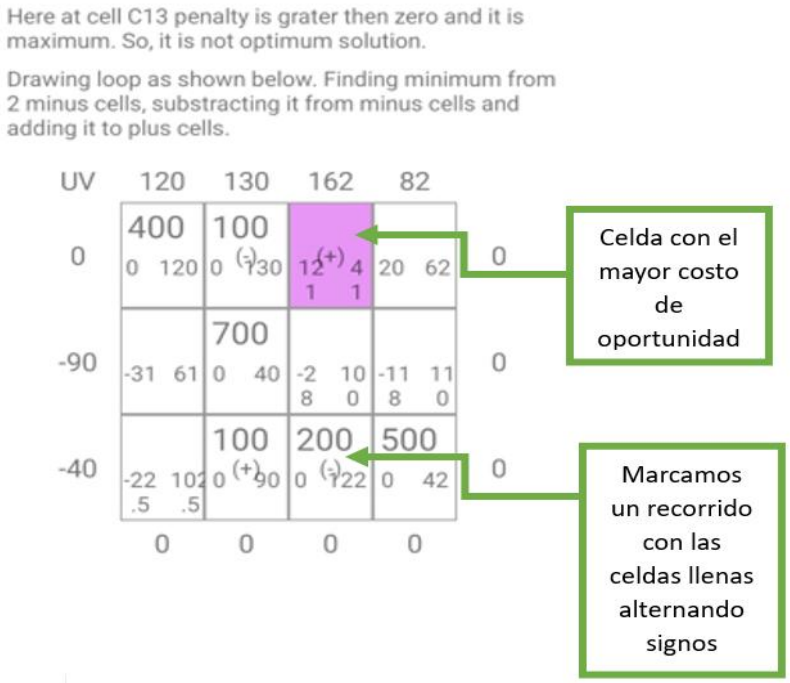




5.-Ahora iniciamos la revisión del método de los Multiplicadores.



6.-Encontramos la celda con el mayor costo de oportunidad, tomándola como celda pivote, y realizamos el mínimo lazo recorriendo todas las celdas llenas. Marcando con signos alternados.



7.-Con los signos alternados, y tomando las unidades ofertadas y demandadas creamos un nuevo recorrido balanceando nuevamente estos valores, para no alterar la relación oferta-demanda.

Modified matrix

400 120	 130	100 41	 62	0
 61	700 40	 100	 110	0
 102.5	200 90	100 122	500 42	0
0	0	0	0	

8.-Realizamos nuevamente el proceso de prueba de optimalidad y factibilidad. Hasta que todos los resultados de los costos de oportunidad sean negativos o ceros.

NEW ITERATION

Calculating U and V for all Rows and Columns and calculating penalty for unallocated cells

UV	120	9	41	-39	
0	400 0 120	-12 13 1 0	100 0 41	-10 6 1 2	0
31	90 61	700 0 40	-2 10 8 0	-11 11 8 0	0
81	98 102 .5 .5	200 0 90	100 0 122	500 0 42	0
	0	0	0	0	

Here at cell C31 penalty is grater then zero and it is maximum. So, it is not optimum solution.

Here at cell C31 penalty is grater then zero and it is maximum. So, it is not optimum solution.

Drawing loop as shown below. Finding minimum from 2 minus cells, substracting it from minus cells and adding it to plus cells.

UV	120	9	41	-39	
0	400 0 (-)120	-12 13 1 0	100 0 (+)41	-10 6 1 2	0
31	90 61	700 0 40	-2 10 8 0	-11 11 8 0	0
81	98 (+)102 .5 .5	200 0 90	100 0 (-)122	500 0 42	0
	0	0	0	0	

NEW ITERATION

Calculating U and V for all Rows and Columns and calculating penalty for unallocated cells

UV	120	107.5	41	59.5	
0	300 0 120	-22.5 130	200 0 41	-2.5 62	0
-67.5	-8.5 61	700 0 40	-126.5 100	-118 110	0
-17.5	100 0 102.5	200 0 90	-98.5 122	500 0 42	0
	0	0	0	0	

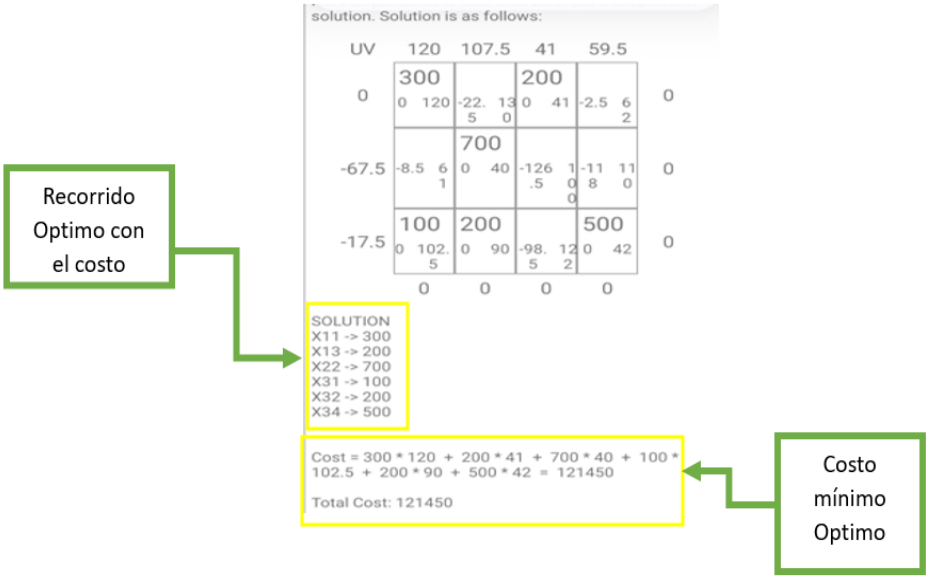
Here all penalties is less then zero. So, it is optimum solution. Solution is as follows:

Here all penalties is less then zero. So, it is optimum solution. Solution is as follows:

UV	120	107.5	41	59.5	
0	300 0 120	-22.5 130	200 0 41	-2.5 62	0
-67.5	-8.5 61	700 0 40	-126.5 100	-118 110	0
-17.5	100 0 102.5	200 0 90	-98.5 122	500 0 42	0
	0	0	0	0	

9.- Cuando todos los resultados de los costos de oportunidad sean negativos o ceros, obtenemos el recorrido y el costo

mínimo de transporte.



10.- El Método de los Multiplicadores es una herramienta importante en la programación lineal para optimizar funciones objetivo-relacionadas con el transporte. En este caso, el seguimiento detallado de las tablas y su comparación con los valores obtenidos previamente permite comprender mejor cómo funciona el método.

4.7.-GLOSARIO

Algoritmo:

Conjunto de pasos o instrucciones definidos para resolver un problema de manera sistemática.

Apéndice:

Sección adicional al final de un documento para proporcionar información complementaria.

Aplicación:

Programa informático diseñado para realizar tareas específicas, en este caso, relacionado con la investigación operativa.

Casillero:

Espacio en una tabla que contiene datos como costos, rutas o cantidades.

Celda:

Unidad básica de una tabla donde se almacenan datos o valores.

Circuito cerrado:

Ruta enlazada que comienza y termina en la misma celda, utilizada en métodos de optimización.

Comparar:

Proceso de analizar similitudes y diferencias entre dos resultados o métodos.

Costo marginal:

Incremento en el costo total derivado de añadir una unidad adicional a una solución.

Costo reducido:

Diferencia entre los lados izquierdo y derecho de una restricción dual en la función objetivo.

Demanda:

Cantidad requerida de un producto en un destino específico.

Degeneración:

Condición en un modelo de transporte donde el número de celdas básicas no es suficiente para mantener el balance entre oferta y demanda.

Destino:

Punto final al que se envían productos en un modelo de transporte.

Dual:

Problema asociado a un modelo de programación lineal que se utiliza para verificar la optimalidad de la solución.

Ecuación:

Expresión matemática que representa relaciones entre variables.

Esquina noroeste:

Método utilizado para encontrar una solución inicial factible en problemas de transporte.

Función objetivo:

Expresión matemática que se optimiza (maximiza o minimiza) en un problema de programación lineal.

Iteración:

Repetición de un conjunto de pasos en un algoritmo hasta alcanzar un resultado deseado.

Investigación operativa:

Disciplina que aplica modelos matemáticos y técnicas analíticas para optimizar procesos y tomar decisiones.

Método de los multiplicadores:

Algoritmo utilizado para optimizar problemas de transporte basado en relaciones primal-dual.

Método simplex:

Algoritmo de programación lineal utilizado para resolver problemas de optimización.

Modelo de transporte:

Representación matemática de un problema de distribución de recursos desde varios orígenes hacia múltiples destinos.

Multiplicadores:

Variables auxiliares que se utilizan en métodos de optimización para evaluar y mejorar soluciones.

Oferta:

Cantidad disponible de un producto en un origen específico.

Optimalidad:

Condición en la que una solución cumple con los criterios de ser la mejor posible en términos de la función objetivo.

Origen:

Punto inicial desde donde se envían productos en un modelo de transporte.

Prototípico

Ejemplo representativo utilizado para ilustrar un método o concepto.

Restricción:

Condición o limitación que debe cumplirse en un modelo matemático.

Rutas:

Caminos específicos entre orígenes y destinos utilizados para transportar productos.

SOLVER:

Herramienta informática utilizada para resolver problemas de optimización.

Tabla:

Representación gráfica de datos organizados en filas y columnas.

Transporte:

Proceso de mover productos desde un origen a un destino.

Variable básica:

Elemento de una solución inicial que cumple con las restricciones del modelo.

Variable no básica:

Elemento que no forma parte de la solución inicial, pero que puede entrar en la solución durante el proceso de optimización.

Valor óptimo (VO).

Forma abreviada para referirse al valor óptimo de la función objetivo

PARTE 1. MODELO DE REDES - MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES

CAPITULO 5. ASIGNACIÓN ALGORITO HUNGARO

5.1.-OBJETIVOS

-Desarrollar modelo matemático de programación lineal para un problema de asignación -resolver con SOLVER

-Aplicar Algoritmo Húngaro para resolver problemas de asignación

-Solucionar problema prototípico con SOLVER y Algoritmo Húngaro

-Verificar resultados

--Usar OPERATIONAL RESEARCH en el teléfono celular

5.2.-INTRODUCCION

El modelo de asignación es un caso singular de la programación lineal en el que los **adjudicados** son bienes(indivisibles) que se usaran en la ejecución de n **tareas**. Por ejemplo, los **adjudicados** pueden ser personal a quienes se les designa una labor. También puede ser herramientas, equipos o incluso temporadas a las que se les destinan recursos.

Para los problemas de transporte, llevamos el cuadro simplex a una adaptación más estilizada que la llamamos cuadro de transporte. En este nuevo modelo de asignación, solo utilizaremos los costos en el cuadro de transporte, ya que las asignaciones siempre son de uno(oferta) a uno(demanda), por lo que solo quedaremos con una tabla de asignación a la que denominaremos cuadro de costos (gráfico 5.1.).

Al ser los problemas de asignación un caso de programación lineal, este puede ser resuelto a través de SOLVER, por lo que el ejemplo prototípico a ser usado (ASIGNACION FLORES TROPICALES), será resuelto primero por el paquete SOLVER., teniendo de esta manera un patrón de resultados con los que

podremos confirmar el algoritmo HUNGARO, que es el que usaremos para resolver este mismo problema.

La aplicación * OPERATIONAL RESEARCH * es una herramienta educativa diseñada para facilitar el aprendizaje de procedimientos de resolución de problemas en investigación operativa. Entre las técnicas que se pueden practicar con esta aplicación se encuentran el método húngaro para problemas de asignación.

Una de las principales ventajas de esta aplicación es su capacidad para mostrar paso a paso el desarrollo de los cálculos, lo que permite a los usuarios comprender cada etapa del proceso de manera visual e interactiva. Esto resulta especialmente útil para estudiantes y profesionales que buscan reforzar sus conocimientos y habilidades en este campo. Además * OPERATIONAL RESEARCH * ofrece la posibilidad de comparar los resultados obtenidos manualmente con los generados por la herramienta. Esto no solo ayuda a verificar la precisión de los cálculos, sino que también actúa como un tutor virtual que guía al usuario en la correcta aplicación de los métodos.

Al final de este capítulo se incluye un apéndice detallado que explica cómo utilizar esta aplicación, haciendo énfasis en su funcionalidad para resolver problemas de asignación y transporte. Sin duda, es una opción práctica y accesible para quienes desean mejorar en investigación operativa.

5.3.-DESARROLLO

1) SOLUCION DE ASIGNACION CON SOLVER

Desarrollaremos primero el modelo matemático de programación lineal, según (Taha, 2017, pp 200-208) para luego incorporarlo en una página de Excel, estableceremos la estructura general para SOLVER, colocando las fórmulas de las celdas y solicitando los informes de resultados. Esto lo haremos a continuación para el ejercicio prototípico de FLORES TROPICALES, desarrollado a continuación.

5.3.1.-EJERCICIO PROTOTÍPICO FLORES TROPICALES CON SOLVER ASIGNACION PERSONAL CONTROL DE CALIDAD DE FLORES TROPICALES.

Flores tropicales Tiene sus oficinas principales en guayaquil, y desea asignar a sus cuatro principales directores, para que hagan control de calidad de sus productos durante dos semanas cada semestre en cada una de las principales ciudades a las que exportan sus flores (Quito, Bogotá, Santiago de chile y Buenos aires). Cada director tiene diferentes habilidades en el control de calidad para cada ciudad, y diferentes responsabilidades que afectan económicamente su traslado a cada una de las ciudades, esto se valora en la tabla5.1.

Tabla 5.1.

Costo de traslado en dólares para cada combinación director-ciudad

	Costo en miles de dólares			
DIRECTORES	**(1) Quito**	**(2) Bogotá**	**(3) Santiago**	**(4) Buenos Aires**
Director 1 (A)	24	10	21	11
Director 2 (B)	14	22	10	15
Director 3 (C)	15	17	20	19
Director 4 (D)	11	19	14	13

Nota: *tabla elaboración propia*

La asignación es de un solo director para una sola ciudad.

Solución:

El modelo matemático según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000) es:

X_{ij} = número de directores tipo *i* asignados a la ciudad *j*

i = A, B, C, D

j = 1, 2, 3, 4

Presentaremos este problema de asignación, utilizando el cuadro general de transporte(gráfico 5.1.), considerando que hay un solo director(oferta), y requiriendo un solo director en cada ciudad(demanda), cada celda especifica esta condición. Por lo que el sistema es balanceado.

Gráfico 5.1.

Cuadro de Transporte, llevado a cuadro de costos para el problema ASIGNACION FLORES TROPICALES.

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
Director 1(A)	24	10	21	11	1
Director 2(B)	14	22	10	15	1
Director3(C)	15	17	20	29	1
Director 4(D)	11	19	14	13	1
DEMANDAS	1	1	1	1	

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000) el modelo matemático es:

Modelo Matemático

Ecuaciones en forma canónica

Función objetivo:

$$Z(min)=24x_{A1}+10x_{A2}+21x_{A3}+11x_{A4}+14x_{B1}+22x_{B2}+10x_{B3}+15x_{B4}+15x_{C1}$$

$$+17x_{C2}+20x_{C3}+19x_{C4}+11x_{D1}+19x_{D2}+14x_{D3}+13x_{D4}$$

Funcion Objetivo a Minimizar

Función objetivo:

$Z(min)=24x_{A1}+10x_{A2}+21x_{A3}+11x_{A4}+14x_{B1}+22x_{B2}+10x_{B3}+15x_{B4}+15$
$+17x_{C2}+20x_{C3}+19x_{C4}+11x_{D1}+19x_{D2}+14x_{D3}+13x_{D4}$

SUJETO A:

$x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}<1$

$x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}<1$

$x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}<1$

$x_{D1}+x_{D2}+x_{D3}+x_{D4}<1$

$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}=1$

$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}=1$

$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}+x_{D3}=1$

$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}+x_{D4}=1$

SUJETO A:

$$X_{A1}+X_{A2}+X_{A3}+X_{A4}\leqslant 1$$

$$X_{B1}+X_{B2}+X_{B3}+X_{B4}\leqslant 1$$

$$X_{C1}+X_{C2}+X_{C3}+X_{C4}\leqslant 1$$

$$X_{D1}+X_{D2}+X_{D3}+X_{D4}\leqslant 1$$

$$X_{A1}+X_{B1}+X_{C1}+X_{D1}=1$$

$$X_{A2}+X_{B2}+X_{C2}+X_{D2}=1$$

$$X_{A3}+X_{B3}+X_{C3}+X_{D3}=1$$

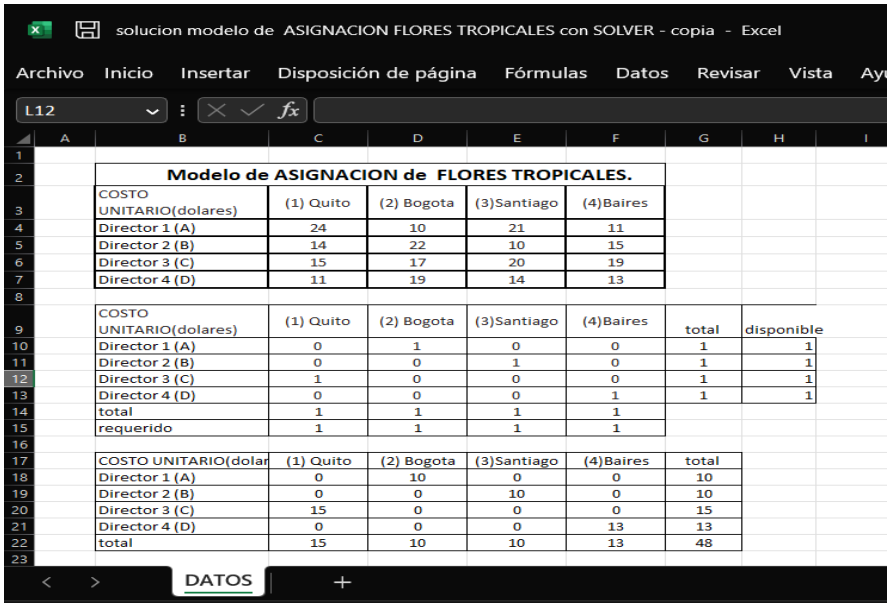
$$X_{A4}+X_{B4}+X_{C4}+X_{D4}=1$$

Solución con SOLVER.

Primero creamos la hoja en Excel para introducir los datos a SOLVER. (gráfico 5.2.), (tabla 5.2.).

Gráfico 5.2.

Hoja Excel, con información del problema de asignación de directores



Modelo de ASIGNACION de FLORES TROPICALES.				
COSTO UNITARIO(dolares)	(1) Quito	(2) Bogota	(3)Santiago	(4)Baires
Director 1 (A)	24	10	21	11
Director 2 (B)	14	22	10	15
Director 3 (C)	15	17	20	19
Director 4 (D)	11	19	14	13

COSTO UNITARIO(dolares)	(1) Quito	(2) Bogota	(3)Santiago	(4)Baires	total	disponible
Director 1 (A)	0	1	0	0	1	1
Director 2 (B)	0	0	1	0	1	1
Director 3 (C)	1	0	0	0	1	1
Director 4 (D)	0	0	0	1	1	1
total	1	1	1	1		
requerido	1	1	1	1		

COSTO UNITARIO(dolar	(1) Quito	(2) Bogota	(3)Santiago	(4)Baires	total
Director 1 (A)	0	10	0	0	10
Director 2 (B)	0	0	10	0	10
Director 3 (C)	15	0	0	0	15
Director 4 (D)	0	0	0	13	13
total	15	10	10	13	48

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

Tabla 5.2.

Ingreso datos problema asignación a SOLVER

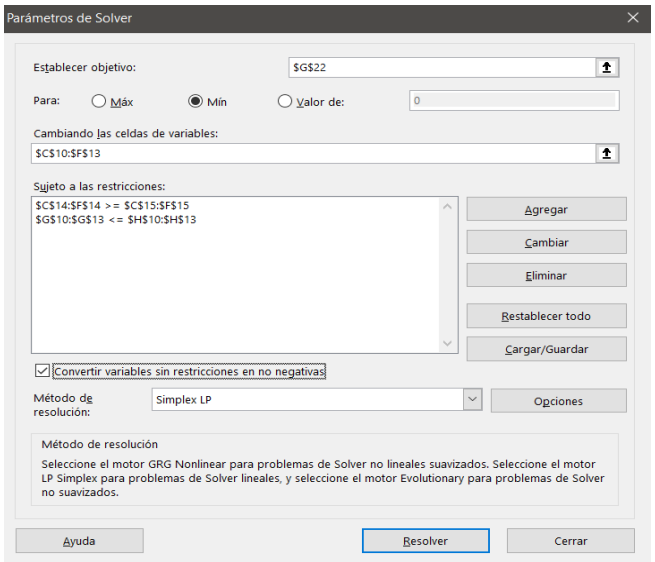
CELDA	FORMULA	COPIESE A:
C18	=C4*C10	C18:F21
G10	=SUMA(C10:F10)	G11:G13
C14	=SUMA(C10:C13)	D14:F14

Nota: *tabla elaboración propia*

Activamos SOLVER, e introducimos parámetros(gráfico 5.3.):

Gráfico 5.3.

Parámetros SOLVER



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

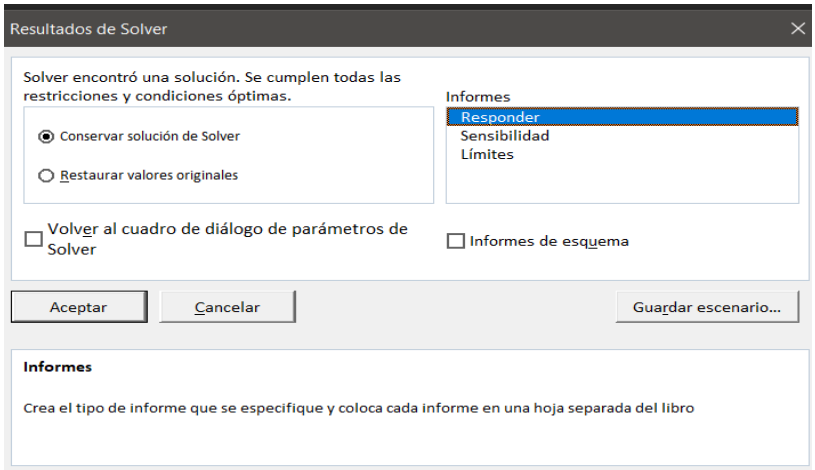
Ejecutamos RESOLVER de SOLVER (gráfico 5.4.):

Gráfico 5.4.

Solicitud de respuestas a SOLVER

Solucion del problema de Asignacion con SOLVER, indicando que es un problema de programacion lineal.

Luego se compara con los resultados dados por el metodo HUNGARO



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

El Algoritmo Húngaro, también conocido como el Método Húngaro, es un procedimiento matemático desarrollado para resolver problemas de asignación óptima en sistemas bipartitos. Su objetivo principal es encontrar una asignación óptima que minimice el costo total o maximice el beneficio total en problemas donde se deben asignar recursos o tareas a agentes de manera eficiente. A continuación, se presenta una exploración histórica del desarrollo y evolución de este algoritmo:

Orígenes del Algoritmo Húngaro

Problema de asignación:

El problema de asignación surge en la teoría de optimización como un caso especial de programación lineal. En este problema, se busca asignar un conjunto de tareas a un conjunto de agentes de manera que se minimice el costo total o se maximice el beneficio total.

Matemáticamente, el problema puede representarse como un problema de optimización en un grafo bipartito ponderado.

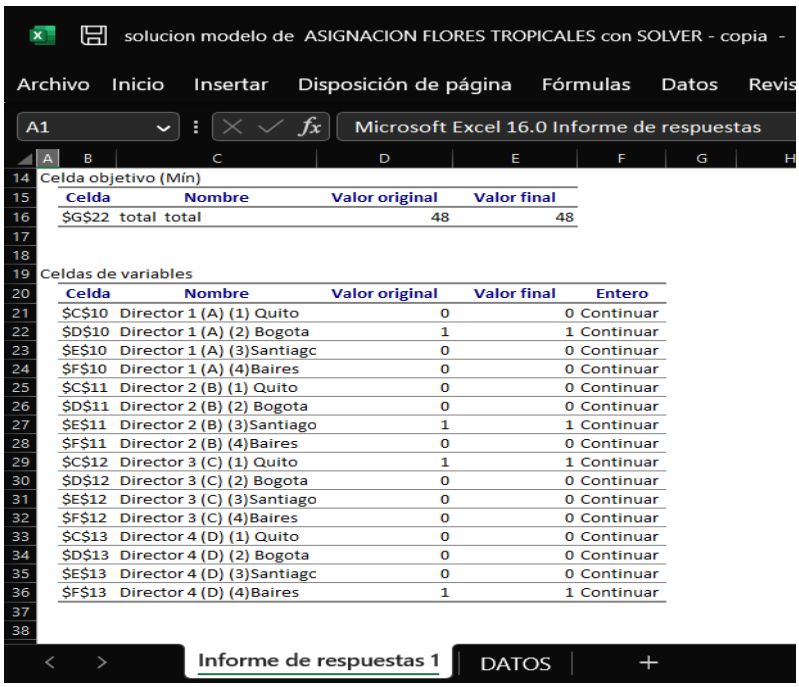
Contribuciones iniciales: El Algoritmo Húngaro fue introducido por el matemático **Harold W. Kuhn en 1955**, quien lo desarrolló basándose en los trabajos previos del matemático **húngaro Dénes Kőnig** (1931) y otros investigadores. De ahí proviene el nombre "húngaro".

Kuhn utilizó la teoría de grafos y el trabajo de Kőnig sobre emparejamientos máximos en grafos bipartitos para formular el algoritmo.

Obtenemos Informe de SOLVER (gráfico 5.5.).

Gráfico 5.5.

Informe resultados SOLVER.



Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$22	total total	48	48

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$10	Director 1 (A) (1) Quito	0	0	Continuar
$D$10	Director 1 (A) (2) Bogota	1	1	Continuar
$E$10	Director 1 (A) (3)Santiagc	0	0	Continuar
$F$10	Director 1 (A) (4)Baires	0	0	Continuar
$C$11	Director 2 (B) (1) Quito	0	0	Continuar
$D$11	Director 2 (B) (2) Bogota	0	0	Continuar
$E$11	Director 2 (B) (3)Santiago	1	1	Continuar
$F$11	Director 2 (B) (4)Baires	0	0	Continuar
$C$12	Director 3 (C) (1) Quito	1	1	Continuar
$D$12	Director 3 (C) (2) Bogota	0	0	Continuar
$E$12	Director 3 (C) (3)Santiago	0	0	Continuar
$F$12	Director 3 (C) (4)Baires	0	0	Continuar
$C$13	Director 4 (D) (1) Quito	0	0	Continuar
$D$13	Director 4 (D) (2) Bogota	0	0	Continuar
$E$13	Director 4 (D) (3)Santiagc	0	0	Continuar
$F$13	Director 4 (D) (4)Baires	1	1	Continuar

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

El informe indica que el costo mínimo con el que se puede hacer la asignación es de $48000 dólares. Con la siguiente distribución:

Asignación: **SUJETO A:**

$$X_{A1}+X_{A2}+X_{A3}+X_{A4} \leq 1$$

$$X_{B1}+X_{B2}+X_{B3}+X_{B4} \leq 1$$

Kuhn utilizó la teoría de grafos y el trabajo de Kőnig sobre emparejamientos máximos en grafos bipartitos para formular el algoritmo.

Desarrollo Histórico

Dénes Kőnig (1931):

Kőnig publicó un trabajo fundamental sobre teoría de grafos, donde presentó el Teorema de Kőnig, que establece que en un grafo bipartito, el tamaño del emparejamiento máximo es igual al tamaño del cubrimiento mínimo de vértices. Este teorema sentó las bases teóricas para el Algoritmo Húngaro.

Harold W. Kuhn (1955):

Kuhn formalizó el Algoritmo Húngaro en su artículo titulado "The Hungarian Method for the Assignment Problem".

En este trabajo, Kuhn adaptó el teorema de Kőnig y lo extendió para resolver problemas de asignación utilizando matrices de costos. Su método fue eficiente y práctico, convirtiéndose en una herramienta ampliamente utilizada en problemas de optimización.

James Munkres (1957):

El matemático James Munkres refinó el Algoritmo Húngaro, mejorando su eficiencia. Por esta razón, el algoritmo también es conocido como el Algoritmo de Munkres en algunos contextos.

Munkres demostró que el algoritmo tiene una complejidad de tiempo polinomial, específicamente [O(n^3)], donde [n] es el número de filas o columnas de la matriz de costos.

$X_{C1}+X_{C2}+X_{C3}+X_{C4} \leq 1$

$X_{D1}+X_{D2}+X_{D3}+X_{D4} \leq 1$

Director 1 a Bogotá.....X_{A2}

Director 2 a Santiago de Chile.....X_{B3}

Director 3 a Quito..... X_{C1}

Director 4 a Buenos Aires..... X_{D4}.

5.3.2.-SOLUCION DE ASIGNACION CON ALGORITMO METODO HUNGARO

De acuerdo con (Eppen, Gould y Schmidt, 1993), Para aplicar los

métodos de asignación como el método húngaro debemos verificar

primero que el problema cumpla con las siguientes características:

-Las ofertas deben ser iguales a 1.

-Las demandas deben ser iguales a 1.

-el objetivo será determinar qué origen asignar a cada destino.

-El cuadro de costos deberá ser cuadrado.

ALGORITMO HUNGARO

1. Construiremos un cuadro en donde las actividades estén al inicio de las filas y a quienes se le va a asignar al inicio de las columnas. ***El número de filas tiene que ser igual al número de columnas***; caso contrario se procede a aumentar una fila o columna ficticias con un valor de cero (0).

Munkres demostró que el algoritmo tiene una complejidad de tiempo polinomial, específicamente [O(n^3)], donde [n] es el número de filas o columnas de la matriz de costos.

Importancia y Aplicaciones

El Algoritmo Húngaro es un hito en la teoría de optimización y tiene aplicaciones en diversas áreas, tales como:

Asignación de recursos: Asignar trabajadores a tareas, máquinas a trabajos, o estudiantes a proyectos.

Logística: Optimizar rutas de transporte o distribución.

Reconocimiento de patrones: En visión por computadora, se utiliza para emparejar características entre imágenes.

Teoría de juegos: Resolver problemas de emparejamiento estable o asignación en mercados.

Evolución y Extensiones

Generalización del problema:

El Algoritmo Húngaro fue originalmente diseñado para problemas cuadrados (matrices de costos [n \times n], pero se ha extendido para manejar problemas rectangulares [m \times n] añadiendo filas o columnas ficticias con costos cero.

2. En este cuadro de costos original, tomaremos el mínimo de ***cada fila y lo restaremos*** de todos los elementos de dicha fila.
3. Tomaremos del resultado del paso anterior el mínimo de ***cada columna y lo restaremos*** a todos los elementos de la columna.
4. La asignación óptima serán aquellos ceros del cuadro resultante. Si no es posible
   obtener una adjudicación factible deberemos hacer lo siguiente:
   a) Cubriremos todos los ceros (0) en el cuadro de costos con el menor número de líneas horizontales y verticales que sea posible. Cada línea horizontal debe pasar por toda la fila y cada línea vertical debe pasar por toda la columna.
   b) Localizaremos el número ***menor*** que no esté cubierto con una línea en el cuadro de costos. Restaremos el valor de este número a cada elemento no cubierto con una línea, los valores cubiertos por las líneas quedan idénticos tal como están, excepto las intersecciones de las dos líneas que hay que sumar dicho número.
   c) Si no es posible encontrar una asignación factible regresar al paso número 2.
   Hasta cuando se cumpla la siguiente igualdad:

   (Número de líneas horizontales + Número de líneas verticales) = Número de filas. A continuación, aplicaremos este algoritmo al ejemplo prototípico de ASIGNACION DE FLORES TROPICALES

SOLUCIÓN CON ALGORITMO MÉTODO HÚNGARO.

ASIGNACION PERSONAL CONTROL DE CALIDAD DE FLORES TROPICALES.

Flores tropicales Tiene sus oficinas principales en guayaquil, y desea asignar a sus cuatro principales directores, para que hagan control de calidad de sus productos durante dos semanas cada semestre en cada una de las principales ciudades a las que exportan sus flores (Quito, Bogotá, Santiago de chile y Buenos aires). Cada director tiene diferentes habilidades en el control de calidad para cada ciudad, y diferentes responsabilidades que afectan económicamente su traslado a cada una de las ciudades, esto se valora en la tabla 5.3.

Tabla 5.3.

Costo de traslado en dólares para cada combinación director-ciudad

	Costo en miles de dólares			
DIRECTORES	**(1) Quito**	**(2) Bogotá**	**(3) Santiago**	**(4) Buenos Aires**
Director 1 (A)	24	10	21	11
Director 2 (B)	14	22	10	15
Director 3 (C)	15	17	20	19
Director 4 (D)	11	19	14	13

Nota: *tabla elaboración propia*

La asignación es de un solo director para una sola ciudad.

Mejoras en la eficiencia:

Con el tiempo, se han desarrollado algoritmos más rápidos y especializados para problemas similares, como el algoritmo de flujo máximo y el algoritmo de Edmonds-Karp.

Aplicaciones modernas:

Hoy en día, el Algoritmo Húngaro sigue siendo relevante en áreas como inteligencia artificial, aprendizaje automático y optimización combinatoria.

Resumen del Algoritmo

El Algoritmo Húngaro utiliza una matriz de costos y sigue una serie de pasos para encontrar la asignación óptima:

Reducir la matriz restando el menor valor de cada fila y columna.Cubrir los ceros con el menor número de líneas horizontales y verticales.

Ajustar los valores no cubiertos y repetir hasta encontrar una asignación óptima.

Este enfoque garantiza una solución óptima en tiempo polinomial, lo que lo hace eficiente incluso para problemas grandes.

En conclusión, el Algoritmo Húngaro es una herramienta poderosa que combina ideas de teoría de grafos y programación lineal. Su desarrollo histórico refleja la colaboración de matemáticos como Kőnig, Kuhn y Munkres, y su impacto sigue siendo significativo en la investigación y la práctica moderna.

Solución:

MODELO MATEMÁTICO

X_{ij} = número de directores tipo *i* asignados a la ciudad *j*

***i* _ A, B, C**
***j* _ I, 2, 3, 4**

Presentaremos este problema de asignación, utilizando el cuadro general de transporte(gráfico 5.6.), considerando que hay un solo director(oferta), y requiriendo un solo director en cada ciudad(demanda), cada celda especifica esta condición. Por lo que el sistema es balanceado.

Gráfico 5.6.

Cuadro de Transporte, llevado a cuadro de costos para el problema

DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
Director 1(A)	24	10	21	11	1
Director 2(B)	14	22	10	15	1
Director3(C)	15	17	20	29	1
Director 4(D)	11	19	14	13	1
DEMANDAS	1	1	1	1	

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000)*

Problemas de asignación en telecomunicaciones

Contexto histórico:

Durante el desarrollo de las redes de telecomunicaciones, surgió la necesidad de asignar frecuencias, canales o recursos de red de manera eficiente.

El Método Húngaro se utilizó para resolver estos problemas, garantizando una asignación óptima y evitando interferencias.

Ejemplo:

Asignar canales de comunicación a torres de transmisión para maximizar la cobertura y

ASIGNACION FLORES TROPICALES.

Función objetivo:

$$Z(min)=24x_{A1}+10x_{A2}+21x_{A3}+11x_{A4}+14x_{B1}+22x_{B2}+10x_{B3}+15x_{B4}+15x_{C1}$$

$$+17x_{C2}+20x_{C3}+19x_{C4}+11x_{D1}+19x_{D2}+14x_{D3}+13x_{D4}$$

SUJETO A:

$$x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}\leq 1$$

$$x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}\leq 1$$

$$x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}\leq 1$$

$$x_{D1}+x_{D2}+x_{D3}+x_{D4}\leq 1$$

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}=1$$

$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}=1$$

$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}+x_{D3}=1$$

$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}+x_{D4}=1$$

SOLUCION CON ALGORITMO HUNGARO.

El cuadro general de transporte(fig6). Se puede simplificar para el problema de asignación, convirtiéndolo en un cuadro de costos (tabla 5.4.). Esto se puede realizar porque el valor de oferta y demanda de las variables x_{ij} es uno.

Tabla 5.4.

Cuadro costos ASIGNACION FLORES TROPICALES

			Costo en miles de dólares		
DIRECTORES	**(1) Quito**	**(2) Bogotá**	**(3) Santiago**	**(4) Buenos Aires**	**# de directores solicitados**
Director 1 (A)	24	10	21	11	1
Director 2 (B)	14	22	10	15	1
Director 3 (C)	15	17	20	19	1
Director 4 (D)	11	19	14	13	1
#de directores requerido	1	1	1	1	

Nota: *tabla elaboración propia*

Ahora convertiremos la tabla de costos(tabla 5.4.) en una serie de tablas de costos *equivalentes,* llegando a una en la que la solución óptima sea evidente, la misma que consistiría solo de cantidades positivas o cero, y de esta manera se harían las asignaciones directamente a las posiciones con costos cero.

Primero observamos que la cantidad que se demanda sea igual a la que se oferta, si no lo es, hay que agregar filas o columnas ficticias.

El algoritmo se inicia al restar el número más pequeño de cada fila de todos los números de la fila (tabla 5.5.). Este proceso de *reducción de la fila* formara una tabla de costos equivalente que tiene elementos iguales a cero en todas las filas.

Emparejamiento en grafos bipartitos

Contexto histórico:

El Método Húngaro se basa en la teoría de grafos bipartitos, y uno de sus problemas históricos fue encontrar el emparejamiento máximo en un grafo bipartito.

Este problema tiene aplicaciones prácticas en la asignación de recursos y en las redes de flujo.

Ejemplo:

En un sistema educativo, se puede emparejar a estudiantes con supervisores de tesis basándose en intereses comunes o disponibilidad, asegurando la mejor asignación posible.

Tabla 5.5.

Selección filas

				Selección menor valor por fila
24	10	21	11	10
14	22	10	15	10
15	17	20	19	15
11	19	14	13	11

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Tabla 5.6.

Valor obtenido al restar cada fila

14	0	11	1
4	12	0	5
0	2	5	14
0	8	3	2

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Si esta tabla de costos (tabla 5.4.) tiene algunas columnas sin un elemento cero, el siguiente paso es realizar un proceso de *reducción de columna* al restar el número más pequeño de cada una de tales columnas (tabla 5.5.) del resto de los números de la columna (tabla 5.6.)

Diseño de horarios y turnos

Contexto histórico:

En la década de 1950 y 1960, la planificación de horarios para trabajadores y estudiantes era un desafío importante en sectores como la educación, la salud y la industria.

El Método Húngaro se utilizó para diseñar horarios óptimos, minimizando conflictos y asegurando la cobertura adecuada de turnos.

Ejemplo:

Asignar enfermeras a turnos en un hospital, minimizando el número de horas extras trabajadas y asegurando que cada turno esté cubierto.

Tabla 5.5.

Selección columnas

	14	0	11	1
	4	12	0	5
	0	2	5	14
	0	8	3	2
Selección menor valor por columna	0	0	0	1

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Tabla 5.6.

Valor obtenido al restar cada columna

14	0	11	0
4	12	0	4
0	2	5	13
0	8	3	1

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

La nueva tabla de costos equivalente (Tabla 5.6.) tendrá un elemento cero en todas las filas y columnas. Si los elementos cero proporcionan un conjunto completo de asignaciones, estas últimas constituyen una solución óptima y el algoritmo termina.

Ahora *todas las filas* y columnas tienen al menos un elemento cero, pero esta vez *no* es posible un conjunto completo de asignaciones con elementos de este tipo.

Asignación de trabajadores a tareas (Problema clásico de asignación)

Contexto histórico:

Uno de los primeros problemas resueltos por el Método Húngaro fue el de asignar trabajadores a tareas de manera óptima, minimizando el costo total o maximizando la eficiencia.

Este problema surgió en el contexto de la industria y la economía del siglo XX, donde era necesario optimizar los recursos humanos para reducir costos operativos.

Ejemplo:

Una empresa tiene un conjunto de trabajadores con habilidades específicas y un conjunto de tareas con diferentes costos asociados a cada trabajador. El objetivo es asignar cada tarea a un trabajador de manera que el costo total sea mínimo.

El Método Húngaro permitió resolver este problema de manera sistemática y eficiente.

En realidad, el número máximo de asignaciones que se puede hacer en posiciones de elementos cero es de sólo 3. (trate de hacerlo).

Por tanto, deberemos llegar a una idea menos sencilla para poder resolver este problema. Esta idea implica una nueva estrategia para crear posiciones *adicionales* con elementos cero sin crear ningún elemento negativo. En lugar de restar una constante a una sola fila o columna, ahora se suma o se resta una constante a una *combinación* de filas y columnas.

Iniciamos dibujando un conjunto de líneas a través de algunas de las filas y columnas de tal forma que se *cubran todos los ceros*. Se debe hacer con el número mínimo de líneas, como se muestra en la tabla7.

Tabla 5.7.

Recubrimiento de ceros con trazos horizontales y verticales.

14	0	11	0
4	12	0	4
0	2	5	13
0	8	3	1

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Vemos que el elemento mínimo que no ha sido cruzado es 1, en las dos posiciones inferiores de la columna 4. Por tanto, si se resta 1 de todos los elementos de la tabla completa, es decir, de cada fila y columna, se creará un nuevo elemento cero en esta posición. Después, para restaurar los elementos cero previos y eliminar elementos negativos, se suma 1 a cada fila y columna que esté cruzada por una línea, esto es, fila 1 y columnas 1 y 3. Obteniendo la Tabla 8 de costos equivalente.

Tabla 5.8.

Resultado de las reducciones filas- columnas

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	12
0	7	2	0

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

A la tabla 5.8. La recubrimos con líneas horizontales y verticales, cubriendo todos los ceros de la tabla. Obtenemos la tabla 5.9.

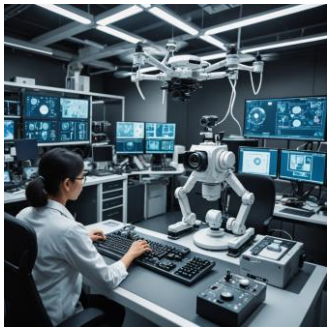
Tabla 5.9.

Recubrimiento de ceros con trazos horizontales y verticales.

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	12
0	7	2	0

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

El número de líneas utilizadas para recubrir los ceros son cuatro, y el número de filas es cuatro. Por lo que hemos llegado a la reducción óptima (tabla 5.10.).



Reconocimiento de patrones en visión por computadora

Contexto histórico:

En las décadas de 1970 y 1980, el Método Húngaro comenzó a aplicarse en problemas de reconocimiento de patrones y emparejamiento de características en imágenes digitales.

Este problema surgió en el contexto de la inteligencia artificial y la visión por computadora.

Ejemplo:

Emparejar puntos clave entre dos imágenes para determinar similitudes o transformaciones geométricas (por ejemplo, en sistemas de navegación o mapas digitales).

Tabla 5.10.

Tabla óptima

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	12
0	7	2	0

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Con la tabla 5.10. Haremos las asignaciones una a una en las posiciones que tienen elementos cero. Comenzaremos con la filas y columnas que tienen sólo un cero. Como cada fila y cada columna necesita obtener exactamente una asignación, cruzaremos tanto la fila como la columna respectiva luego de hacer cada asignación.

Después continuaremos con las filas y columnas que aún no han sido cruzados para seleccionar la siguiente asignación, y de nuevo dé preferencia a alguna fila o columna que tenga un solo cero que no haya sido cruzado. Continuaremos hasta que toda las filas y columnas tengan exactamente una asignación y por ende ya hayan sido cruzados. (tabla 5.11.)

Optimización en deportes

Contexto histórico:

En la organización de torneos deportivos, el Método Húngaro se utilizó para emparejar equipos o jugadores de manera justa y eficiente.

Esto permitió optimizar los calendarios de competencias y minimizar los costos asociados al transporte o la logística.

Ejemplo:

Asignar canchas o sedes a equipos en un torneo, minimizando los costos de desplazamiento.

Tabla 5.11.

Asignación

DIRECTORES	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) Buenos Aires
Director 1 (A)	15	0 x	11	0
Director 2 (B)	5	12	0 x	4
Director 3 (C)	0 x	1	4	12
Director 4 (D)	0	7	2	0 x

Nota: *Tabla según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Calcularemos ahora el costo mínimo de asignación(tabla 5.12.) refiriéndonos a la tabla 5.3.

Tabla 5.12.

Costo de la asignacion

	ASIGNACIONES	
Director 1 (A)	(2) Bogotá	10
Director 2 (B)	(3) Santiago	10
Director 3 (C)	(1) Quito	15
Director 4 (D)	(4) Buenos Aires	13
	COSTO TOTAL	48

Nota: *Tabla elaboración propia*

El minino costo de asignación será de $48000 dólares. La distribución de las asignaciones las vemos en la tabla 12. Este resultado es exactamente igual al obtenido a través de SOLVER.

Director 1 a Bogotá.....X_{A2}

Director 2 a Santiago de Chile.....X_{B3}

Director 3 a Quito..... X_{C1}

Director 4 a Buenos Aires..... X_{D4}

Para resolver los problemas de asignación mediante maximización, se escoge el valor ***mayor*** de toda la tabla. Dicho valor se resta con respecto de todos los valores, una vez obtenido los nuevos valores de la tabla se proceden a resolver con los pasos anteriormente ya estudiados.

5.4.-CONCLUSIONES

-Problemas de asignación son muy comunes en el campo de la administración, el tener a la programación lineal como herramienta, tanto a nivel informático como de algoritmo, permite un mayor alcance para hallar una solución óptima.

5.5.-CUESTIONARIO

5.5.1.-VERDADERO-FALSO

1. Es un problema de programación lineal un problema de asignación. (V) (F)
2. En un problema de asignación son las ofertas iguales a uno. (V) (F)
3. En un problema de asignación son las demandas iguales a uno. (V) (F)
4. Se busca determinar qué origen se asigna a qué destino en un problema de asignación. (V) (F)
5. La matriz de costos debe ser cuadrada en un problema de asignación. (V) (F)
6. Para resolver un problema de asignación se utiliza el método HÚNGARO. (V) (F)

7. Es un problema de programación lineal un problema de asignación. (V) (F)
8. Un elemento importante para el problema de asignación es la matriz de costos. (V) (F)
9. Para aplicar el método Húngaro, el número de filas tiene que ser igual al número de columnas; caso contrario se procede a aumentar una fila ficticia o columna ficticia con un valor de cero (0). (V) (F)
10. Es un problema de programación lineal un problema de asignación. (V) (F)

5.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

El método de asignación:

a. De los modelos de transporte es uno especial.

b. Se puede utilizar el algoritmo símplex para solucionarlo.

c. Su solución óptima con valores enteros siempre tiene solución.

d. Todo lo anterior. (a) (b) (c) (d)

Algunas de las aplicaciones de los modelos de asignación podrían ser:

a. Asignación de trabajadores a máquinas.

b. Asignación de contratistas a proyectos.

c. Asignación de agentes de ventas a distritos.

d. Asignación de equipos de trabajo a proyectos.

e. Todo lo anterior. (a) (b) (c) (d) (e)

5.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

15.- Hay tres operadores a ser asignados a tres equipos, en referencia a el tiempo usado por cada uno de ellos a cada equipo. Los tiempos se muestran en la siguiente tabla que representa la matriz de costos de oportunidad.

		MAQUINA		
		1	**2**	**3**
TRABAJADORES	**1**	20	28	36
	2	56	40	48
	3	60	52	64

¿Con que asignación obtendríamos el mínimo tiempo en conjunto?

16.- Un vendedor de bienes raíces, proyecta la venta de 5 lotes de terreno recibiendo ofertas individuales de cuatro interesados en la compra. Por políticas de directorio de la inmobiliaria solo se venderá un lote a cada interesado. El interés del vendedor es maximizar su ingreso total.

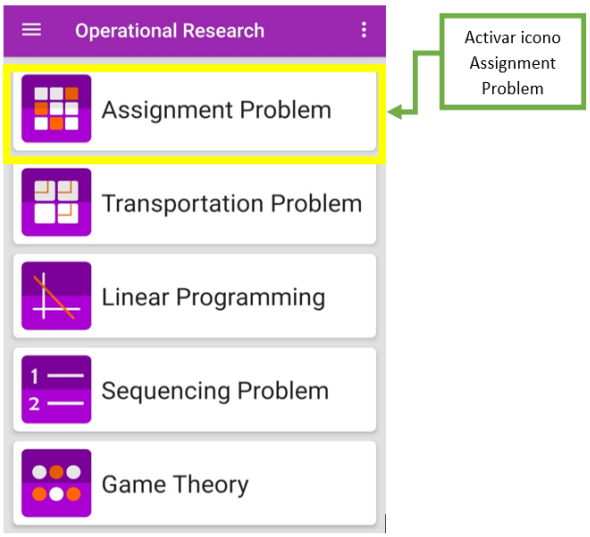
Las ofertas se muestran en la siguiente tabla\

		LOTES				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
COMPRADORES	**A**	32	30	50	38	40
	B	38	34	48	30	50
	C	30	30	36	0	32
	D	38	0	30	34	36

APENDICE OPERATIONAL RESEARCH

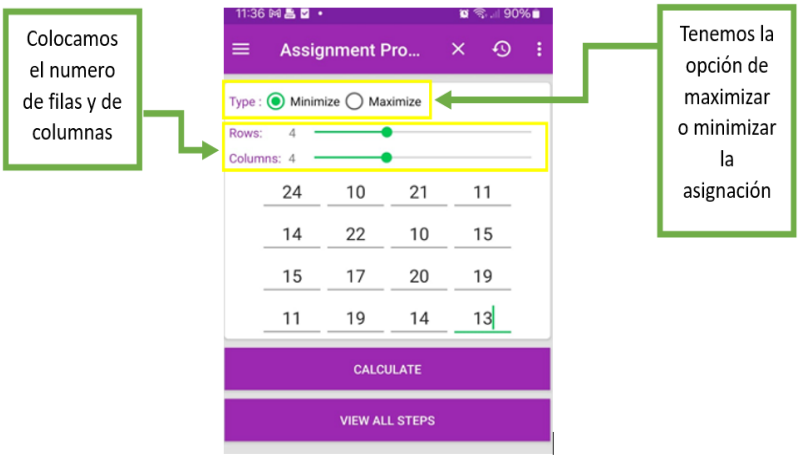
El siguiente es el procedimiento del uso de OPERATIONAL RESEARCH:

1.-Activar el icono correspondiente a Assignment Problem

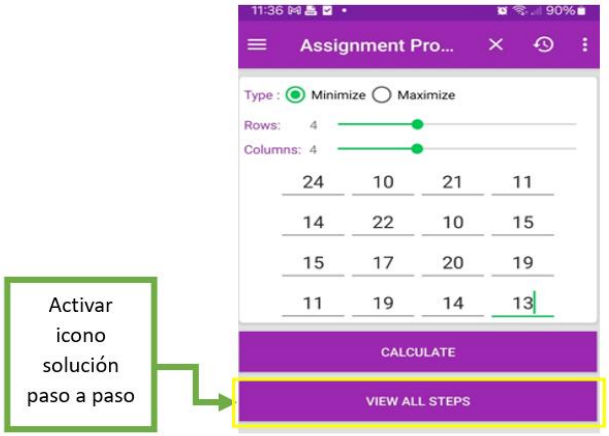


2.-Ingresar el modelo de Asignación a ser resuelto.

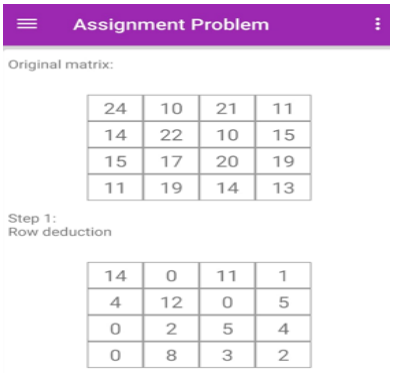
DESTINOS	(1) Quito	(2) Bogotá	(3) Santiago	(4) B. Aires	OFERTAS
Director 1(A)	24	10	21	11	1
Director 2(B)	14	22	10	15	1
Director3(C)	15	17	20	29	1
Director 4(D)	11	19	14	13	1
DEMANDAS	1	1	1	1	



3.- Activar icono solución paso a paso



4.-Calcula la disminucion del valor de las filas y las columnas



Step 5:
Column deduction

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	2
0	7	2	0

5.-Cubrimos todos los ceros con la minima cantidad de lineas verticales y horizontales. Si este número de líneas es menor que el número de filas, verifico las celdas que no están cubiertas, escojo la de menor valor, y lo resto a estas mismas celdas, y las sumo en las celdas de cruces de las líneas

Step 3:
Do tick marking and Modify matrix

After marking & drawing lines:

14	0	11	8
4	12	0	4
0	2	5	3
8	8	3	1

Step 5:
Column deduction

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	2
0	7	2	0

6.-Calulamos el numero de lineas que cubren todos los ceros, nos da cuatro, que es igual al numero de filas, se detiene el algoritmo de busqueda y comienza la asignacion

Step 6:
Assign zeros

15	0	11	8
5	12	0	4
			2
			0

Resultados de la asignacion

Step 7
Solutio

x1->y2, x2->y3, x3->y1, x4->y4, Value: 48

5.6.-GLOSARIO

Adjudicados:

Bienes o recursos indivisibles que se asignan para la ejecución de tareas específicas.

Algoritmo:

Conjunto de pasos definidos para resolver un problema de manera sistemática.

Asignación:

Proceso de distribuir recursos, como personal o equipos, a tareas específicas.

Asignación óptima:

Distribución de recursos que minimiza costos o maximiza beneficios en un problema de asignación.

Balanceado:

Condición en un modelo de transporte o asignación donde la oferta y la demanda son iguales.

Celda:

Unidad básica en una tabla que contiene datos o valores.

Columna:

Conjunto vertical de celdas en una tabla.

Costo mínimo:

Menor valor posible para realizar una asignación o transporte.

Cuadro de costos:

Tabla que muestra los costos asociados a cada combinación de asignación.

Cuadro de transporte:

Adaptación del cuadro simplex para problemas de transporte o asignación.

Demanda:

Cantidad requerida de un recurso o servicio en un destino específico.

Director:

Persona asignada a realizar una tarea específica en un problema de asignación.

Fila:

Conjunto horizontal de celdas en una tabla.

Función objetivo:

Expresión matemática que se optimiza (minimiza o maximiza) en un problema de programación lineal.

Húngaro (Método):

Algoritmo utilizado para resolver problemas de asignación minimizando costos.

Investigación operativa:

Disciplina que aplica métodos matemáticos y analíticos para optimizar procesos y tomar decisiones.

Iteración:

Repetición de un conjunto de pasos dentro de un algoritmo hasta alcanzar un resultado deseado.

Línea:

Elemento utilizado para cubrir ceros en una tabla de costos durante el método húngaro.

Modelo de asignación.

Modelo para determinar la asignación óptima de *n* agentes u

Modelo matemático:

Representación abstracta de un problema mediante ecuaciones y restricciones.

Oferta:

Cantidad disponible de un recurso o servicio en un origen específico.

Operación Research (Aplicación):

Herramienta educativa diseñada para aprender y practicar métodos de resolución de problemas en investigación operativa.

Origen:

Punto inicial desde donde se asignan recursos en un problema de transporte o asignación.

Programación lineal:

Técnica matemática para optimizar una función objetivo sujeta a restricciones lineales.

Problema balanceado:

Problema en el que la oferta total es igual a la demanda total.

Prototípico:

Ejemplo representativo utilizado para ilustrar un método o concepto.

Reducción de fila:

Proceso de restar el valor mínimo de una fila a todos los elementos de esa fila.

Reducción de columna:

Proceso de restar el valor mínimo de una columna a todos los elementos de esa columna.

Restricción:

Condición que debe cumplirse en un modelo matemático.

SOLVER:

Herramienta informática utilizada para resolver problemas de optimización, como los de asignación y transporte.

Tabla:

Representación gráfica de datos organizados en filas y columnas.

Transporte:

Proceso de mover recursos desde un origen a un destino.

Z (Función objetivo):

Variable que representa el costo total a minimizar en un problema de programación lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS PARTE 1

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (2009). *Network flows: Theory, algorithms, and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011). *Linear programming and network flows* (4ª ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (2004). *Introduction to linear optimization*. Belmont, MA: Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). *Programas de computación para formular alimentos*. Madrid, España: Avicultura profesional.

Cohen, M. A., & Murdock, J. (2012). *Operations research: A practical introduction*. Hoboken, NJ: Wiley.

Daniel Izquierdo Granja, & Ruiz Ruiz, J. J. (2006). PHPSIMPLEX Versión 0.81 [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm

Dantzig, G. B., & Thapa, M. (2003). *Linear programming: Foundations and extensions* (2ª ed.). New York, NY: Springer.

Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (1993). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. México D.F., México: Prentice Hall.

Gallagher, H., & Watson, J. (1990). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración*. México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Gass, S. I. (1990). *An illustrated guide to linear programming*. New York, NY: Dover Publications.

García Sabater, J. P. (2011). *Métodos cuantitativos de organización industrial*. Valencia, España: Universitat Politècnica de València. https://jpgarcia.webs.upv.es/?page_id=1932

González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A. (2015). *Manual práctico de investigación de operaciones I* (4.ª ed.). Barranquilla, Colombia: Editorial Universidad del Norte.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research* (10ª ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Kall, P., & Mayer, S. (2005). *Stochastic optimization: Methods and applications*. New York, NY: Springer.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming* (3ª ed.). New York, NY: Springer.

Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa* (5ª ed.). México D.F., México: Prentice Hall.

Murty, K. G., & Katta, S. (1983). *Linear programming*. New York, NY: Wiley.

Peñafiel, L. (1976). *Programación lineal*. México D.F., México: Trillas S.A.

Prawda Witenberg, J. (1977). *Métodos y modelos de investigación de operaciones: Volumen 1* (1977.a ed.). México D.F., México: Limusa.

Rardin, R. L. (2016). *Optimization in operations research* (2ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Rincón Abril, L. A. (2001). *Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

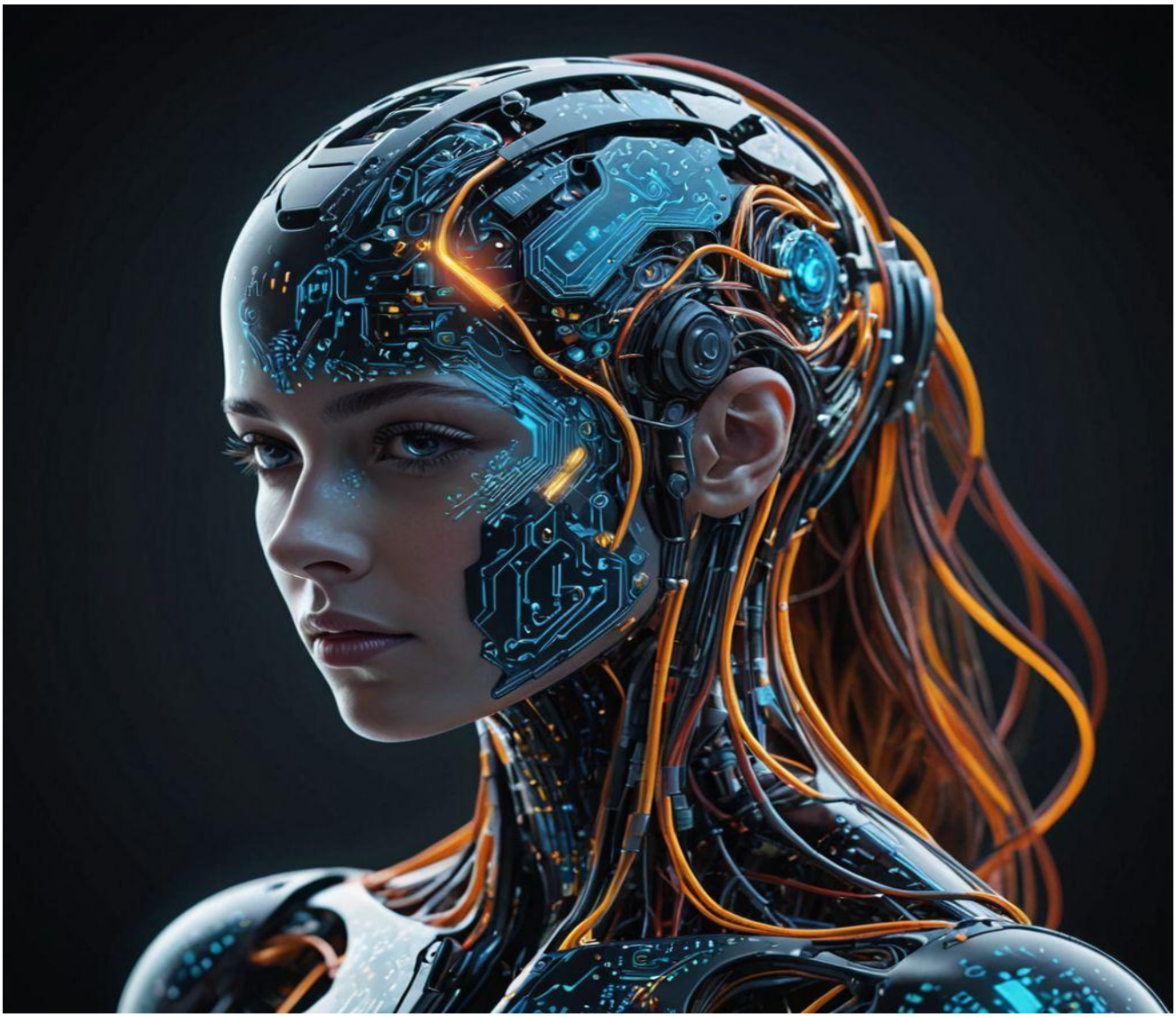
Sasieni, M. W., & Cohen, R. (2007). *Operations research: A practical guide to the use of OR techniques*. Hoboken, NJ: Wiley.

Shamblin, J., & Stevens, G. T. (1988). *Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental*. México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Taha, H. A. (2017). *Operations research: An introduction* (10ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Varela, J. E. (1991). *Introducción a la investigación de operaciones*. México D.F., México: Fondo Editorial Interamericana.

Winston, W. L. (2004). *Operations research: Applications and algorithms* (4ª ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole.



PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA

CAPITULO 6. HEURÍSTICAS, METAHEURÍSTICAS Y REDES NEURONALES EN LA OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA, PROGRAMACIÓN LINEAL E INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

6.1. OBJETIVOS

El propósito de este capítulo es proporcionar una visión integral sobre el uso de heurísticas, metaheurísticas y redes neuronales en optimización combinatoria, programación lineal e investigación de operaciones. Los objetivos específicos incluyen:

Definir y contextualizar las heurísticas, metaheurísticas y redes neuronales:

- Explicar sus fundamentos teóricos y características principales.
- Analizar sus fortalezas, limitaciones y áreas de aplicación. Explorar su interacción con la programación lineal e investigación de operaciones:
- Identificar cómo estas técnicas complementan los métodos exactos tradicionales.
- Presentar ejemplos prácticos de su aplicación en problemas reales de optimización. Proponer una perspectiva integrada:
- Mostrar cómo la combinación de estas técnicas puede superar las limitaciones individuales de cada enfoque.

Los métodos heurísticos y metaheurísticos:

Son técnicas ampliamente utilizadas para resolver problemas complejos de optimización y búsqueda en los que los métodos exactos no son prácticos debido a restricciones de tiempo o recursos computacionales. La evolución de estas técnicas tiene una rica historia, que abarca desde enfoques intuitivos iniciales hasta el desarrollo de sofisticados algoritmos inspirados en la naturaleza.

A continuación, se presenta una exploración histórica de los métodos heurísticos y metaheurísticos:

1. Orígenes de las Heurísticas

El término "heurística" proviene del griego "heuriskein", que significa "descubrir" o "encontrar". Las heurísticas son estrategias basadas en reglas simples o aproximaciones que ayudan a encontrar soluciones aceptables a problemas complejos, aunque no necesariamente óptimas.

Primeras aplicaciones (precomputación):

El uso de heurísticas se remonta a los primeros intentos de resolver problemas matemáticos y lógicos. En la antigüedad, los matemáticos utilizaban reglas empíricas o aproximaciones para resolver problemas geométricos y numéricos.

En el siglo XIX, matemáticos como Carl Friedrich Gauss aplicaron heurísticas para resolver problemas de ajuste de curvas y estimación de parámetros.

Década de 1940-1950:

Durante esta época, el desarrollo de las primeras computadoras permitió la implementación de heurísticas en problemas computacionales.

George Pólya, en su libro *"How to Solve It"* (1945), formalizó el concepto de heurística en el contexto de la resolución de problemas matemáticos, estableciendo principios generales para encontrar soluciones.

6.2. INTRODUCCIÓN

La Optimización Combinatoria es una disciplina clave dentro de las matemáticas aplicadas, la inteligencia artificial y la investigación de operaciones. Su propósito principal es encontrar soluciones óptimas o cercanas al óptimo en problemas donde el espacio de búsqueda es discreto y extremadamente amplio. Estos problemas surgen en diversos

2. Surgimiento de las Metaheurísticas

Las metaheurísticas son un avance sobre las heurísticas tradicionales. Se trata de estrategias generales que guían el proceso de búsqueda para escapar de óptimos locales y explorar de manera más efectiva el espacio de soluciones. Estas técnicas comenzaron a desarrollarse en la segunda mitad del siglo XX.

1970-1980: Primeras metaheurísticas

Búsqueda Tabú (Tabu Search):

Introducida por Fred Glover en 1986, la búsqueda tabú es una técnica basada en la memoria que evita volver a soluciones previamente exploradas, permitiendo escapar de óptimos locales.

Fue una de las primeras metaheurísticas formalizadas y se utilizó ampliamente en problemas de planificación y diseño de redes.

Simulated Annealing (Recocido Simulado):

Basado en el proceso físico de recocido de metales, este método fue introducido por Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi en 1983.

Inspirado en la termodinámica, utiliza una función de probabilidad para aceptar soluciones peores temporalmente, con el objetivo de escapar de óptimos locales.

Evolución Diferencial:

En 1975, John Holland desarrolló los Algoritmos Genéticos, inspirados en la evolución biológica. Este enfoque marcó el inicio de una nueva era en las metaheurísticas, utilizando conceptos como selección, cruce y mutación.

contextos de la vida real, como la planificación de rutas, la asignación de recursos, la logística, la gestión de horarios y el diseño de redes, entre otros. Sin embargo, debido a su complejidad computacional, los métodos exactos suelen ser ineficientes o incluso inviables en instancias de gran escala.

En este contexto, el enfoque aproximado han demostrado ser herramientas fundamentales. Mientras que el enfoque aproximado ofrece soluciones rápidas y aproximadas mediante reglas simples, las metaheurísticas proporcionan estrategias más avanzadas y flexibles que permiten explorar el espacio de búsqueda de manera más efectiva, evitando los óptimos locales y maximizando la calidad de las soluciones obtenidas.

Por otro lado, el desarrollo de las redes neuronales artificiales (ANNs) ha transformado significativamente el panorama de la optimización y la toma de decisiones. Inspiradas en el funcionamiento del cerebro humano, estas redes son capaces de aprender patrones complejos y realizar predicciones precisas, lo que las convierte en herramientas ideales para complementar tanto la estrategia de búsqueda como la resolución de problemas complejos.

En el ámbito de la optimización y la investigación de operaciones, la combinación de técnicas tradicionales y modernas es esencial para resolver problemas complejos de manera eficiente. Métodos como el algoritmo simplex han sido pilares fundamentales en la programación lineal, proporcionando soluciones exactas a problemas bien definidos. Sin embargo, la creciente complejidad de los sistemas actuales ha impulsado el desarrollo de enfoques más flexibles como las estrategias de búsqueda.

Estas técnicas modernas destacan por su capacidad de encontrar soluciones aproximadas en tiempos reducidos, lo que resulta especialmente útil en problemas donde las herramientas clásicas resultan ineficaces o demasiado costosas computacionalmente. Por ejemplo, las redes neuronales artificiales (ANNs), los algoritmos genéticos, la optimización por enjambre de partículas y el recocido simulado son algunas de las estrategias metaheurísticas que han demostrado ser efectivas en diversos contextos.

El avance en inteligencia artificial también ha revolucionado este campo, destacando las redes neuronales artificiales (ANNs) como una herramienta poderosa para la optimización. Gracias a su capacidad para aprender patrones y generalizar a partir de datos, las ANNs ofrecen nuevas perspectivas en la resolución de problemas complejos, como la optimización combinatoria en redes y sistemas dinámicos.

Además, herramientas como SOLVER siguen siendo relevantes como punto de partida para comprender los fundamentos de la optimización. Sin embargo, la integración de métodos modernos permite abordar los problemas desde enfoques más adaptativos y personalizados, alineados con las demandas actuales del mercado y la tecnología.

Por ello, es fundamental que los profesionales y estudiantes del área no solo dominen las técnicas clásicas, sino que también se familiaricen con estas innovaciones. Un enfoque integral que combine lo mejor de ambas corrientes permitirá enfrentar los desafíos actuales y futuros con mayor eficacia y creatividad.

3. Década de 1990: Auge de las Metaheurísticas Inspiradas en la Naturaleza

Durante esta década, surgieron muchas metaheurísticas basadas en fenómenos naturales y comportamientos colectivos observados en la biología, la física y la química.

Algoritmos evolutivos:

Algoritmos Genéticos (AG):

Popularizados por **David Goldberg** en su libro *"Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning"* (1989), los AG se aplicaron a problemas de optimización combinatoria y diseño de ingeniería.

Estos algoritmos simulan la evolución biológica mediante selección natural.

Optimización basada en enjambres:

Optimización por Colonia de Hormigas (ACO):

Introducida por **Marco Dorigo** en 1992, este método se inspira en el comportamiento de las hormigas al buscar rutas óptimas hacia fuentes de alimento.

ACO se aplicó inicialmente en problemas de rutas, como el **Problema del Viajero (TSP)**, y luego en redes y planificación.

Optimización por Enjambre de Partículas (PSO):

Desarrollada por **James Kennedy y Russell Eberhart** en 1995, PSO se basa en el comportamiento colectivo de aves y peces.

Este método utiliza partículas que se mueven en un espacio de búsqueda, guiadas por su propia experiencia y la de sus vecinos.

6.3.-DESARROLLO.

6.3.1.-Heurísticas: Soluciones Rápidas y Prácticas

6.3.1.1.-Definición y Características

Según (García Sabater, J. P.,2011) Las heurísticas son métodos buscan

soluciones factibles de manera rápida y eficiente, aunque no garantizan la optimalidad. Estas técnicas basan en reglas específicas o aproximaciones aprovechan el conocimiento previo del problema.

A menudo se utilizan en problemas donde los métodos exactos son inviables debido al tamaño del espacio de búsqueda o a las restricciones de tiempo y recursos computacionales.

Ejemplos de heurísticas incluyen:

- Algoritmos constructivos: Construyen soluciones de manera incremental. Por ejemplo, en el problema de la ruta más corta, el algoritmo del vecino más cercano selecciona en paso la ciudad más próxima no visitada.

- Búsqueda local: Parte de una solución inicial y la mejora iterativamente explorando su vecindario.

6.3.1.2.-Clasificación de Heurísticas

Las heurísticas pueden clasificarse en diferentes categorías según su enfoque:

- Heurísticas constructivas: Comienzan desde una solución parcial y la completan paso a paso.

- Heurísticas de mejora: Parten de una solución completa y buscan mejorarla iterativamente.

- Heurísticas voraces (greedy): Seleccionan siempre la mejor opción local en cada paso, aunque esto pueda llevar a soluciones subóptimas globalmente.

4. Década de 2000: Diversificación y Nuevas Inspiraciones

En el siglo XXI, las metaheurísticas continuaron diversificándose, incorporando nuevas fuentes de inspiración y mejorando su rendimiento mediante hibridaciones.

Nuevas metaheurísticas inspiradas en la naturaleza:

Algoritmo de Búsqueda de Cuco (Cuckoo Search):

Introducido por **Xin-She Yang y Suash Deb** en 2009, este algoritmo se basa en el comportamiento reproductivo de los cucos, que colocan sus huevos en nidos de otras aves.

Algoritmo de Murciélagos (Bat Algorithm):

Propuesto por **Xin-She Yang** en 2010, está inspirado en el uso de ecolocación por parte de los murciélagos para navegar y buscar presas.

Optimización por Fuego Artificial (Fireworks Algorithm):

Introducido en 2010, este método simula explosiones de fuegos artificiales para explorar el espacio de búsqueda.

Hibridación de metaheurísticas:

En esta época, comenzaron a combinarse diferentes metaheurísticas para aprovechar las fortalezas de cada una. Por ejemplo, se combinan **algoritmos genéticos** con **búsqueda local** o **simulated annealing** con **búsqueda tabú**.

- Heurísticas con retroceso (backtracking): Permiten deshacer decisiones previas si estas conducen a soluciones no deseables.

6.3.1.3.-Ventajas y Limitaciones

- Ventajas:

- Son rápidas y fáciles de implementar.

- Proporcionan soluciones razonablemente buenas en poco tiempo.

- Son útiles como punto de partida para métodos más avanzados.

- Limitaciones:

- No garantizan encontrar la solución óptima.

- Pueden quedar atrapadas en óptimos locales.

- Su desempeño depende en gran medida del

conocimiento previo del problema

6.3.2.-Metaheurísticas: Exploración Global del Espacio de Soluciones

6.3.2.1.-Definición y Principios

Las metaheurísticas son estrategias generales que guían la búsqueda de soluciones en problemas de optimización combinatoria. A diferencia de los procedimiento de aproximación, las metaheurísticas son más flexibles y adaptativas, lo que les permite explorar el espacio de búsqueda de manera más efectiva y superar los problemas asociados con los óptimos locales.

Entre las metaheurísticas más destacadas se encuentran:

- Recocido Simulado (Simulated Annealing): Inspirado en el proceso físico de enfriamiento de metales, este método permite aceptar soluciones peores temporalmente para escapar de óptimos locales y explorar nuevas regiones del espacio de búsqueda.

5. Metaheurísticas Modernas y Avances Recientes

En los últimos años, las metaheurísticas han evolucionado para abordar problemas más grandes y complejos, especialmente en el contexto de la inteligencia artificial y el aprendizaje automático.

Aplicaciones modernas:

Optimización en Big Data:

Las metaheurísticas se utilizan para optimizar modelos de aprendizaje automático, seleccionar características y ajustar hiperparámetros en redes neuronales.

Optimización multiobjetivo:

Algoritmos como **NSGA-II** (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) se han desarrollado para resolver problemas con múltiples objetivos conflictivos.

Metaheurísticas híbridas:

Se combinan con técnicas de aprendizaje automático para mejorar la eficiencia y adaptabilidad.

- Algoritmos Genéticos: Basados en los principios de la evolución biológica, estos algoritmos trabajan con una población de soluciones que evoluciona mediante selección, cruce y mutación.

- Búsqueda Tabú: Utiliza una memoria adaptativa para evitar ciclos y explorar regiones no visitadas del espacio de búsqueda.

- Optimización por Colonia de Hormigas (ACO): Emula el comportamiento de las hormigas para encontrar rutas óptimas en problemas de grafos.

- Redes Neuronales Artificiales: -Las redes neuronales artificiales (ANNs) son modelos computacionales inspirados en el cerebro humano. Están compuestas por neuronas artificiales organizadas en capas, que procesan información y aprenden patrones a partir de datos. Las ANNs son especialmente útiles en problemas donde las relaciones entre variables son altamente no lineales o difíciles de modelar explícitamente

6.3.2.2.-Clasificación de Metaheurísticas

Las metaheurísticas pueden clasificarse en tres grandes categorías: - Búsqueda local mejorada: Enfoques que parten de una solución inicial y la mejoran iterativamente, como el recocido simulado.

- Algoritmos basados en poblaciones: Métodos que trabajan con un conjunto de soluciones simultáneamente, como los algoritmos genéticos y la optimización por colonia de hormigas.

- Estrategias de aprendizaje: Procedimientoss que aprenden de soluciones previas para guiar la búsqueda, como las redes neuronales.

6.3.2.3.- Aplicaciones en la Investigación de Operaciones

Las metaheurísticas han demostrado ser herramientas valiosas en la investigación de operaciones, especialmente en problemas como:

- Optimización de rutas: Diseñar rutas de transporte eficientes para minimizar costos y tiempos.

- Asignación de recursos: Distribuir tareas o recursos en sistemas complejos, cómo la asignación de trabajadores a proyectos.

- Diseño de redes: Optimizar redes de comunicación o distribución para maximizar la eficiencia y minimizar los costos.

6.3.2.4.- Rol en la Optimización

-En el contexto de la optimización combinatoria y la investigación de operaciones, las ANNs se utilizan para:

- Generar soluciones iniciales: Aprender patrones en soluciones óptimas anteriores y generar configuraciones de alta calidad.

- Reducción del espacio de búsqueda: Identificar restricciones implícitas y reducir el número de soluciones a considerar.

- Optimización directa: Aproximar funciones objetivo-complejas y encontrar soluciones directamente.

6.3.2.5.- Ejemplos Prácticos

- En el problema de la ruta más corta, las redes neuronales recurrentes han sido utilizadas para aprender patrones en rutas óptimas y guiar la búsqueda.

- En problemas de asignación de recursos, las ANNs pueden predecir configuraciones óptimas en sistemas complejos, acelerando la búsqueda de soluciones.

- En la programación lineal, las ANNs pueden modelar problemas no lineales y proporcionar soluciones aproximadas.

6.3.2.6.- Interacción con la Programación Lineal

6.3.2.6.1.-Complementariedad

-La programación lineal (PL) es una herramienta exacta que resuelve problemas de optimización con restricciones lineales. Sin embargo, su aplicabilidad está limitada a problemas que pueden ser modelados de manera lineal. Las procedimiento de aproximación complementan la PL al abordar:

- Problemas no lineales: Donde las ANNs pueden modelar relaciones complejas.

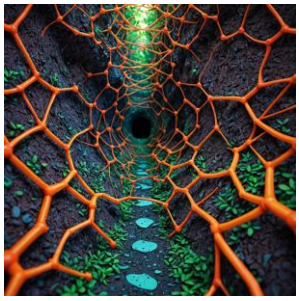
- Problemas de gran escala: Donde las metaheurísticas encuentran soluciones aproximadas en tiempos razonables.

6.3.2.6.2.-Ejemplos de Integración

- Las metaheurísticas pueden utilizarse para resolver problemas de programación lineal entera mixta (MILP).

- Las ANNs pueden actuar como herramientas de predicción para estimar parámetros en modelos de PL.

Algoritmo colonia de hormigas



Problema del Viajante (TSP - Traveling Salesman Problem)

Contexto histórico:

El TSP es uno de los problemas más estudiados en la optimización combinatoria. Consiste en encontrar la ruta más corta que permita a un viajante visitar un conjunto de ciudades y regresar a la ciudad de origen.

Este problema surgió en el contexto de la logística y la planificación de rutas en la década de 1930, cuando las empresas buscaban minimizar costos de transporte.

Métodos utilizados:

Heurísticas: Métodos como el vecino más cercano y el algoritmo voraz fueron utilizados para obtener soluciones aproximadas rápidamente.

Metaheurísticas: Algoritmos genéticos, optimización por colonia de hormigas (ACO) y recocido simulado han sido aplicados para encontrar soluciones cercanas al óptimo en instancias grandes del TSP.

6.4.- EJERCICIOS PROTOTIPICOS

Ejemplo 6.1.: Problema de la Mochila (Knapsack Problem).

De acuerdo con (García Sabater, J. P.,2011) Si se tiene una mochila con una capacidad máxima de 50 kg. Hay 4 objetos disponibles, cada uno con un peso y un valor asociado. El objetivo es maximizar el valor total de los objetos que se pueden colocar en la mochila, sin exceder su capacidad.

-En la solución de este problema utilizaremos un heurístico del tipo greedy (voraz) y un diagrama de flujo para explicar el proceso

Tabla 6.1.

objetos en función de su valor por unidad de peso

Objeto	Peso (kg)	Valor ($)	Valor/Peso
1	10	60	6
2	20	100	5
3	30	120	4
4	40	200	5

Nota: *Tabla según (García Sabater, J. P.,2011)*

Heurística greedy: Seleccionar los objetos en función de su valor por unidad de peso [Valor/Peso] en orden descendente de acuerdo con la Tabla 6.1., hasta llenar la mochila o alcanzar su capacidad máxima.

-Pasos del Algoritmo Greedy

a.- Ordenar los objetos según su relación [Valor/Peso] en orden descendente.

- Orden: Objeto 1 (6), Objeto 2 (5), Objeto 4 (5), Objeto 3 (4).

b.- Iterar sobre los objetos y:

- Si el objeto cabe completamente en la mochila, añadirlo.
- Si el objeto no cabe completamente, añadir solo una fracción proporcional para llenar la mochila.

c. Detenerse cuando la capacidad de la mochila esté llena.

-Resultado del Algoritmo

- Se selecciona el Objeto 1 (10 kg, $60).
- Se selecciona el Objeto 2 (20 kg, $100).
- Se selecciona una fracción del Objeto 4 (20 kg de 40 kg, $100).

Valor total: $260.

Peso total: 50 kg.

-Diagrama de Flujo

-Aquí tienes el diagrama de flujo(gráfico 6.1.) que explica el

proceso del algoritmo greedy:

-Explicación del Diagrama

1. Inicio: Se comienza ordenando los objetos según su \[Valor/Peso\] en orden descendente.

2. Inicialización: La mochila empieza vacía con un peso y valor total igual a 0.

3. Selección: Se toma el siguiente objeto en la lista.

Algoritmo Genetico

Planificación de rutas de vehículos (VRP - Vehicle Routing Problem)

Contexto histórico:

Surgió en la década de 1950 en el contexto de la distribución de bienes y servicios, donde era necesario planificar rutas óptimas para flotas de vehículos que entregan productos a múltiples destinos.

Este problema es una extensión del TSP, con restricciones adicionales como capacidad de los vehículos y ventanas de tiempo.

Métodos utilizados:

Heurísticas: Métodos constructivos como el ahorro de Clarke-Wright y búsqueda local.

Metaheurísticas: Búsqueda tabú, algoritmos genéticos, ACO y optimización por enjambre de partículas (PSO) han sido ampliamente utilizados para resolver este problema.

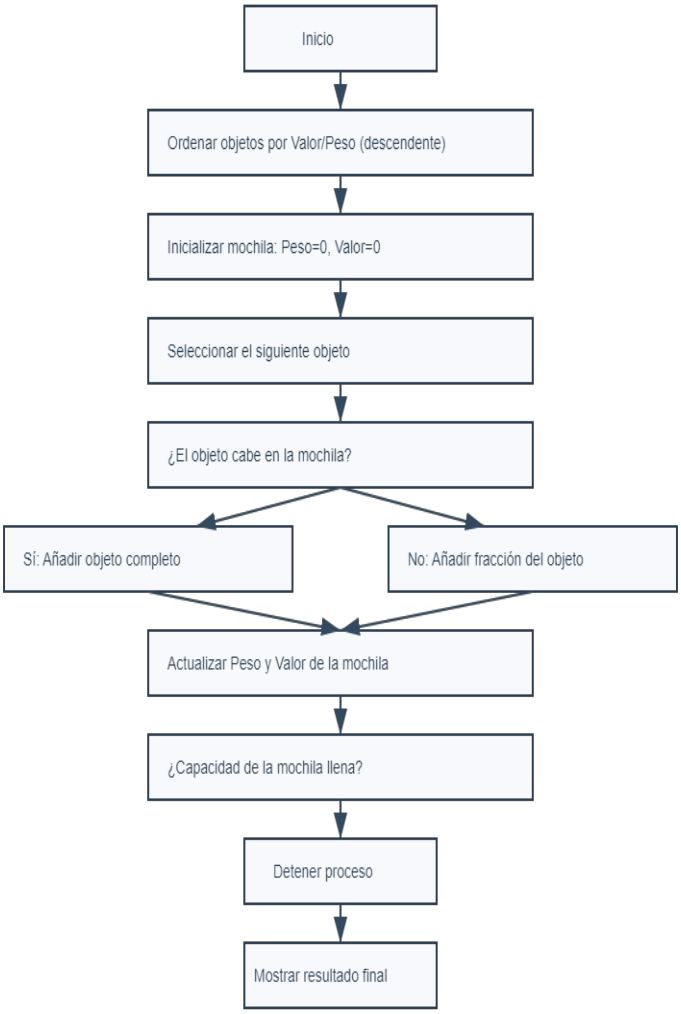
4. Verificación: Si el objeto cabe completamente en la mochila, se añade. Si no cabe, se añade solo una fracción proporcional.

5. Actualización: Se actualizan el peso y el valor de la mochila.

6. Finalización: El proceso se detiene cuando la capacidad de la mochila está llena o no hay más objetos para evaluar.

Figura 6.1.

Diagrama de flujo que explica el proceso del algoritmo greedy



Nota: *gráfico según (García Sabater, J. P.,2011)*

Algoritmo Recocido Simulado

Diseño de redes de telecomunicaciones

Contexto histórico:

Durante el auge de las telecomunicaciones en las décadas de 1970 y 1980, surgió la necesidad de diseñar redes de comunicación eficientes que conectaran diferentes nodos (ciudades, estaciones, etc.) minimizando costos y maximizando la cobertura.

Este problema implicaba resolver variantes del problema de árbol de expansión mínimo y problemas de flujo en redes.

Métodos utilizados:

Heurísticas: Métodos voraces para construir árboles de expansión mínimos.

Metaheurísticas: Recocido simulado y ACO se utilizaron para optimizar el diseño de redes complejas.

Ejemplo 6.2. Optimización de recursos con el recocido simulado (metaheurística)

Según (García Sabater, J. P.,2011), Si un gerente debe asignar 4 trabajadores (W1, W2, W3, W4) a 4 proyectos (P1, P2, P3, P4). Cada trabajador tiene un costo diferente dependiendo del proyecto al que se le asigne, como se muestra en la tabla 6.2.:

Tabla 6.2.

Costo diferente dependiendo del proyecto

	P1	P2	P3	P4
W1	10	15	20	25
W2	20	10	25	30
W3	30	25	15	10
W4	25	20	10	15

Nota: *Tabla según (García Sabater, J. P.,2011)*

Instrucciones Pasos del Algoritmo:

1.Plantea una solución inicial aleatoria (por ejemplo, asignar W1 a P1,

W2 a P2, etc.).

2.Aplica el recocido simulado para explorar nuevas asignaciones y minimizar el costo total.

-Define una función objetivo: minimizar el costo total de las asignaciones.

-Permite aceptar soluciones "peores" temporalmente para escapar de óptimos locales.

3.Itera hasta encontrar una solución aceptable o alcanzar un número máximo de iteraciones.

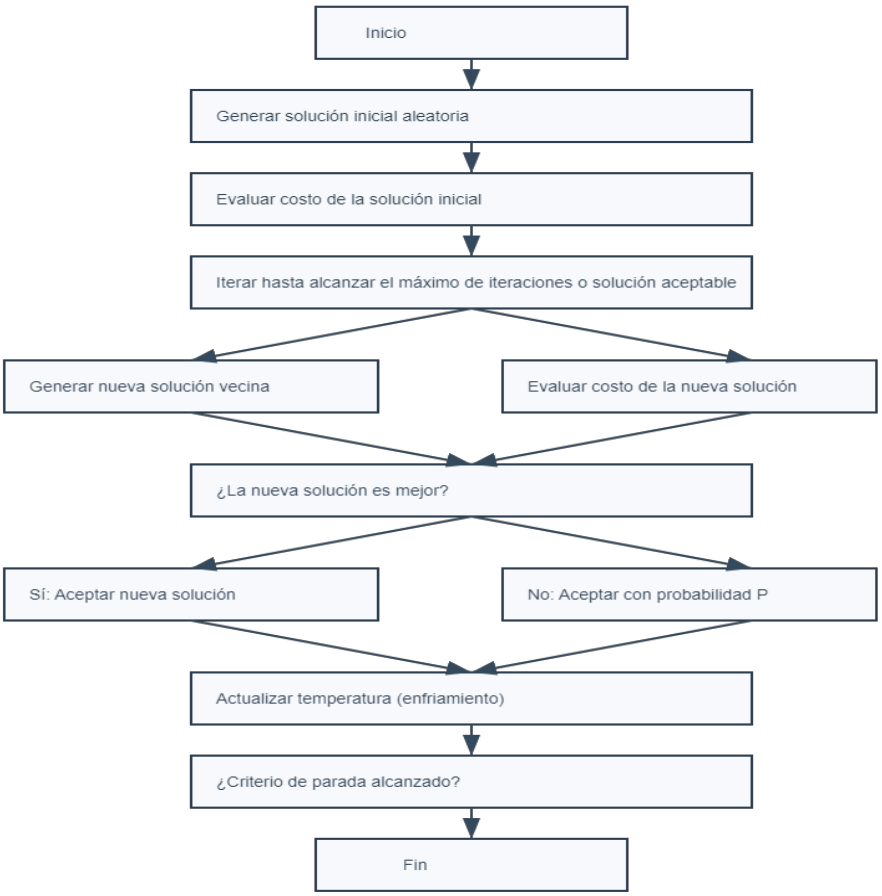
Al ejecutar el algoritmo, obtendremos una asignación óptima o cercana al óptimo. Por ejemplo:

1. Mejor asignación:
   W1→P1, W2→P2, W3→P4, W4→P3*W1→P1*, *W2→P2*, *W3→P4*, *W4→P3* (Esto significa que W1 trabaja en P1, W2 en P2, etc.)

2. Costo mínimo:
10(W1−P1)+10(W2−P2)+10(W3−P4)+10(W4−P3)=401
0($W$1−$P$1)+10($W$2−$P$2)+10($W$3−$P$4)+10($W$4−$P$3)=40

Figura 6.2.

Diagrama de flujo del algoritmo recocido simulado



Nota: *Grafico según (García Sabater, J. P.,2011)*

Algoritmo enjambre de Particulas

Problemas de secuenciación en manufactura

Contexto histórico:

En la década de 1950, con el auge de la producción industrial, surgió la necesidad de optimizar la secuencia de tareas en máquinas para minimizar tiempos de procesamiento y costos.

Ejemplo: El problema de programación de flujo de trabajo en fábricas.

Métodos utilizados:

Heurísticas: Métodos como la regla de prioridad de menor tiempo de procesamiento (SPT) y la regla de Johnson para problemas de dos máquinas.

Metaheurísticas: Recocido simulado, PSO y algoritmos genéticos se han aplicado para resolver problemas más complejos de secuenciación.

Explicación del Diagrama (gráfico 6.2).

1.Inicio: Se inicia el proceso del algoritmo de recocido simulado.

2.Generar solución inicial: Se crea una asignación aleatoria de trabajadores a proyectos.

3.Evaluar costo: Se calcula el costo total de la solución inicial.

4.Iterar: Se repite el proceso hasta alcanzar un número máximo de iteraciones o una solución aceptable.

5.Generar nueva solución vecina: Se modifica ligeramente la solución actual para generar una nueva.

6.Evaluar nueva solución: Se calcula el costo de la solución vecina.

7.Comparar: Si la nueva solución es mejor, se acepta. Si no, se acepta con una probabilidad P=e−ΔC/TP=e−ΔC/T, donde ΔCΔC es la diferencia de costos y TT es la temperatura.

8.Actualizar temperatura: Se reduce la temperatura según una función de enfriamiento.

9.Criterio de parada: Si se alcanza el criterio de parada (por ejemplo, temperatura muy baja o número máximo de iteraciones), el algoritmo termina.

10.Fin: Se devuelve la mejor solución encontrada.

Ejercicio 3.- Optimización por colonia de hormigas (ACO) para diseño de redes

-Según (García Sabater, J. P.,2011), Si Un sistema de transporte necesita conectar 6 nodos (ciudades) con carreteras para minimizar el costo total de construcción. Los costos entre los nodos están dados en la siguiente tabla 6.3.:

Tabla 6.3.

Costos entre los nodos

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	8	0	0	0
B	4	0	2	6	0	0
C	8	2	0	3	9	0
D	0	6	3	0	5	7
E	0	0	9	5	0	4
F	0	0	0	7	4	0

Nota: *Tabla según (García Sabater, J. P.,2011)*

-Instrucciones Pasos del Algoritmo:

-Simula el comportamiento de una colonia de hormigas para encontrar la red de carreteras que minimice el costo total.

-Define los siguientes parámetros:

-Feromonas iniciales: Todas las rutas comienzan con la misma cantidad de feromonas.

-Probabilidad de selección: Basada en el costo inverso (1/costo) y la cantidad de feromonas acumuladas.

-Evaporación de feromonas: Reduce gradualmente las feromonas en rutas no utilizadas. Itera hasta que las hormigas converjan en una solución.

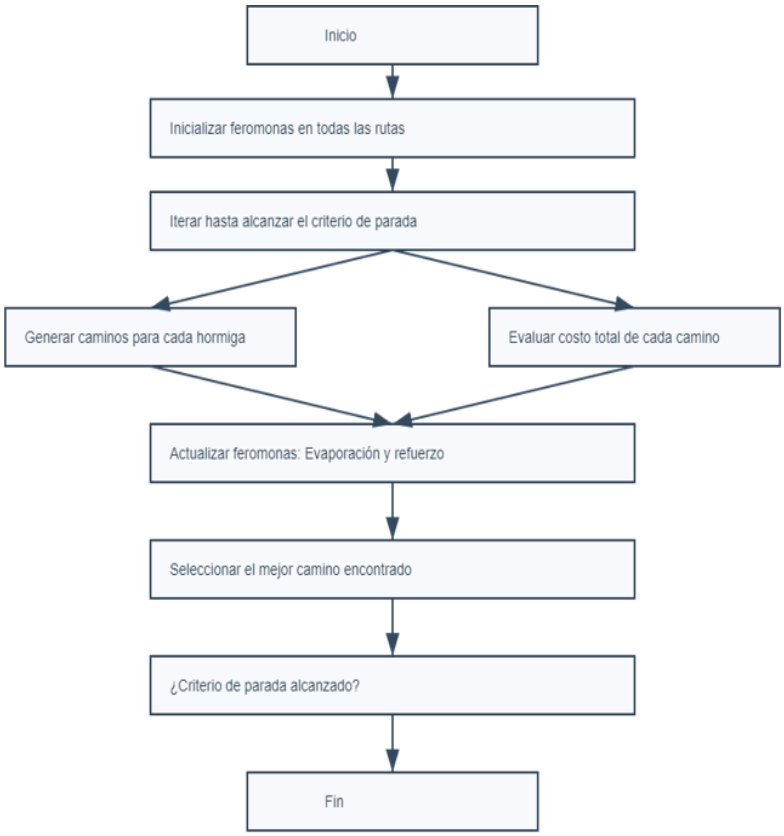
Al ejecutar este código, obtendremos:

1. **Mejor camino:**
   Por ejemplo, el camino puede ser: A→B→C→D→E→F→A*A→B→C→D→E→F→A*
   (Esto conecta todos los nodos de manera eficiente).

2. **Costo mínimo:**
   El costo total del mejor camino encontrado, por ejemplo:
   4(A−B)+2(B−C)+3(C−D)+5(D−E)+4(E−F)+7(F−A)=254(*A−B*)+2(*B−C*)+3(*C−D*)+5(*D−E*)+4(*E−F*)+7(*F−A*)=25

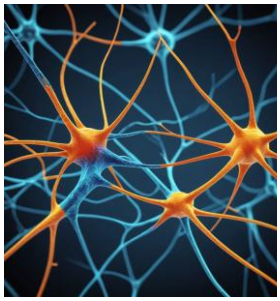
Figura 6.3.

Diagrama de flujo del algoritmo colonia de hormigas (ACO)



Nota: *gráfico según (García Sabater, J. P.,2011)*

Algoritmo Red Neuronal



Optimización en energía y medio ambiente

Contexto histórico:

En las últimas décadas, los problemas relacionados con la optimización de recursos energéticos y la reducción del impacto ambiental han ganado relevancia.

Ejemplo: Optimización de parques eólicos, diseño de redes eléctricas inteligentes y planificación de recursos renovables.

Métodos utilizados:

Heurísticas: Métodos basados en simulaciones y aproximaciones**.**

Metaheurísticas: ACO, PSO y algoritmos genéticos han sido aplicados para optimizar la ubicación de turbinas eólicas, diseño de redes eléctricas y planificación de recursos.

Explicación del Diagrama (gráfico 6.3.)

1.Inicio: Se inicializa el algoritmo.

2.-Inicializar feromonas: Todas las rutas comienzan con la misma

cantidad de feromonas.

3.Iteración: Se repite el proceso hasta alcanzar el criterio de parada (por ejemplo, un número máximo de iteraciones o convergencia de las soluciones).

4.Generar caminos: Cada hormiga genera un camino (una solución) seleccionando rutas basadas en las probabilidades.

5.Evaluar caminos: Se calcula el costo total de cada camino generado.

6.Actualizar feromonas: Se reduce (evapora) la cantidad de feromonas en todas las rutas y se refuerzan las rutas utilizadas por las mejores soluciones.

7.Seleccionar mejor camino: Se guarda el mejor camino encontrado hasta el momento.

8.Condición de parada: Si se cumple el criterio de parada, el algoritmo termina.

9.Fin: Devuelve el mejor camino encontrado.

6.5.-CONCLUSIONES

La combinación de los enfoques aproximados y redes neuronales artificiales representa un enfoque poderoso para resolver problemas complejos de optimización combinatoria, programación lineal e investigación de operaciones.

- Los procedimientos de aproximación son ideales para soluciones rápidas y prácticas en problemas específicos.

- Las metaheurísticas amplían las capacidades de las heurísticas al permitir una exploración global del espacio de búsqueda y superar los óptimos locales.

- Las redes neuronales aportan capacidades de aprendizaje y modelado, lo que las hace ideales para problemas altamente no lineales y dinámicos.

La integración de estos enfoques con métodos exactos como la programación lineal permite abordar problemas de gran escala y alta complejidad de manera más eficiente y efectiva. Este enfoque híbrido no solo mejora la calidad de las soluciones, sino que también amplía el alcance de la investigación de operaciones hacia aplicaciones más desafiantes y realistas.

En el futuro, la evolución de algoritmos híbridos que combinen lo mejor de estos métodos continuará transformando el campo

de la optimización, proporcionando herramientas más potentes y versátiles para resolver los problemas más complejos del mundo real.

6.6.- CUESTIONARIO

6.6.1.-PREGUNTAS DE VERDADERO O FALSO

1. Los enfoques aproximados garantizan encontrar la solución óptima en todos los casos. (V) (F)
2. Las metaheurísticas son más flexibles y adaptativas que las heurísticas, permitiendo una exploración global del espacio de búsqueda. (V) (F)
3. El algoritmo del vecino más cercano es un ejemplo de una heurística constructiva. (V) (F)
4. Las redes neuronales artificiales (ANNs) son especialmente útiles en problemas donde las relaciones entre variables son lineales y fáciles de modelar. (V) (F)
5. La optimización por colonia de hormigas (ACO) es una metaheurística inspirada en el comportamiento de las hormigas para resolver problemas de grafos. (V) (F)
6. Las metaheurísticas son herramientas exactas que siempre encuentran la solución óptima. (V) (F)
7. El recocido simulado permite aceptar soluciones peores temporalmente para escapar de óptimos locales. (V) (F)
8. La programación lineal (PL) es limitada a problemas que pueden ser modelados de manera lineal, pero puede complementarse con heurísticas y metaheurísticas para abordar problemas más complejos. (V) (F)
9. Las redes neuronales artificiales no tienen aplicaciones en la optimización combinatoria. (V) (F)
10. Un enfoque híbrido que combine heurísticas, metaheurísticas y redes neuronales puede superar las limitaciones individuales de cada método y abordar problemas complejos de manera más eficiente. (V) (F)

6.6.2.- OPCIÓN MÚLTIPLE

Preguntas de Respuesta Múltiple

11. ¿Cuáles son los objetivos principales del capítulo sobre enfoque aproximado y redes neuronales?

a) Definir y contextualizar las heurísticas, metaheurísticas y redes neuronales.

b) Analizar las limitaciones y áreas de aplicación de los métodos exactos.

c) Explorar la interacción de estas técnicas con la programación lineal y la investigación de operaciones.

d) Proponer una perspectiva integrada que combine las técnicas para superar sus limitaciones individuales.

12. ¿Qué características definen a las heurísticas en problemas de optimización?

a) Garantizan encontrar la solución óptima.

b) Son rápidas y fáciles de implementar.

c) Ofrecen soluciones factibles y razonablemente buenas en poco tiempo.

d) Son útiles en problemas donde los métodos exactos son inviables debido al tamaño del espacio de búsqueda o restricciones computacionales.

13. ¿Cuáles de las siguientes técnicas son consideradas metaheurísticas?

a) Algoritmos genéticos.

b) Recocido simulado.

c) Algoritmo simplex.

d) Optimización por colonia de hormigas (ACO).

14. ¿Qué ventajas ofrecen las redes neuronales artificiales (ANNs) en problemas de optimización?

a) Aprender patrones complejos y generalizar a partir de datos.

b) Reducir el espacio de búsqueda al identificar restricciones implícitas.

c) Garantizar la solución óptima en cualquier problema.

d) Modelar problemas no lineales y proporcionar soluciones aproximadas.

15. ¿En qué contextos las metaheurísticas han demostrado ser herramientas valiosas?

a) Optimización de rutas.

b) Asignación de recursos en sistemas complejos.

c) Resolución exacta de problemas lineales.

d) Diseño de redes de comunicación o distribución.

6.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

16. Ruta más corta utilizando una heurística constructiva

Un repartidor necesita visitar 5 ciudades (A, B, C, D, E) partiendo desde su ciudad base (A). Las distancias entre las ciudades están dadas en la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E
A	0	10	15	20	25
B	10	0	35	25	30
C	15	35	0	30	20
D	20	25	30	0	15
E	25	30	20	15	0

a. Utiliza el algoritmo del vecino más cercano (heurística

constructiva) para encontrar una ruta aproximada que minimice la distancia total.

b. Parte desde la ciudad A y selecciona siempre la ciudad más cercana que aún no haya sido visitada.
c. Calcula la distancia total del recorrido propuesto.

17. Optimización de recursos con el recocido simulado (metaheurística)Un gerente debe asignar 4 trabajadores (W1, W2, W3, W4) a 4 proyectos (P1, P2, P3, P4). Cada trabajador tiene un costo diferente dependiendo del proyecto al que se le asigne, como se muestra en la tabla:

	P1	P2	P3	P4
W1	10	15	20	25
W2	20	10	25	30
W3	30	25	15	10
W4	25	20	10	16

18. Optimización por colonia de hormigas (ACO) para diseño de redes.

-Un sistema de transporte necesita conectar 6 nodos (ciudades) con carreteras para minimizar el costo total de construcción. Los costos entre los nodos están dados en la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F
A	0	4	8	0	0	0
B	4	0	2	6	0	0
C	8	2	0	3	9	0
D	0	6	3	0	5	7
E	0	0	9	5	0	4
F	0	0	0	7	4	0

6.7.-GLOSARIO

Algoritmos Basados en Poblaciones

Metaheurísticas que trabajan con un conjunto de soluciones simultáneamente, como los algoritmos genéticos y ACO.

Algoritmos Constructivos

Heurísticas que construyen soluciones paso a paso de manera incremental. Ejemplo: construir una ruta seleccionando siempre el nodo más cercano.

Algoritmos Genéticos (AG)

Metaheurística basada en los principios de la evolución biológica. Trabajan con una población de soluciones que evoluciona mediante selección, cruce y mutación.

Backtracking (Retroceso)

Técnica heurística que permite deshacer decisiones previas si estas conducen a soluciones no deseables.

Búsqueda Local

Técnica heurística que parte de una solución inicial y la mejora iterativamente explorando su vecindario.

Búsqueda Tabú

Metaheurística que utiliza una memoria adaptativa para evitar ciclos y explorar regiones no visitadas del espacio de búsqueda.

Espacio de Búsqueda

Conjunto de todas las posibles soluciones que se pueden explorar en un problema de optimización.

Evaporación de Feromonas

Proceso en ACO donde se reduce gradualmente la cantidad de feromonas en rutas no utilizadas para evitar la sobresaturación.

Función Objetivo

Función matemática que se busca maximizar o minimizar en un problema de optimización.

Greedy (Voraz)

Tipo de heurística que selecciona siempre la mejor opción local en cada paso, aunque esto pueda llevar a soluciones subóptimas globalmente.

Heurísticas

Métodos que ofrecen soluciones rápidas y aproximadas mediante reglas simples o conocimiento previo del problema. No garantizan la solución óptima, pero son útiles en problemas complejos o de gran escala.

Ejemplo: Algoritmo del vecino más cercano.

Investigación de Operaciones (IO)

Disciplina que aplica métodos analíticos avanzados para ayudar en la toma de decisiones. Se utiliza en logística, planificación y gestión de recursos.

Memoria Adaptativa

Técnica utilizada en búsqueda tabú para registrar soluciones visitadas y evitar ciclos.

Metaheurísticas

Estrategias generales que guían la búsqueda de soluciones en problemas de optimización. Son más flexibles y adaptativas que las heurísticas, permitiendo explorar el espacio de búsqueda de manera más efectiva.

Ejemplos: Recocido simulado, algoritmos genéticos, optimización por colonia de hormigas.

Optimización Combinatoria

Rama de las matemáticas aplicadas que busca encontrar soluciones óptimas o cercanas al óptimo en problemas donde el espacio de búsqueda es discreto y muy amplio. Ejemplos:

planificación de rutas, asignación de recursos y diseño de redes.

Optimización por Colonia de Hormigas (ACO)

Metaheurística que emula el comportamiento de las hormigas en la búsqueda de rutas óptimas. Se utiliza en problemas de grafos, como la planificación de rutas.

Óptimo Local

Solución que es mejor que las soluciones vecinas, pero no necesariamente la mejor solución global.

Problemas No Lineales

Problemas donde la función objetivo o las restricciones no son lineales. Ejemplo: relaciones complejas entre variables.

Programación Lineal (PL)

Técnica matemática para resolver problemas de optimización donde la función objetivo y las restricciones son lineales. Ejemplo: el algoritmo simplex.

Programación Lineal Entera Mixta (MILP)

Extensión de la programación lineal donde algunas variables deben tomar valores enteros.

Recocido Simulado (Simulated Annealing)

Metaheurística inspirada en el enfriamiento de metales. Permite aceptar soluciones peores temporalmente para escapar de óptimos locales y explorar otras regiones del espacio de búsqueda.

Redes Neuronales Artificiales (ANNs)

Modelos computacionales inspirados en el cerebro humano que procesan información y aprenden patrones a partir de datos. Son útiles para problemas no lineales o complejos, como la optimización combinatoria.

Reducción del Espacio de Búsqueda

Proceso de limitar el número de soluciones posibles a considerar, utilizando restricciones o patrones aprendidos.

SOLVER

Herramienta computacional utilizada para resolver problemas de optimización, especialmente en programación lineal.

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA

Edsger Dijkstra

La ruta más corta es un problema fundamental en la investigación de operaciones (IO) y la teoría de grafos. Su historia está profundamente ligada al desarrollo de algoritmos matemáticos y computacionales que han permitido resolver problemas de optimización en redes. A continuación, se presenta una exploración histórica del desarrollo de este método:

1. Orígenes en la Teoría de Grafos

La base del método de la ruta más corta se encuentra en la teoría de grafos, que comenzó a desarrollarse formalmente en el siglo XVIII.

1736: El Problema de los Puentes de Königsberg

Leonhard Euler resolvió el famoso problema de los siete puentes de Königsberg, sentando las bases de la teoría de grafos.

Aunque no estaba directamente relacionado con la ruta más corta, este trabajo introdujo conceptos fundamentales sobre cómo modelar problemas en términos de nodos y aristas.

Siglo XIX: Primeros avances en redes

En el siglo XIX, los matemáticos comenzaron a estudiar problemas relacionados con redes de transporte y flujos, especialmente en el contexto de la construcción de ferrocarriles y carreteras.

Se desarrollaron conceptos básicos como árboles de expansión mínima y conectividad, que son esenciales para resolver problemas de rutas.

2. Desarrollo del Algoritmo de Dijkstra (1956)

El algoritmo de Dijkstra es uno de los hitos más importantes en la historia del método de la ruta más corta.

CAPITULO 7. PROBLEMA DELAURY CON ALGORITO DE LA RUTA MAS CORTA

7.1.-OBJETIVOS

-Desarrollar modelo matemático de programación lineal para un problema de RUTA MAS CORTA.

-Resolver con SOLVER

-Aplicar Algoritmo RUTA MAS CORTA para resolver problemas de transporte.

-Solucionar problema prototípico con SOLVER y Algoritmo RUTA MAS CORTA

-Verificar resultados

7.2.-INTRODUCCION

Al ser los problemas de ruta más corta un caso de programación lineal, este puede ser resuelto a través de SOLVER, por lo que el ejemplo prototípico a ser usado (DELAURY), será resuelto primero por el paquete SOLVER., teniendo de esta manera un patrón de resultados con los que podremos confirmar el algoritmo de la RUTA MAS CORTA, que es el que usaremos para resolver este mismo problema.

7.3.-DESARROLLO

7.3.1.-SOLUCION DE RUTA MAS CORTA CON SOLVER

Desarrollaremos primero el modelo matemático de programación lineal para luego incorporarlo en una página de Excel, estableceremos la estructura general para SOLVER, colocando las fórmulas de las celdas y solicitando los informes de resultados. Esto lo haremos para el ejercicio prototípico de DELAURY S.A., desarrollado a continuación.

Edsger Dijkstra, un matemático e informático holandés, desarrolló el algoritmo que lleva su nombre para encontrar la ruta más corta desde un nodo inicial a todos los demás nodos en un grafo con pesos no negativos.

Este algoritmo fue publicado en 1959 y se convirtió en un estándar en la investigación de operaciones y la informática.

Aplicaciones iniciales: El algoritmo fue utilizado en problemas de planificación de rutas en redes de transporte y telecomunicaciones.

Características del algoritmo:

Utiliza una estructura de datos basada en colas de prioridad.

Es eficiente y tiene una complejidad temporal de O(V^2) en su versión básica, donde (V) es el número de nodos. Con estructuras avanzadas como montículos de Fibonacci, la complejidad se reduce a O(V \log V + E), donde (E) es el número de aristas.

3. Algoritmo de Bellman-Ford (1958)

Desarrollo:

En 1958, Richard Bellman y Lester Ford desarrollaron un algoritmo para resolver el problema de la ruta más corta en grafos con pesos negativos.

Este algoritmo es más general que el de Dijkstra, ya que puede manejar grafos con aristas de peso negativo, pero es menos eficiente en términos de tiempo de ejecución.

Importancia histórica:

Fue uno de los primeros algoritmos en introducir el concepto de relajación de aristas, que se convirtió en un principio clave en muchos métodos de optimización de redes.

Se aplicó en problemas de planificación de redes de transporte y en modelos económicos.

4. **Métodos Basados en Árboles de Expansión Mínima**

Aunque no están diseñados específicamente para la ruta más corta, los métodos de árboles de expansión mínima, como el algoritmo de Prim (1957) y el algoritmo de Kruskal (1956), influyeron en el desarrollo de técnicas para resolver problemas de redes.

7.3.2.-Ejercicio prototípico DELAURY S.A.con SOLVER

INTRODUCCION

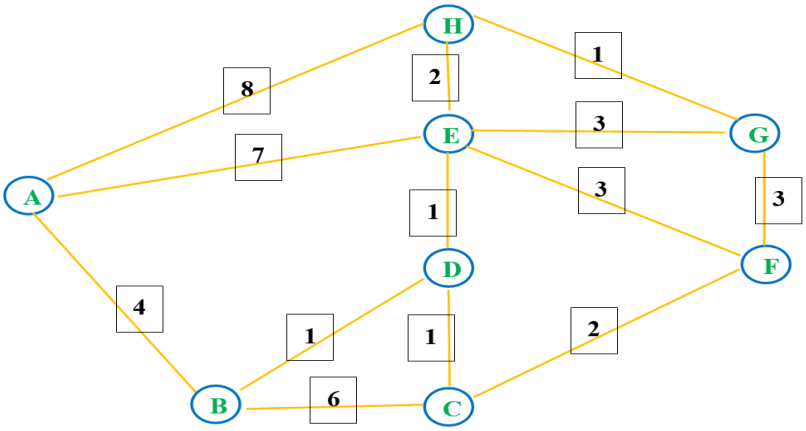
La Ingeniera Laura Celi, produce yogurt en sus instalaciones (DELAURY S.A.) ubicadas en la ciudad de Balsas, provincia de El Oro. Reparte sus productos a siete localidades de la Provincia, de acuerdo con el gráfico 7.1.

La Ingeniera Laura considera que el total de sus costos se minimizaría si pudiera asegurarse de que todos los envíos futuros a cualquiera de las localidades se realizaran siguiendo la ruta más corta. Por tanto, su objetivo consiste en especificar cuáles son las rutas más cortas desde las instalaciones de DELAURY en Balsas hasta cualquiera de las otras siete localidades.

El gráfico 7.1. Indica las distancias en kilómetros a cada localidad.

Gráfico 7.1.

Localidades a las que distribuye DELAURY



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

técnicas para resolver problemas de redes.

Conexión con la ruta más corta:

Estos métodos se utilizan como subrutinas en problemas más complejos de optimización de redes, como el diseño de redes de comunicación y distribución.

5. **Aplicaciones Prácticas en la Década de 1960**

Durante la década de 1960, los métodos de la ruta más corta comenzaron a aplicarse en una amplia variedad de problemas prácticos, gracias al auge de la investigación de operaciones y la disponibilidad de computadoras.

Problemas abordados:

-Planificación de rutas de transporte:

-Optimización de rutas para camiones y vehículos de reparto.

Ejemplo: Planificación de rutas de entrega para empresas de logística como UPS.

-Diseño de redes de telecomunicaciones:

-Optimización de rutas para transmisión de datos en redes telefónicas y computacionales.

-Gestión de tráfico urbano:

-Desarrollo de sistemas de control de tráfico en ciudades para minimizar tiempos de viaje.

6. Desarrollo de Métodos Avanzados (1970-1990)

Con el avance de la tecnología y la teoría de algoritmos, se desarrollaron métodos más sofisticados para resolver problemas de la ruta más corta.

1970: Algoritmo A*

El algoritmo A* es una extensión del algoritmo de Dijkstra que utiliza una función heurística para guiar la búsqueda hacia el objetivo.

Fue desarrollado por Peter Hart, Nils Nilsson y Bertram Raphael en 1968.

Aplicaciones: Utilizado en problemas de búsqueda de rutas en inteligencia artificial, como la navegación de robots y los sistemas de mapas digitales.

1980-1990: Redes dinámicas

Se desarrollaron algoritmos para resolver problemas de la ruta más corta en redes dinámicas

Solución con SOLVER:

Vamos a proporcionar un modelo de PL para el problema de la ruta más corta. El modelo es común de manera que puede utilizarse para determinar la ruta más corta entre cualquier par de nodos en la red.

Modelo matemático

De acuerdo con *(Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000).*

x_{ij} = cantidad de flujo en el arco (i,j) :

=1 si el arco (i,j) está en la ruta más corta

=0, en caso contrario

c_{ij} = longitud del arco (i,j)

Por lo tanto, la **función objetivo** del programa lineal es

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{\text{todos los arcos}(i,j)} C_{ij} X_{ij}$$

Las restricciones representan la **ecuación de la conservación del flujo** en cada nodo:

Flujo de entrada total = Flujo de salida total

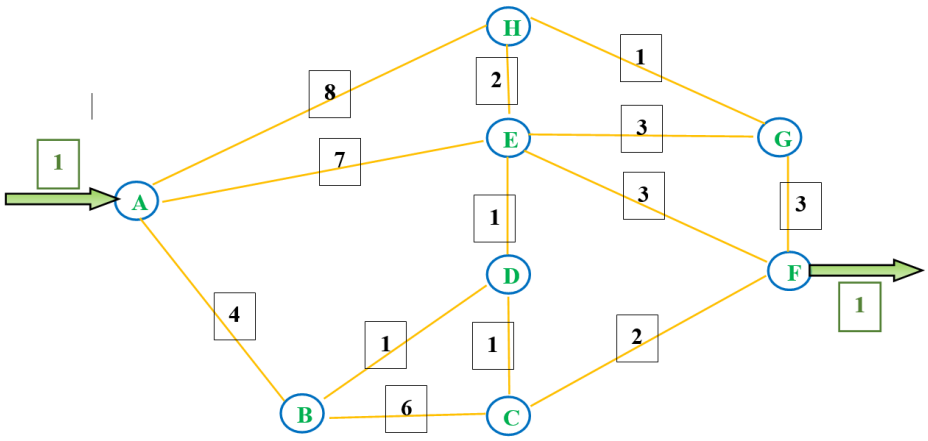
Matemáticamente, esto se traduce así para el nodo *j*

$$(\text{entrada externa al nodo j}) + \sum_{\text{arcos}(i,j)} X_{ij} = (\text{salida externa al nodo j}) + \sum_{\text{arcos}(j,k)} X_{jk}$$

Inicialmente encontraremos la ruta más corta entre los nodos A y F, el resto de las rutas cortas de A con todos los otros nodos se halla de igual manera, obteniendo una lista de todas las rutas más cortas desde el nodo A hasta cualquiera de los otros siete nodos.

Gráfico 7.2.

Ruta más corta entre Nodo A y nodo F. Inserción de un flujo unitario.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Tabla 7.1.

Estructura de las rutas de A a H.

Modelo de la RUTA MAS CORTA.								
CONECTIVIDAD DE/A:	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A	0	1	0	0	1	0	0	1
B	1	0	1	1	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	1	0	0
D	0	1	1	0	1	0	0	0
E	1	0	0	1	0	1	1	1
F	0	0	1	0	1	0	1	0
G	0	0	0	0	1	1	0	1
H	1	0	0	0	1	0	1	0

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

1980-1990: Redes dinámicas

Se desarrollaron algoritmos para resolver problemas de la ruta más corta en redes dinámicas, donde los pesos de las aristas cambian con el tiempo.

Estos métodos se aplicaron en sistemas de tráfico en tiempo real y planificación de rutas en redes de transporte aéreo.

7. Siglo XXI: Métodos Modernos y Aplicaciones en Gran Escala

En el siglo XXI, el problema de la ruta más corta ha evolucionado para abordar redes masivas y complejas, como las redes de Internet y los sistemas de transporte global.

Métodos modernos:

Algoritmos basados en grafos dinámicos:

Métodos como Dynamic Shortest Path se utilizan para redes donde los pesos cambian constantemente, como en sistemas de tráfico en tiempo real.

Optimización en Big Data:

Métodos paralelos y distribuidos, como los algoritmos basados en MapReduce, se utilizan para resolver problemas de la ruta más corta en redes masivas.

Heurísticas y metaheurísticas:

Métodos como algoritmos genéticos y optimización por colonia de hormigas (ACO) se utilizan para resolver problemas de rutas en redes no estructuradas o con restricciones complejas.

Aplicaciones modernas:

Sistemas de navegación GPS:

Los sistemas de navegación, como Google Maps y Waze, utilizan variantes del algoritmo de Dijkstra y A* para calcular rutas óptimas en tiempo real.

Redes sociales:

El análisis de redes sociales utiliza conceptos de la ruta más corta para medir la conectividad entre usuarios (por ejemplo, el concepto de "seis grados de separación").

En la tabla 7.1. Se indican las dos trayectorias posibles activas entre nodos con un +1. Y con un 0 en el caso de no existir conectividad.

Tabla 7.2.

Distancias en kilómetros entre nodos.

DISTANCIA DE/A:	A	B	C	D	E	F	G	H
A		4			7			8
B	4		6	1				
C		6		1		2		
D		1	1		1			
E	7			1		3	3	2
F			2		3		3	
G					3	3		1
H	8				2		1	

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Estas tablas (Tablas 7.1. y 7.2.) las ingresamos en la página de Excel (gráfico 7.2), con la que entregamos los valores requeridos para ejecutar SOLVER.

Gráfico 7.2.

Cuadro de ruta activa y de distancia entre nodos.

Nota: *gráfico de acuerdo con (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Transporte y logística:

Las empresas de logística global, como Amazon y FedEx, utilizan algoritmos avanzados para optimizar rutas de entrega.

8. Conclusión

El método de la ruta más corta ha evolucionado desde sus raíces en la teoría de grafos hasta convertirse en una herramienta fundamental en la investigación de operaciones y la informática. Desde el algoritmo de Dijkstra hasta los métodos modernos utilizados en sistemas de navegación y redes sociales, este problema ha sido clave para resolver desafíos prácticos en transporte, telecomunicaciones y análisis de datos. Su historia refleja el impacto de la investigación matemática y computacional en la resolución de problemas reales a lo largo del tiempo.

Tabla 7.3.

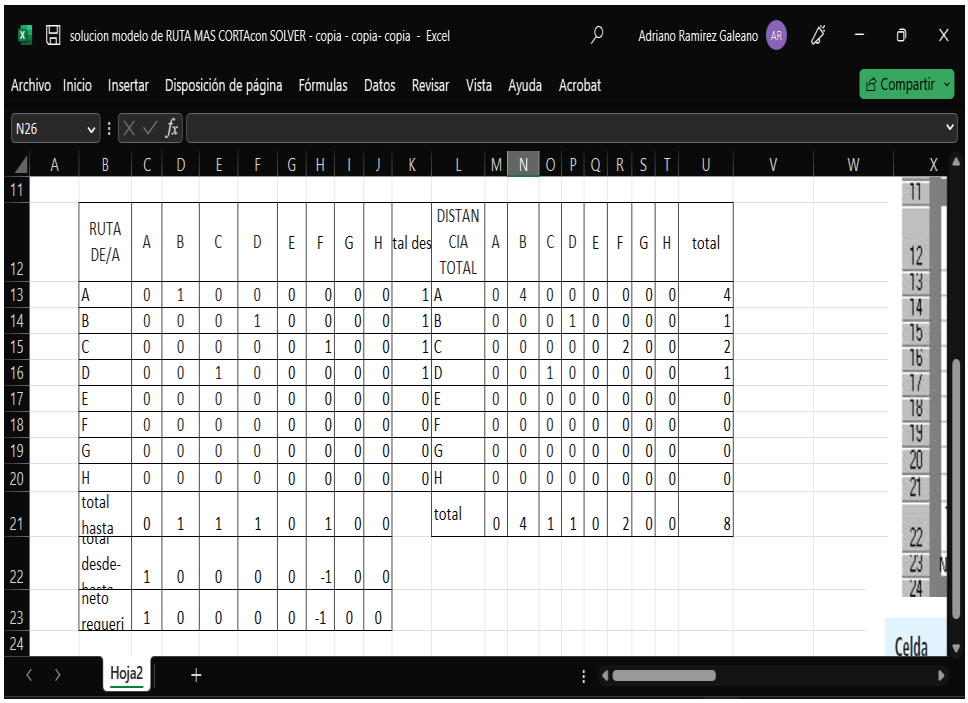
Formulas Excel problema DELAURY.

Celda	Fórmula	Cópiese a
M13	= C13*M3	M13:T20
C22	=K13-C21	C22:J22

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 7.3.

Cuadro de restricciones



RUTA DE/A	A	B	C	D	E	F	G	H	tal des
A	0	1	0	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	1	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	1	0	0	1
D	0	0	1	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0
total hasta	0	1	1	1	0	1	0	0	
total desde-hasta	1	0	0	0	0	-1	0	0	
neto requeri	1	0	0	0	0	-1	0	0	

DISTANCIA TOTAL	A	B	C	D	E	F	G	H	total
A	0	4	0	0	0	0	0	0	4
B	0	0	0	1	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	2	0	0	2
D	0	0	1	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0
total	0	4	1	1	0	2	0	0	8

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

La función objetivo será:

$$Z(min)= C_{AB}.X_{AB} + C_{BA}.X_{BA} + C_{AE}.X_{AE} + C_{EA}.X_{EA} + C_{AH}.X_{AH} + C_{HA}.X_{HA} + C_{BD}.X_{BD} +$$

$$C_{DB}.X_{DB} + C_{BC}.X_{BC} + C_{CB}.X_{CB} + C_{CD}.X_{CD} + C_{DC}.X_{DC} + C_{DE}.X_{DE} + C_{ED}.X_{ED}$$

$+ C_{EH} \cdot X_{EH} + C_{HE} \cdot X_{HE} + C_{CF} \cdot X_{CF} + C_{FC} \cdot X_{FC} + C_{EF} \cdot X_{EF} + C_{FE} \cdot X_{FE} + C_{HG} \cdot X_{HG}$

$+ C_{GH} \cdot X_{GH} + C_{EG} \cdot X_{EG} + C_{GE} \cdot X_{GE} + C_{FG} \cdot X_{FG} + C_{GF} \cdot X_{GF}$

c_{ij}= Costo de transporte entre nodos

X_{ij} = Variable de ruta activa. 1 si esta activa, 0 si no lo está.

Sujeto a:

(NODO A) $C_{AB} \cdot X_{AB} + C_{BA} \cdot X_{BA} + C_{AE} \cdot X_{AE} + C_{EA} \cdot X_{EA} + C_{AH} X_{AH} + C_{HA} \cdot X_{HA} = 1$

(NODO F) $C_{EF} \cdot X_{EF} + C_{FE} \cdot X_{FE} + C_{CF} \cdot X_{CF} + C_{FC} \cdot X_{FC} + C_{EF} \cdot X_{EF} + C_{FE} \cdot X_{FE} +$

$C_{FG} \cdot X_{FG} + C_{GF} \cdot X_{GF} = -1$

(NODO B) $C_{AB} \cdot X_{AB} + C_{BA} \cdot X_{BA} + C_{BD} \cdot X_{BD} + C_{DB} \cdot X_{DB} + C_{BC} \cdot X_{BC} + C_{CB} \cdot X_{CB} = 0$

(NODO H) $C_{AH} \cdot X_{AH} + C_{HA} \cdot X_{HA} + C_{EH} \cdot X_{EH} + C_{HE} \cdot X_{HE} + C_{HG} \cdot X_{HG} + C_{GH} \cdot X_{GH} = 0$

(NODO E) $C_{EH} \cdot X_{EH} + C_{HE} \cdot X_{HE} + C_{DE} \cdot X_{DE} + C_{ED} \cdot X_{ED} + C_{AE} \cdot X_{AE} + C_{EA} \cdot X_{EA}$

$+ C_{EG} \cdot X_{EG} + C_{GE} \cdot X_{GE} + C_{EF} \cdot X_{EF} + C_{FE} \cdot X_{FE} = 0$

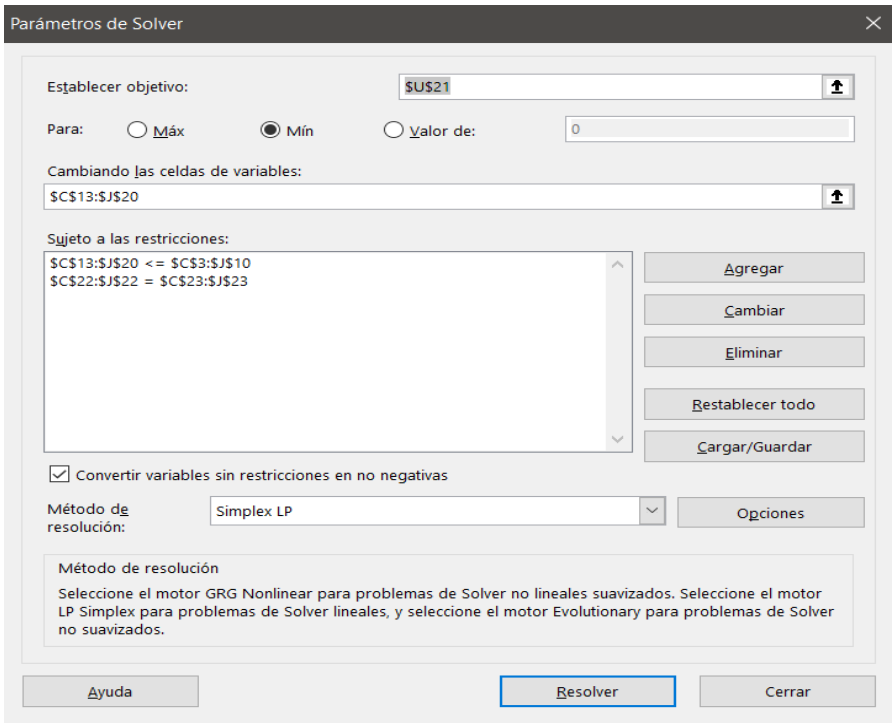
(NODO D) $C_{DE} \cdot X_{DE} + C_{ED} \cdot X_{ED} + C_{CD} \cdot X_{CD} + C_{DC} \cdot X_{DC} + C_{BD} \cdot X_{BD} + C_{DB} \cdot X_{DB} = 0$

(NODO C) $C_{CD} \cdot X_{CD} + C_{DC} \cdot X_{DC} + C_{BC} \cdot X_{BC} + C_{CB} \cdot X_{CB} + C_{CF} \cdot X_{CF} + C_{FC} \cdot X_{FC} = 0$

(NODO G) $C_{HG} \cdot X_{HG} + C_{GH} \cdot X_{GH} + C_{EG} \cdot X_{EG} + C_{GE} \cdot X_{GE} + C_{FG} \cdot X_{FG} + C_{GF} \cdot X_{GF} = 0$

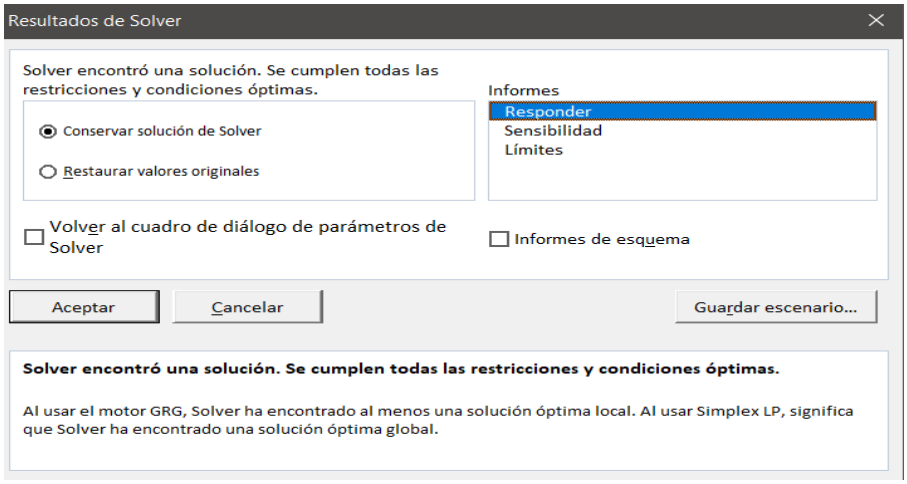
Gráfico 7.4.

Parámetros SOLVER, problema DELAURY.



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

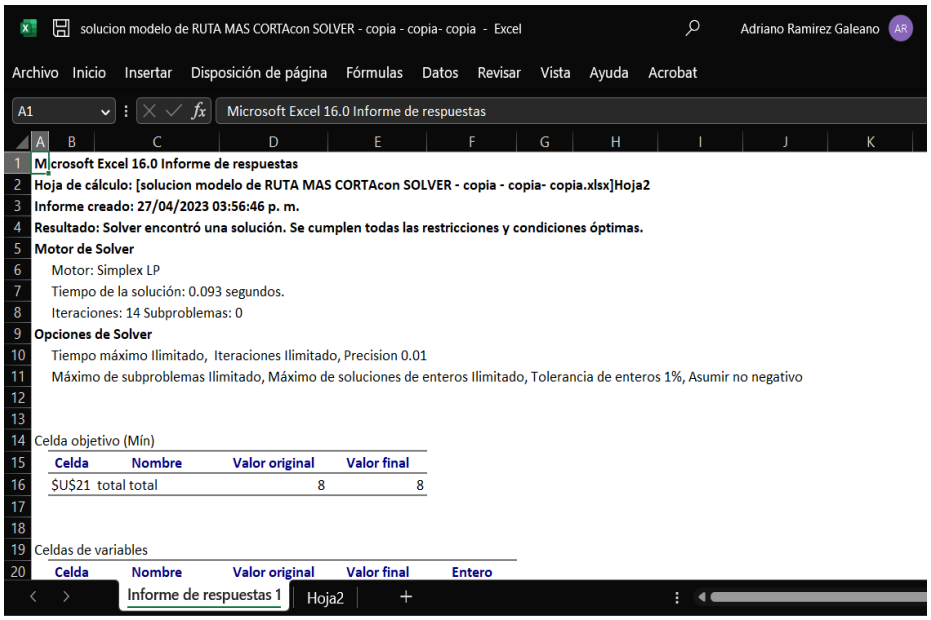
Gráfico 7.5. *Solicitud resultados de SOLVER problema DELAURY.*



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 7.6.

Informe de respuestas, función objetivo. problema DELAURY.



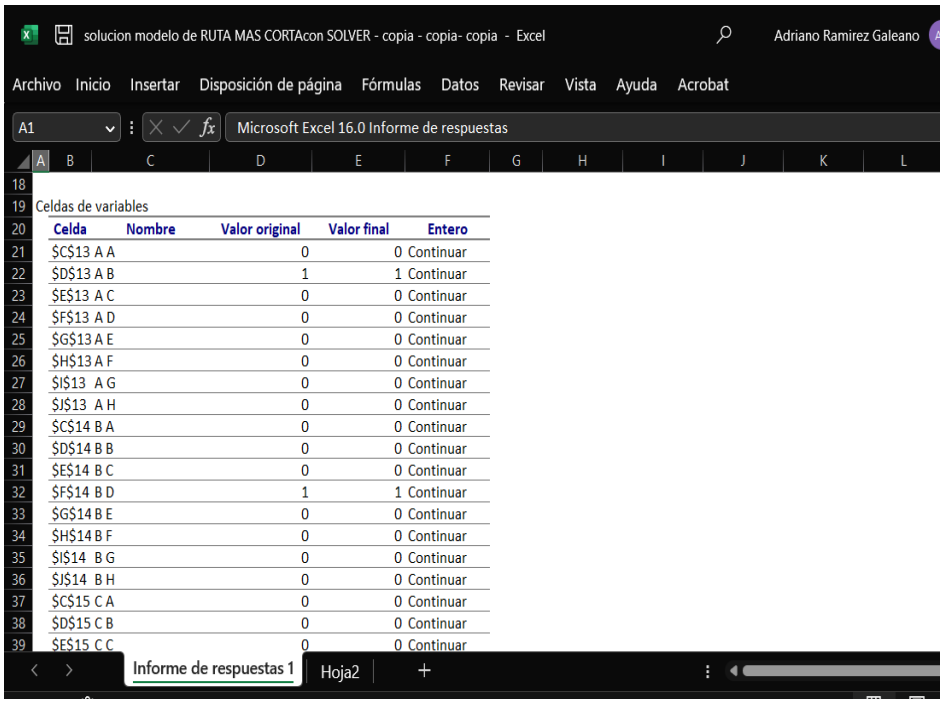
Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

La ruta más corta de **A a F**. tiene una distancia de 8

Kilómetros (gráfico 7.6.). Y su **ruta es A-B-D-C-F** (gráfico 7.7, 7.8, 7.9.).

Gráfico 7.7.

Estado activo de la ruta más corta. problema DELAURY.

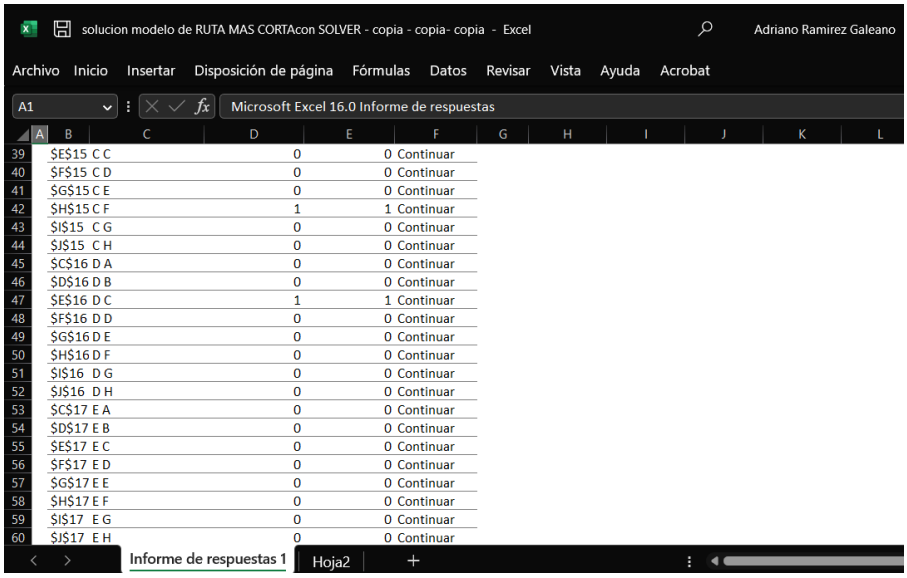


Celdas de variables				
Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$13	A A	0	0	Continuar
$D$13	A B	1	1	Continuar
$E$13	A C	0	0	Continuar
$F$13	A D	0	0	Continuar
$G$13	A E	0	0	Continuar
$H$13	A F	0	0	Continuar
$I$13	A G	0	0	Continuar
$J$13	A H	0	0	Continuar
$C$14	B A	0	0	Continuar
$D$14	B B	0	0	Continuar
$E$14	B C	0	0	Continuar
$F$14	B D	1	1	Continuar
$G$14	B E	0	0	Continuar
$H$14	B F	0	0	Continuar
$I$14	B G	0	0	Continuar
$J$14	B H	0	0	Continuar
$C$15	C A	0	0	Continuar
$D$15	C B	0	0	Continuar
$E$15	C C	0	0	Continuar

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 7.8.

Estado activo de la ruta más corta. problema DELAURY.



$E$15	C C	0	0	Continuar
$F$15	C D	0	0	Continuar
$G$15	C E	0	0	Continuar
$H$15	C F	1	1	Continuar
$I$15	C G	0	0	Continuar
$J$15	C H	0	0	Continuar
$C$16	D A	0	0	Continuar
$D$16	D B	0	0	Continuar
$E$16	D C	1	1	Continuar
$F$16	D D	0	0	Continuar
$G$16	D E	0	0	Continuar
$H$16	D F	0	0	Continuar
$I$16	D G	0	0	Continuar
$J$16	D H	0	0	Continuar
$C$17	E A	0	0	Continuar
$D$17	E B	0	0	Continuar
$E$17	E C	0	0	Continuar
$F$17	E D	0	0	Continuar
$G$17	E E	0	0	Continuar
$H$17	E F	0	0	Continuar
$I$17	E G	0	0	Continuar
$J$17	E H	0	0	Continuar

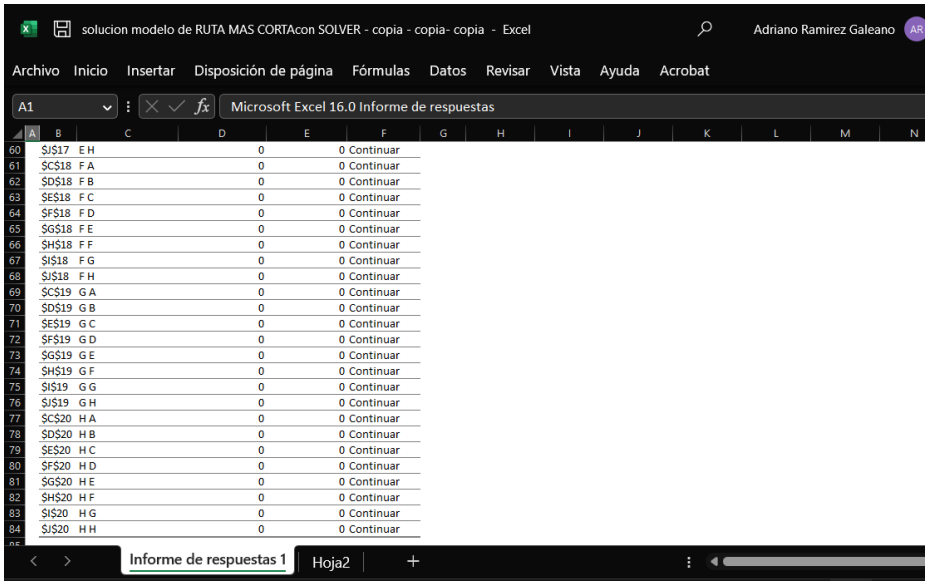
Solución del Problema DELAURY Utilizando SOLVER

Con lo que se verifica que los problemas de transporte se pueden solucionar por el METODO SIMPLEX

Nota: *Grafica según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 7.9.

Estado activo de la ruta más corta. problema DELAURY.



60	$J$17	E H	0	0	Continuar
61	$C$18	F A	0	0	Continuar
62	$D$18	F B	0	0	Continuar
63	$E$18	F C	0	0	Continuar
64	$F$18	F D	0	0	Continuar
65	$G$18	F E	0	0	Continuar
66	$H$18	F F	0	0	Continuar
67	$I$18	F G	0	0	Continuar
68	$J$18	F H	0	0	Continuar
69	$C$19	G A	0	0	Continuar
70	$D$19	G B	0	0	Continuar
71	$E$19	G C	0	0	Continuar
72	$F$19	G D	0	0	Continuar
73	$G$19	G E	0	0	Continuar
74	$H$19	G F	0	0	Continuar
75	$I$19	G G	0	0	Continuar
76	$J$19	G H	0	0	Continuar
77	$C$20	H A	0	0	Continuar
78	$D$20	H B	0	0	Continuar
79	$E$20	H C	0	0	Continuar
80	$F$20	H D	0	0	Continuar
81	$G$20	H E	0	0	Continuar
82	$H$20	H F	0	0	Continuar
83	$I$20	H G	0	0	Continuar
84	$J$20	H H	0	0	Continuar

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

7.3.3.-SOLUCION DE RUTA MAS CORTA CON ALGORITMO

Si tomamos una red con dos nodos propios a los que llamaremos *origen* y *destino*. A cada

ligadura (arco no dirigido) se asocia una *distancia* no negativa. Nuestra meta será encontrar la ruta más corta –la trayectoria con la mínima distancia total– del origen al destino.

Para realizar esto podemos utilizar el algoritmo de La RUTA MAS CORTA:

La esencia de este algoritmo es estudiar toda la red desde su origen; luego encontrar paso a paso la ruta más corta a cada uno de los nodos en orden ascendente de sus distancias (más cortas), desde el origen; el problema quedara solucionado al momento de llegar al nodo destino.

Google Map

Sistemas de Navegación GPS

Problema:

Los usuarios de aplicaciones como Google Maps, Waze o Apple Maps necesitan encontrar la ruta más rápida entre dos puntos, considerando factores como el tráfico en tiempo real, accidentes y restricciones de carreteras.

Solución:

El método de la ruta más corta, combinado con algoritmos como Dijkstra, A* y variantes optimizadas, se utiliza para calcular rutas óptimas en tiempo real.

Aplicación actual:

Sistemas de navegación vehicular, transporte público y planificación de rutas para ciclistas o peatones.

Este algoritmo lo desarrollaremos a continuación paso a paso utilizando un sistema etiquetado nodo a nodo en el ejercicio prototípico DELAURY:

Ejercicio prototípico DELAURY S.A.

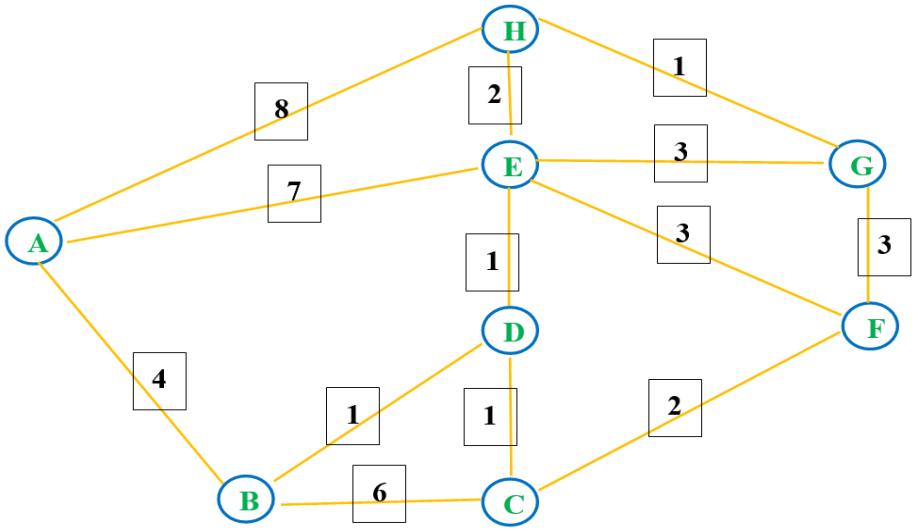
La Ingeniera Laura Celi, produce yogurt en sus instalaciones (DELAURY S.A.) ubicadas en la ciudad de Balsas, provincia de El Oro. Reparte sus productos a siete localidades de la Provincia, de acuerdo con el gráfico 7.10.

La Ingeniera Laura considera que el total de sus costos se minimizaría si pudiera asegurarse de que todos los envíos futuros a cualquiera de las localidades se realizaran siguiendo la ruta más corta. Por tanto, su objetivo consiste en especificar cuáles son las rutas más cortas desde las instalaciones de DELAURY en Balsas hasta cualquiera de las otras siete localidades.

El gráfico 7.10. Indica las distancias en kilómetros a cada localidad.

Gráfico 7.10.

Localidades a las que distribuye DELAURY:



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Logística y Reparto de Última Milla

Problema:

Empresas de comercio electrónico como Amazon, DHL, UPS y FedEx enfrentan el desafío de entregar paquetes de manera eficiente en zonas urbanas congestionadas.

Solución:

El método de la ruta más corta se utiliza para optimizar rutas de entrega, minimizando tiempos y costos.

Aplicación actual:

Optimización de rutas para flotas de vehículos de reparto.

Planificación dinámica de rutas ante cambios en las condiciones del tráfico o nuevas órdenes.

.

Transporte Público y Planificación de Rutas

Problema:

Los sistemas de transporte público necesitan ofrecer a los usuarios las rutas más rápidas y eficientes entre estaciones o paradas, considerando horarios y conexiones.

Solución:

El método de la ruta más corta se aplica para calcular rutas óptimas en sistemas de autobuses, trenes y metros.

Aplicación actual:

Apps como Moovit y Citymapper utilizan este método para sugerir rutas óptimas a los pasajeros.

Optimización de redes de transporte público en ciudades inteligentes.

SOLUCIÓN AIGORITMO RUTA MAS CORTA

Este sencillo algoritmo analiza toda la red a partir del origen; e identifica de manera continua la ruta más corta a cada uno de los nodos en orden ascendente de sus distancias (más cortas), desde el origen; el problema queda resuelto en el momento de llegar al nodo destino.

Este algoritmo localizara los recorridos más cortos entre **A** y los restantes nodos de **red (B, C, D, E, F, G, H).**

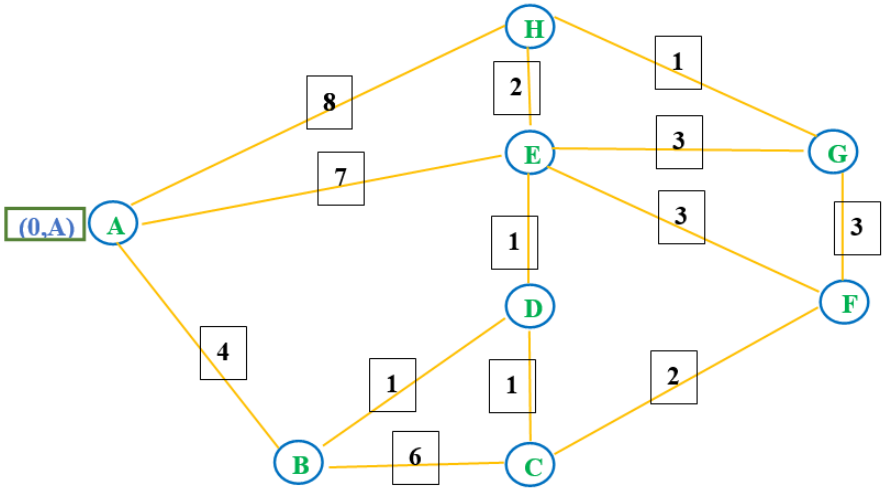
Este algoritmo hace uso de un sistema de etiquetas, las mismas que indican dos cantidades en paréntesis, separados por coma, el primero indica la distancia recorrida y el segundo el Nodo de donde viene. El color del texto será azul si es una etiqueta provisional y si el texto es rojo es permanente.

(0,H) ETIQUETA PROVISIONAL

(0,H) ETIQUETA PERMANENTE

Gráfico 7.11.

Nodo base



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Redes de Telecomunicaciones e Internet

Problema:

En redes de telecomunicaciones e Internet, es necesario enrutar datos de manera eficiente para garantizar una baja latencia y un uso óptimo del ancho de banda.

Solución:

Protocolos de enrutamiento como OSPF (Open Shortest Path First) y RIP (Routing Information Protocol) utilizan el método de la ruta más corta para determinar los caminos óptimos entre nodos.

Aplicación actual:

Optimización de redes de datos en tiempo real.

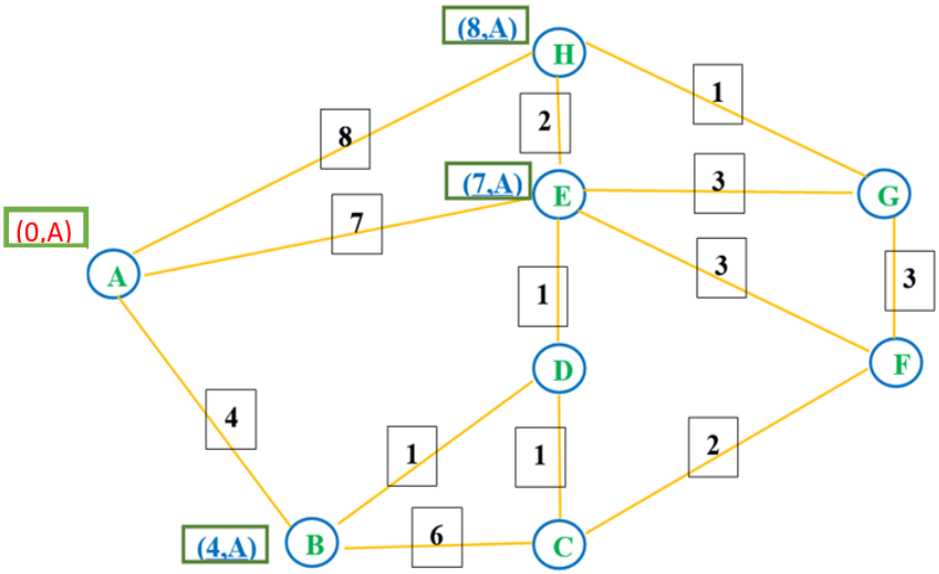
Gestión de tráfico en redes 5G y redes de fibra óptica.

PRIMER PASO

El nodo base A (gráfico 7.11.) es inicialmente **(0, A)**, el cual lo hacemos permanente:

Gráfico 7.12.

Nodo A, etiquetado permanente.



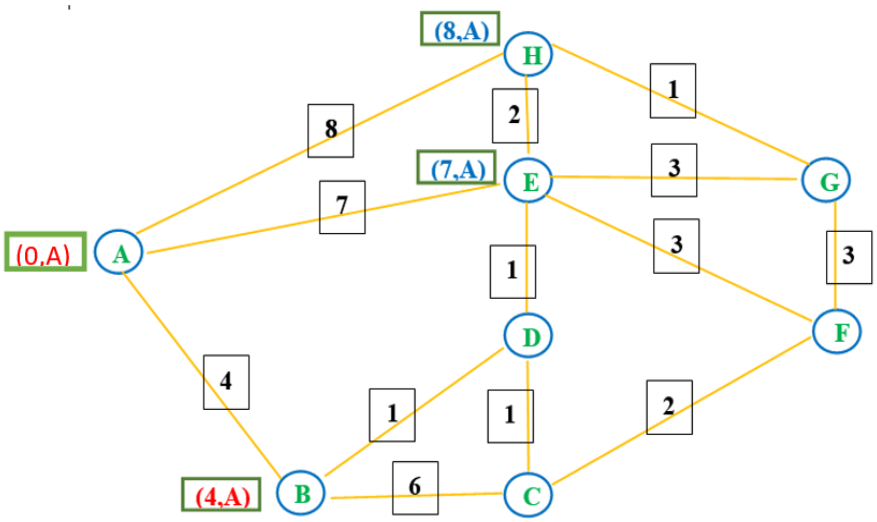
Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

SEGUNDO PASO: Observamos todos los nodos a un arco de distancia de la última etiqueta permanente. **NodoB, NodoH, NodoE**, y los etiquetamos provisionalmente, indicando distancia recorrida, y de que nodo proceden, gráfico 7.12.

Vemos todas las etiquetas provisionales, de toda la red, y verificamos cual es la que tiene una menor distancia. La misma que corresponde al **NodoB**, asignándole de esta manera la etiqueta de permanente (gráfico 7.13.).

Gráfico 7.13.

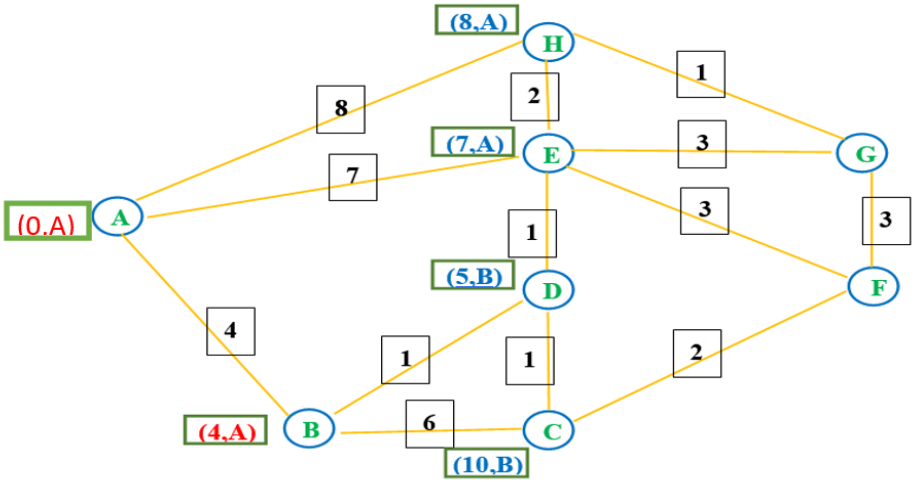
Etiqueta permanente Nodo B.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

TERCER PASO: Desde el ultimo nodo etiquetado permanente **(NodoB)**, etiquetamos los que están a un arco de distancia, estos son **NodoC, NodoD**. gráfico 7.14.

Gráfico 7.14. *Decisión Nodos provisionales en Nodo C.*



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Planificación de Redes de Energía

Problema:

Las compañías eléctricas necesitan diseñar redes que minimicen los costos de transmisión y maximicen la eficiencia del suministro eléctrico.

Solución:

El método de la ruta más corta se utiliza para optimizar las rutas de transmisión de energía entre generadores y consumidores.

Aplicación actual:

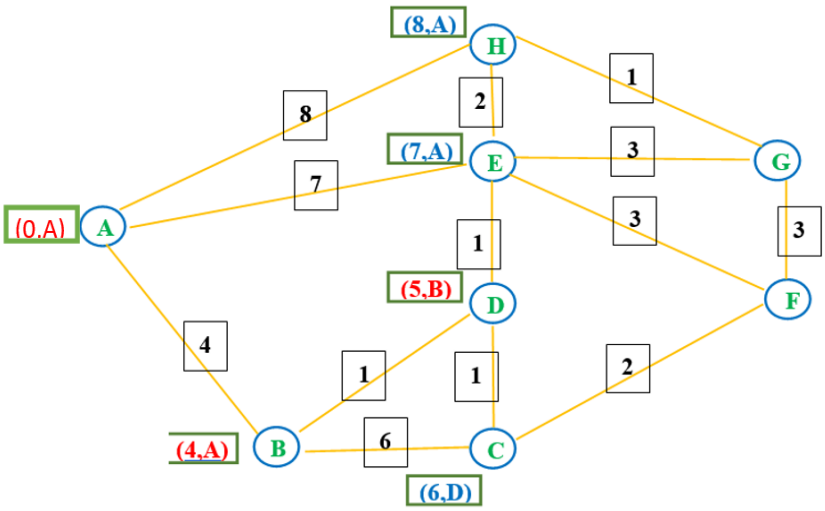
Redes de energía inteligentes (smart grids).

Optimización de la distribución de energía renovable (por ejemplo, parques eólicos y solares).

CUARTO PASO: Observamos las etiquetas provisionales, en toda la red, escogiendo la de menor distancia **(Nodo D)**, a la que hacemos permanente **Nodo D**, gráfico 7.15.

Gráfico 7.15.

Etiqueta permanente nodo D.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

QUINTO PASO: Desde el ultimo nodo permanente **(NodoD),** señalamos los nodos que están a un arco de distancia **(Nodo E, Nodo C)** (gráfico 7.16.). Escogiendo los nodos provisionales con las menores distancias en cada nodo (gráficos 7.17. y 7.18.).

Sistemas de Drones para Entregas

Problema:

Las empresas que utilizan drones para entregas necesitan planificar rutas óptimas para minimizar el consumo de energía y el tiempo de vuelo.

Solución:

El método de la ruta más corta, combinado con algoritmos avanzados, se utiliza para planificar rutas eficientes para drones.

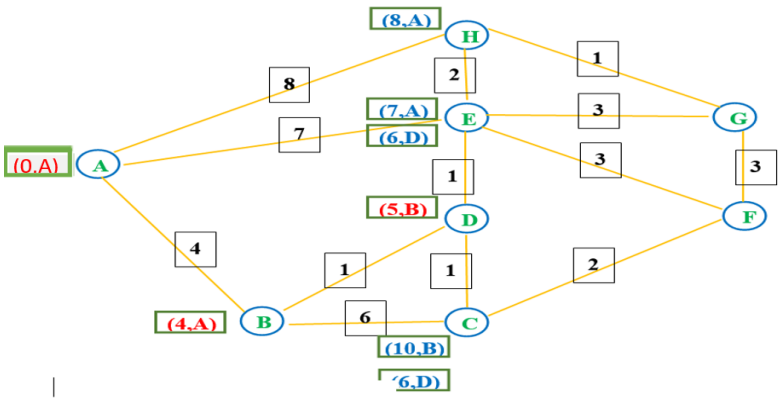
Aplicación actual:

Amazon Prime Air y otras iniciativas de entrega por drones.

Uso de drones en emergencias para entregar suministros médicos en áreas remotas.

Gráfico 7.16.

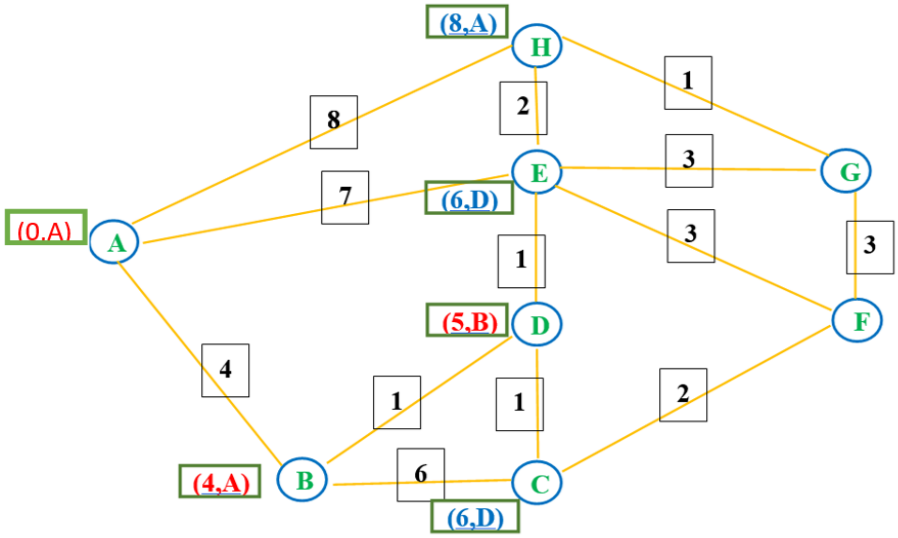
Etiquetas provisionales, Nodos E y Nodos C.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Gráfico 7.17.

Nodos provisionales definidos en Nodo E y Nodo C.



SEXTO PASO: Observamos las etiquetas provisionales, en toda la red, escogiendo la de menor distancia que está en el **(Nodo E)** (gráfico 7.18.).

Juegos y Simulaciones Virtuales

Problema:

En los videojuegos y simulaciones, los personajes controlados por inteligencia artificial (IA) necesitan moverse de manera eficiente en entornos complejos.

Solución:

El método de la ruta más corta, especialmente el algoritmo A*, se utiliza para calcular rutas óptimas en mapas de videojuegos.

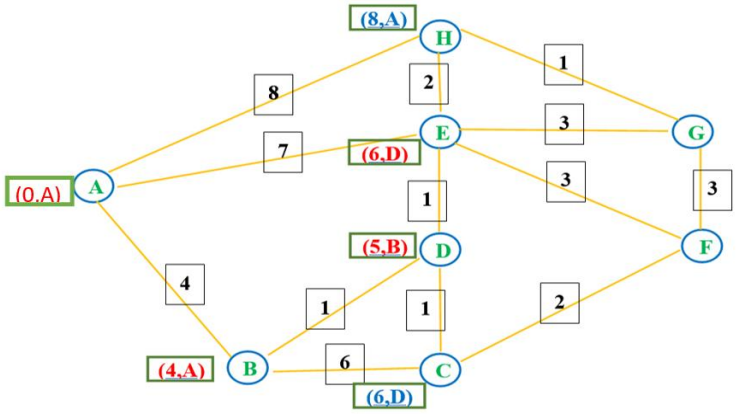
Aplicación actual:

Videojuegos como los de estrategia en tiempo real (RTS) y juegos de rol (RPG).

Simulaciones de evacuación en edificios y ciudades.

Gráfico 7.18.

Nodo permanente en ***(Nodo E).***

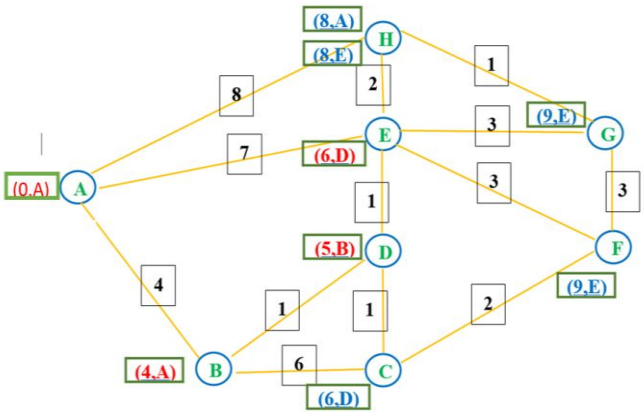


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

SEPTIMO PASO: Desde el ultimo nodo permanente **(NodoE),** señalamos los nodos que están a un arco de distancia **(Nodo H, Nodo G, Nodo F)** (gráfico 7.19.). Escogiendo los nodos provisionales con las menores distancias en cada nodo (gráficos 7.19. y 7.20.).

Gráfico 7.19.

Nodos provisionales obtenidos desde el Nodo permanente E.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Vehículos Autónomos

Problema:

Los vehículos autónomos necesitan calcular rutas óptimas en tiempo real para llegar a su destino de manera segura y eficiente.

Solución:

El método de la ruta más corta se utiliza en combinación con sensores y datos de tráfico en tiempo real para guiar a los vehículos autónomos.

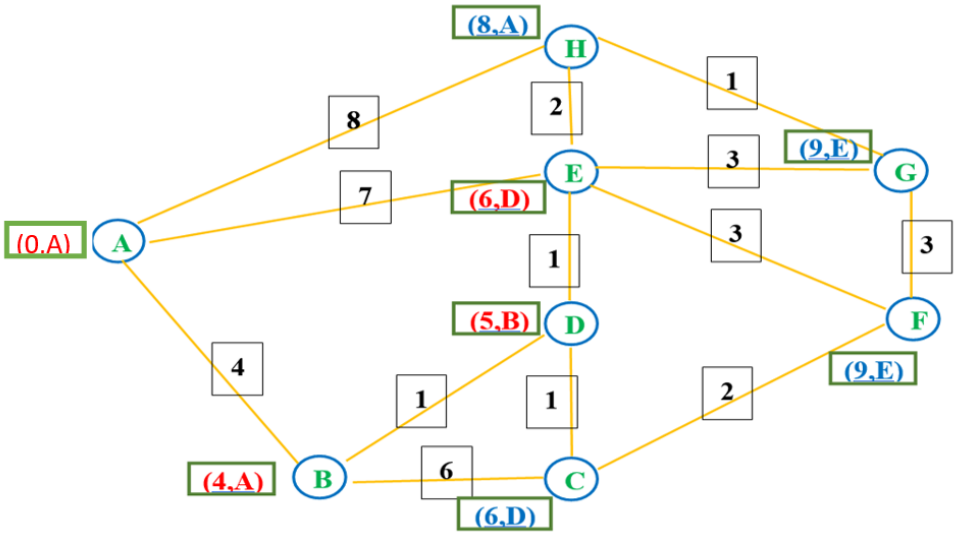
Aplicación actual:

Sistemas de navegación en vehículos autónomos como los de Tesla, Waymo y Uber.

OCTAVO PASO: Observamos las etiquetas provisionales (gráfico 7.20.), en toda la red, escogiendo la de menor distancia **(NodoC)**, a la que hacemos permanente (gráfico 7.21.).

Gráfico 7.20.

Etiquetas provisionales



Nota: *grafico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Análisis de Redes Biológicas

Problema:

En biología y medicina, los investigadores necesitan analizar rutas óptimas en redes complejas, como redes metabólicas o redes de interacciones genéticas.

Solución:

El método de la ruta más corta se utiliza para identificar rutas críticas en procesos biológicos.

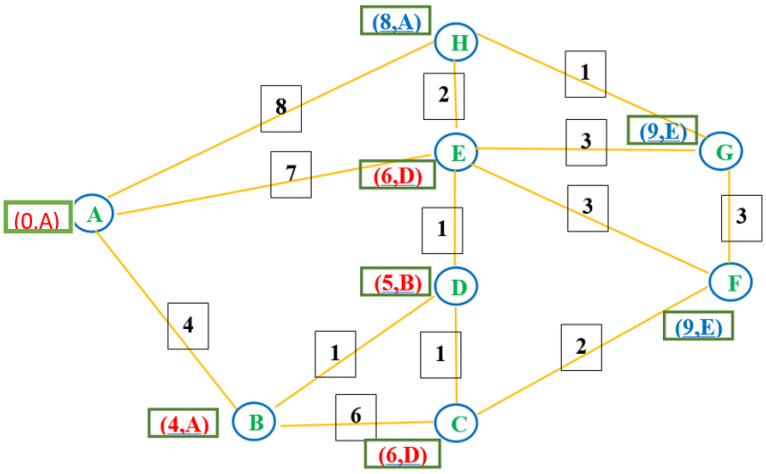
Aplicación actual:

Análisis de redes neuronales en el cerebro.

Identificación de rutas metabólicas en biología molecular.

Gráfico 7.21.

Etiqueta permanente Nodo C.

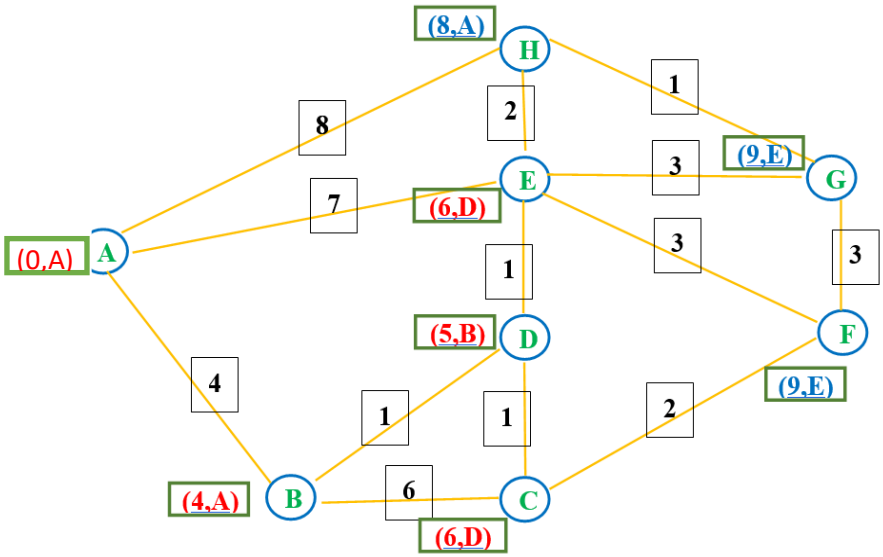


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

NOVENO PASO: Desde el ultimo nodo permanente **(Nodo C)**, señalamos los nodos que están a un arco de distancia **(Nodo F)** (gráfico 7.22.). Escogiendo los nodos provisionales con las menores distancias en cada nodo (gráficos 7.22. y 7.23.).

Gráfico 7.22.

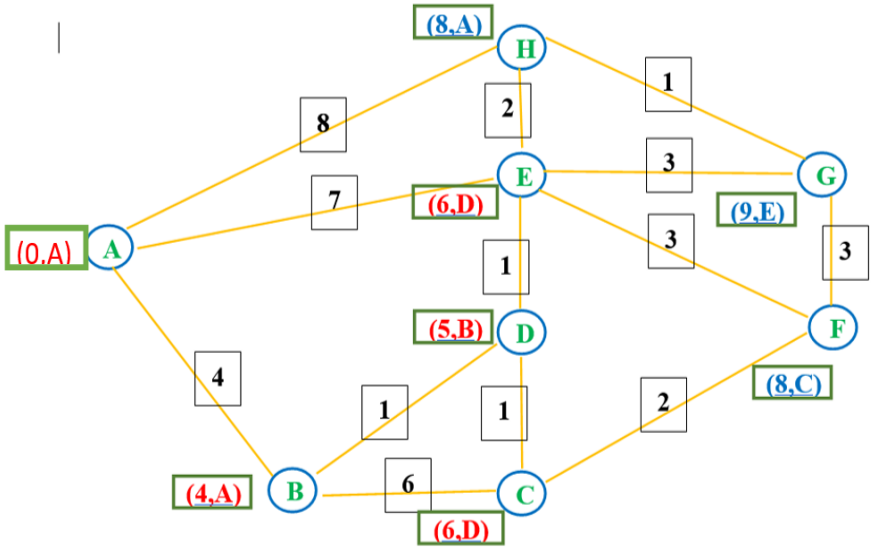
Nodos provisionales desde el Nodo C.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Gráfico 7.23.

Selección etiqueta provisional en el Nodo F.

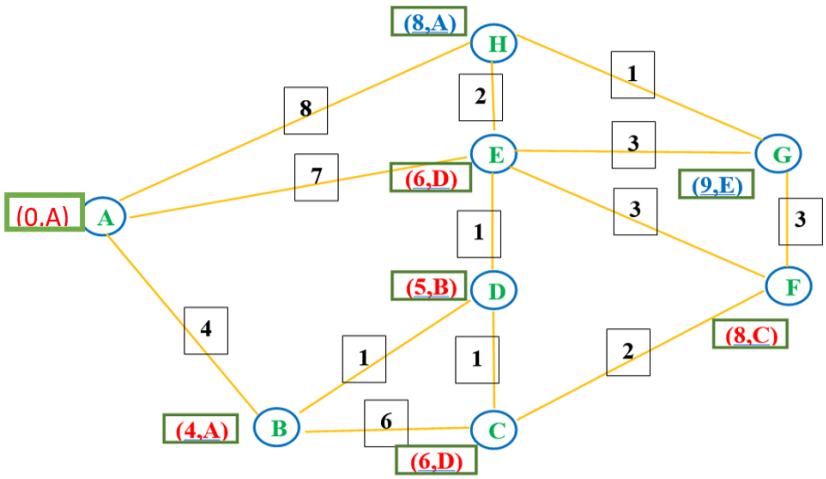


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

DECIMO PASO: Observamos las etiquetas provisionales (gráfico 7.23.), en toda la red, escogiendo la de menor distancia **(Nodo F)**, a la que hacemos permanente (gráfico 7.24.).

Gráfico 7.24.

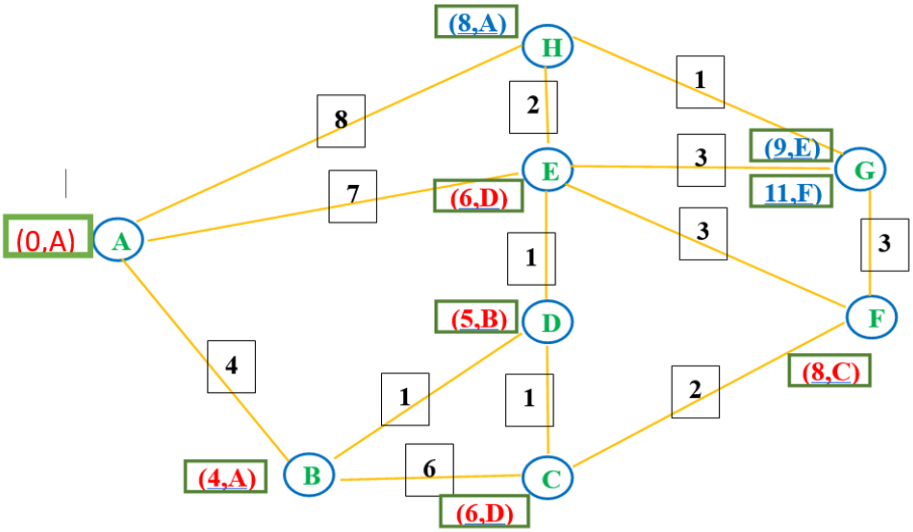
Etiqueta permanente Nodo F.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Gráfico 7.25.

Nodos provisionales desde el Nodo F.

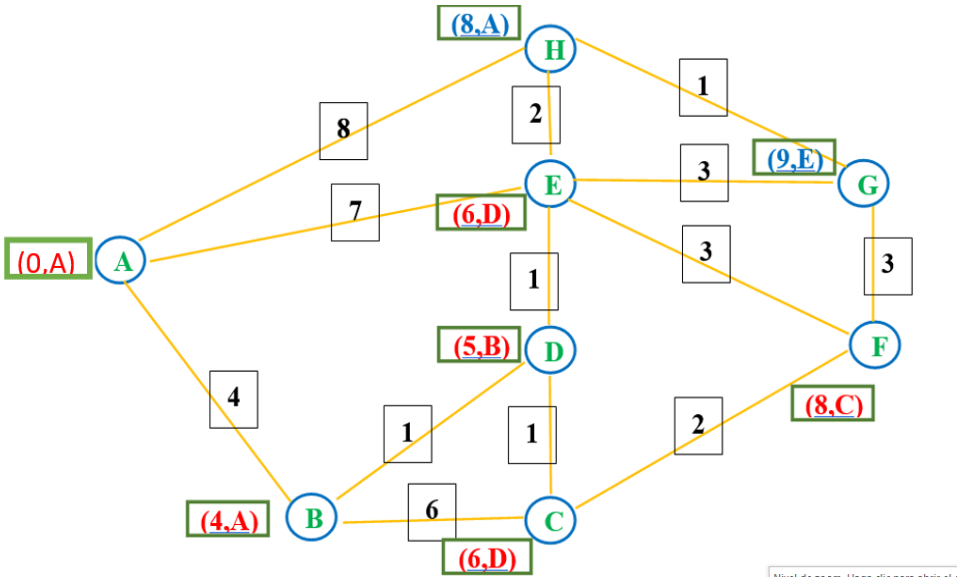


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

ONCEAVO PASO: Desde el ultimo nodo permanente **(Nodo F)**, señalamos los nodos que están a un arco de distancia **(Nodo G)** (gráfico 7.25). Escogiendo los nodos provisionales con las menores distancias en cada nodo (gráfico 7.26.).

Gráfico 7.26.

Selección etiqueta provisional en el Nodo G.

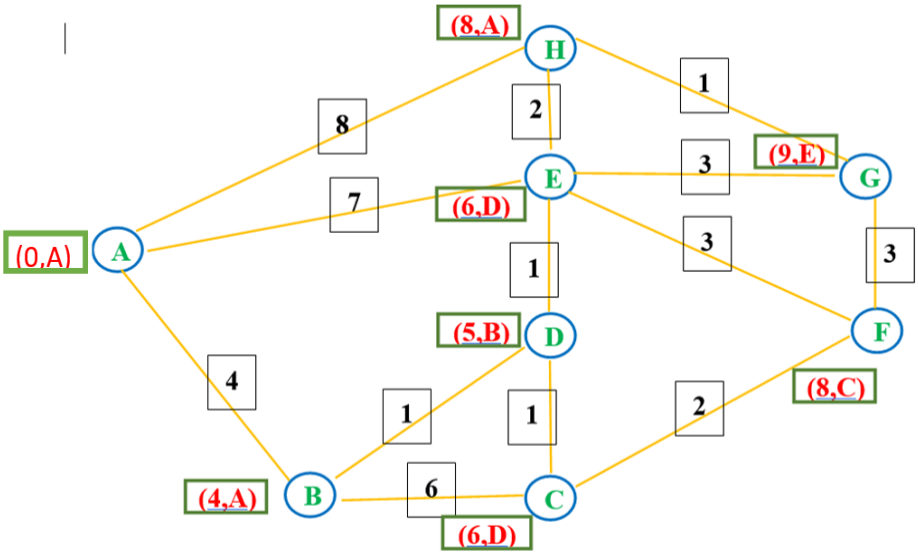


Nota: *grafico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

DOCEAVO PASO: Observamos las etiquetas provisionales (gráfico 7.26.), en toda la red, escogiendo la de menor distancia **(Nodo H)**, a la que hacemos permanente (gráfico 7.27.).

Gráfico 7.27.

Etiqueta permanente Nodo G.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

TRECEAVO PASO: Solo nos quedan los **Nodos (H y G)**. Por lo que los etiquetamos permanentemente (gráfico 7. 27.).

CATORCEAVO PASO: con el gráfico 7.27. Podemos dar por

terminado el etiquetado, permitiéndonos realizar la tabla1. Con todas las rutas más cortas desde el **Nodo A**, a cualquiera de los otros **Nodos (B, C, D, E, F, G, H).**

Tabla 7.3.

Ruta más corta desde Nodo A, hasta cualquier otro Nodo.

NODO	RUTA MAS CORTA DESDE EL NODO A	DISTANCIA
B	A-B	4
C	A-B-D-C	6
D	A-B-D	5
E	A-B-D-E	6
F	A-B-D-C-F	8
G	A-B-D-E-G	9
H	A-H	8

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

7.4.-CONCLUSIONES

-El problema de la ruta más corta, fue solucionado por medio de SOLVER, y después con la aplicación del algoritmo de la ruta más corta, se confirmó su exactitud al compararlos.

Estos problemas son muy frecuentes en la administración, por lo que su análisis y solución abren nuevas áreas de investigación en el campo de los análisis de redes. Sobre todo, al poder ser utilizados como parte de sistemas más amplios

7.5.-CUESTIONARIO

7.5.1.-VERDADERO-FALSO

1. En una etiqueta permanente, para el algoritmo de la ruta más corta, corresponda a la distancia mínima entre la base y el nodo. (V) (F)
2. El conjunto de todas las ramas que corresponden a los caminos más cortos desde un nodo base, hasta el resto de los nodos, se denomina árbol de rutas más cortas. (V) (F)
3. El algoritmo de la ruta más corta estudia toda la red desde su nodo origen hasta su nodo destino; encontrando los caminos más cortos entre nodos en orden ascendente. (V) (F)
4. En este algoritmo se usan dos tipos de etiquetas, la permanente y la provisional. (V) (F)
5. El algoritmo de la ruta más corta indica, que desde el último nodo permanente, se deben observar todos los nodos a un paso de distancia, y marcarlos con etiquetas provisionales. (V) (F)

7.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

9.- Perfeccionar un modelo de PI, significa:

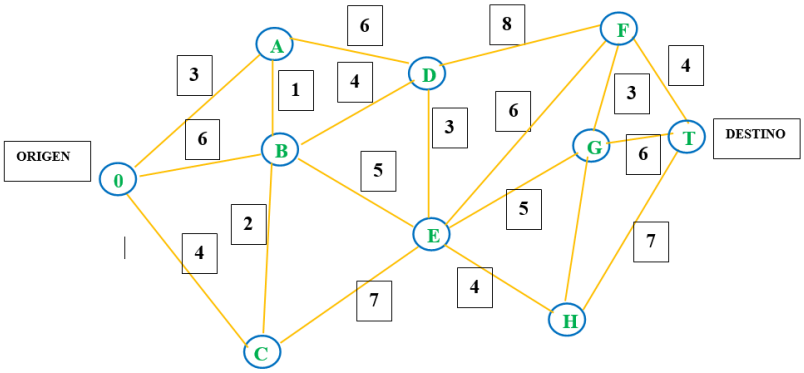
a. Incrementar el VO en los modelos de maximización.

b. Decrementar el VO en los modelos de minimización.

c. Tanto **a** como **b**

7.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

10.- El departamento de bomberos de una ciudad, también debe dar apoyo inmediato a una ciudad cercana que no posee cuerpo de bomberos, Las rutas que puede tomar se muestran en el gráfico. Hallar la ruta más corta hasta esta ciudad.



7.5.-GLOSARIO

Modelo de asignación.

Modelo para determinar la asignación óptima de *n* agentes u objetos "indivisibles" a *n* tareas.

Modelo de la ruta más corta.

Modelo para encontrar el camino más corto, dentro de una red, desde un nodo específico (el origen) hasta otro nodo.

Modelo de red.

En general, se refiere al modelo de transbordo con capacidades o alguna de sus formas especiales.

Modelo de transbordo con capacitado.

Modelo de red donde las ofertas están en puntos de origen específicos, las demandas se localizan en puntos de destino específicos y las diversas alternativas de embarque se ofrecen a través de nodos intermedios, siguiendo rutas cuyas

capacidades están definidas desde los orígenes hasta los destinos.

Modelo de transporte.

Modelo de PL para encontrar la forma menos costosa de satisfacer demandas en *n* destinos con suministros de *m* orígenes.

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA

Gustav Kirchhoff

La exploración histórica del método del árbol de expansión mínima en el campo de la investigación de operaciones revela su evolución como una herramienta fundamental para resolver problemas de optimización en redes. Este método ha sido desarrollado y perfeccionado a lo largo de las décadas, impulsado por las necesidades prácticas en áreas como la ingeniería, la informática y la logística. A continuación, se presenta un recorrido histórico por su desarrollo:

1. **Orígenes del problema del árbol de expansión mínima**

El problema del árbol de expansión mínima (AEM) tiene sus raíces en la teoría de grafos, una rama de las matemáticas que comenzó a desarrollarse en el siglo XVIII con el trabajo de Leonhard Euler y su famoso problema de los puentes de Königsberg (1736). Aunque este trabajo no abordó directamente el problema del AEM, sentó las bases para el análisis de redes y grafos, que sería esencial para su desarrollo posterior.

En el siglo XIX, Gustav Kirchhoff (1847) introdujo el concepto de árboles en el análisis de circuitos eléctricos, lo que marcó uno de los primeros usos prácticos de los árboles en problemas de optimización. Sin embargo, el problema del AEM como tal no fue formalizado hasta el siglo XX.

2. Formalización en la investigación de operaciones

El problema del AEM surgió formalmente en el contexto de la investigación de operaciones durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se buscaban métodos para optimizar redes de transporte, comunicaciones y suministro. La investigación

CAPITULO 8. ALGORITMO ARBOL DE EXPANSION MINIMA

8.1.-OBJETIVOS

-Aplicar Algoritmo ARBOL DE EXPANSION MINIMA para resolver problemas de transporte.

-Solucionar problema prototípico con el algoritmo ARBOL DE EXPANSION MINIMA

-Analizar resultados

8.2.-INTRODUCCION

Al ser los problemas de ARBOL DE EXPANSION MINIMA un caso de programación lineal, este puede ser resuelto a través de SOLVER, por lo que el ejemplo prototípico a ser usado (SENAGUA), será resuelto primero por el paquete SOLVER., teniendo de esta manera un patrón de resultados con los que podremos confirmar el algoritmo del ARBOL DE EXPANSION MINIMA, que es el que usaremos para resolver este mismo problema.

El algoritmo de árbol de expansión mínima conectara los nodos de una red, en forma directa o indirecta, con la mínima distancia de las ramas conectoras. Una aplicación característica es en la construcción de red de telefonía que integrara varias ubicaciones. Una conexión entre dos zonas podría pasar por una o más localidades. La solución más económica será la que conecte todas las localidades desde cualquier punto con la menor distancia, este resultado lo podremos obtener aplicando el algoritmo de árbol de expansión mínima.

operaciones, como disciplina, se consolidó en este período debido a la necesidad de resolver problemas complejos relacionados con la logística y la planificación.

En este contexto, el problema del AEM fue formulado como un problema de optimización en redes: dado un conjunto de nodos y las conexiones posibles entre ellos, encontrar un subconjunto de conexiones que conecte todos los nodos con el menor costo total y sin formar ciclos.

3. Desarrollo de algoritmos para el árbol de expansión mínima

El desarrollo de algoritmos eficientes para resolver el problema del AEM comenzó en la década de 1950, con contribuciones clave de varios matemáticos e investigadores:

1956: Algoritmo de Kruskal

Joseph Kruskal desarrolló un algoritmo basado en la selección iterativa de los arcos de menor peso que no formen ciclos. Este algoritmo es uno de los más conocidos y utilizados para resolver el problema del AEM.

1957: Algoritmo de Prim

Robert C. Prim propuso un enfoque alternativo, en el que se comienza con un nodo inicial y se agregan iterativamente los arcos de menor peso que conecten nodos no visitados al árbol en construcción. Este algoritmo también es ampliamente utilizado y ha sido optimizado en implementaciones modernas.

1965: Algoritmo de Borůvka

Otakar Borůvka, un matemático checo, desarrolló un algoritmo similar en 1926 para resolver problemas de electrificación en Moravia. Aunque su trabajo fue anterior al de Kruskal y Prim, no fue ampliamente reconocido hasta décadas más tarde.

Estos algoritmos sentaron las bases para el uso del AEM en la investigación de operaciones y se aplicaron a una amplia variedad de problemas prácticos.

8.3.-DESARROLLO

8.3.1. ARBOL DE EXPANSION MINIMA CON SOLVER.

-SOLUCION DE EJERCICIO PROTOTÍPICO (SENAGUA) CON SOLVER

Desarrollaremos primero el modelo matemático de programación lineal para luego incorporarlo en una página de Excel, estableceremos la estructura general para SOLVER, colocando las fórmulas de las celdas y solicitando los informes de resultados. Esto lo haremos para el ejercicio prototípico de (SENAGUA), desarrollado a continuación.

Ejercicio prototípico (SENAGUA). con SOLVER.

Vamos a proporcionar un modelo de PL para el problema de (SENAGUA). El modelo es común de manera que puede utilizarse para determinar el árbol de expansión mínima entre cualesquier nodos en la red.

De acuerdo con *(Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000).*

Modelo matemático

x_{ij} = cantidad de flujo en el arco (i,j) :

=1 si el arco (i,j) está en la ruta más corta

=0, en caso contrario

c_{ij} = longitud del arco (i,j)

Por lo tanto, la **función objetivo** del programa lineal es

x_{ij}: Cantidad de flujo en el arco (i, j): Vendría siendo el agua

c_{ij} = longitud del arco (i, j): las distancia en kilómetros

La **función objetivo** del programa lineal es:

4. Aplicaciones prácticas históricas

A lo largo de su desarrollo, el método del AEM ha encontrado aplicaciones en diversos campos:

Redes de transporte y logística: Optimización de rutas de transporte para minimizar costos de construcción o mantenimiento.

Sistemas eléctricos: Diseño de redes eléctricas para minimizar el costo de instalación de cables y conexiones.

Telecomunicaciones: Construcción de redes de telefonía y datos, asegurando la conexión de todas las estaciones con el menor costo posible.

Diseño de redes de agua y gas: Planificación de sistemas de distribución para minimizar el costo de tuberías.

Estas aplicaciones prácticas impulsaron la investigación en métodos más eficientes para resolver el problema del AEM.

5. Avances modernos y aplicaciones contemporáneas

En las últimas décadas, el método del AEM ha evolucionado gracias a los avances en la computación y la teoría de algoritmos. Algunos hitos modernos incluyen:

Optimización computacional: Implementación de los algoritmos de Kruskal y Prim en software de análisis de redes y herramientas como Solver en Excel.

Teoría de la complejidad: Análisis de la eficiencia de los algoritmos del AEM, lo que ha llevado al desarrollo de variantes más rápidas y escalables.

Aplicaciones en informática: Uso del AEM en problemas de diseño de redes de computadoras, sistemas de archivos y gráficos computacionales.

Además, el AEM ha sido un componente clave en el desarrollo de la teoría de redes complejas, que estudia sistemas interconectados en áreas como biología, sociología y economía.

$$Z(Min)=11X_{AB}+8X_{AC}+20X_{BC}+16X_{BE}+17X_{BF}+8X_{CE}+9X_{CD}+12X_{DE}+19X_{DG}+10X_{EG}+20X_{FG}+9X_{EF}$$

Sujeto a:

$X_{AC} \leq 8$

$X_{AB} \leq 11$

$X_{CD} \leq 9$

$X_{CE} \leq 8$

$X_{EF} \leq 9$

$X_{EG} \leq 10$

$\sum X_{ij} \leq n-1$

Lo que se hizo fue armar una matriz de datos, en este caso tenemos 7 nodos, por lo tanto, van a ver 7 filas y 7 columnas (Tabla 8.1.).

Definimos las que tienen conexión directa con un 1 y las que no tienen conexión directa con un cero.

En la tabla1 se muestran los valores de la conectividad para cada nodo respectivo que ha sido marcado con 1, es decir que existe una trayectoria directa; de igual forma los valores que no conectan tienen un valor de cero porque sus nodos no conectan directamente.

Tabla 8.1.

Matriz de Datos

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A	0	1	1	0	0	0	0
B	1	0	1	0	1	1	0
C	1	1	0	1	1	0	0
D	0	0	1	0	1	0	1
E	0	1	1	1	0	1	1
F	0	1	0	0	1	0	1
G	0	0	0	1	1	1	0

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

6. Conclusión

El método del árbol de expansión mínima es un ejemplo destacado de cómo un problema matemático teórico puede tener un impacto profundo en aplicaciones prácticas. Su desarrollo, desde los fundamentos de la teoría de grafos hasta las aplicaciones modernas en investigación de operaciones, refleja la interacción entre la teoría matemática y las necesidades del mundo real. Hoy en día, el AEM sigue siendo una herramienta esencial en la optimización de redes y sistemas complejos.

Tabla 8.2.

Matriz de distancias entre nodos

DISTANCIA DE/A:	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**Total**
A		11	8					10
B	11		20		16	17		64
C	8	20		9	8			45
D			9		12		19	40
E		16	8	12		9	10	55
F		17			9		20	46
G				19	10	20		49
Total	19	64	45	40	55	46	49	318

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Se coloca el valor menor de cada fila, exceptuando el valor del nodo fuente, ubicándolos en el lado derecho de la matriz

(Tabla 8.3.), y también debajo de cada columna se coloca el resultado de su suma.

Tabla 8.3.

Matriz de distancia ruta mínima por nodo y sumatoria de variables

NODO	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**sumatoria**
A	0	0	8	0	0	0	0	8
B	11	0	0	0	0	0	0	11
C	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	9	0	0	0	0	9
E	0	0	8	0	0	0	0	8
F	0	0	0	0	9	0	0	9
G	0	0	0	0	10	0	0	10
sumatoria	11	0	25	0	19	0	0	

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Estas tablas las ingresamos en la página de Excel, con la que entregamos los valores requeridos para ejecutar SOLVER.

Primero Colocamos en Excel, la Tabla 8.2., es decir la matriz de distancias entre los nodos la cual debe ser simétrica, es decir que tiene el mismo número de filas y mismo número de columnas, y equilibrada porque la sumatoria de los nodos de filas y columnas dan un mismo valor; Primero Sumamos en orden columna por columna los valores de las celdas para esto, ocupamos esta fórmula: =SUMA(E7:E14) y así sucesivamente hasta la columna G repitiendo el mismo procedimiento y para las filas colocamos la suma de los valores de las celdas manualmente de su fila respectiva y los ponemos en una columna contigua. Observamos y recalcamos que la matriz es simétrica, por lo tanto, su diagonal va a ser de ceros cuando los nodos de las rutas coincidan entre sí, por lo que no existe el concepto de una conexión de un nodo consigo mismo,

Para sacar la función objetivo se multiplica variable por la sumatoria de cada columna y se los suma con la variable que tiene a un lado y así sucesivamente hasta llegar a G, y de esta forma se minimiza la distancia total desde un nodo hacia todos.

Para cada fila de los nodos las multiplicamos por la variable que colocamos en la parte de arriba las cuales van a ir multiplicadas por variables binarias que pueden ser 1 o 0 en caso de que exista conexión en esa columna irá 1 y si no existe contendrá 0, una vez hecho esto se suman con los nodos continuos y se repite el procedimiento.

Electrificación en Moravia (1926)

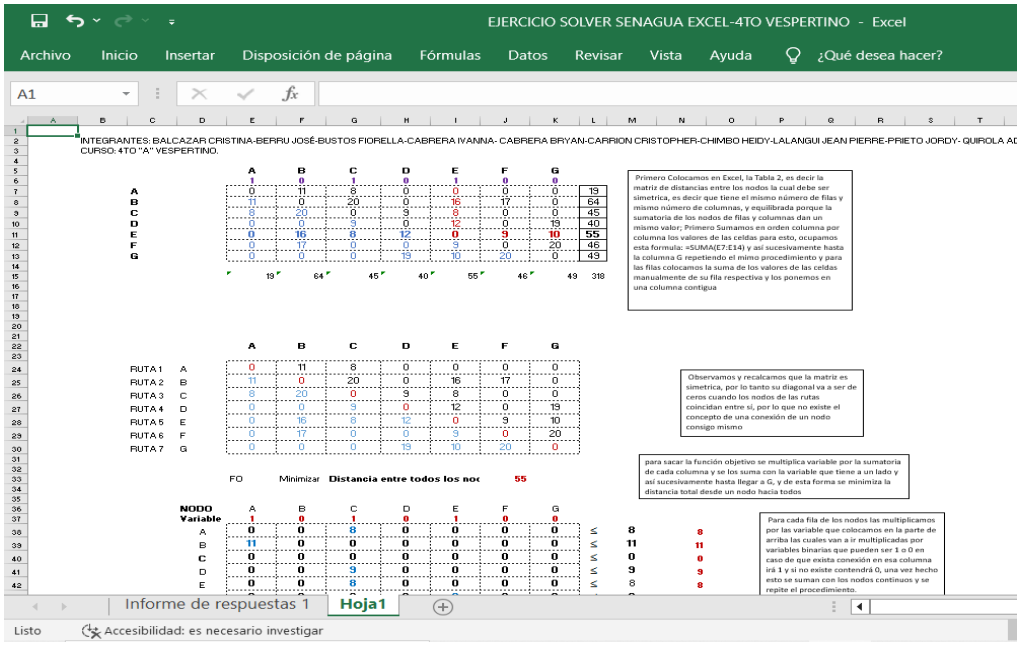
Problema: Diseñar una red eléctrica que conectara varias localidades de Moravia (actual República Checa) con el menor costo posible.

Solución: El matemático checo Otakar Borůvka desarrolló un algoritmo para encontrar el árbol de expansión mínima que minimizara la longitud total de los cables eléctricos necesarios. Este fue uno de los primeros problemas prácticos resueltos utilizando un enfoque similar al AEM.

Impacto: Este trabajo sentó las bases para el desarrollo posterior de algoritmos como los de Kruskal y Prim.

Gráfico 8.1.

Tablas ingresadas en Excel.



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Construcción de redes ferroviarias (Siglo XIX y XX)

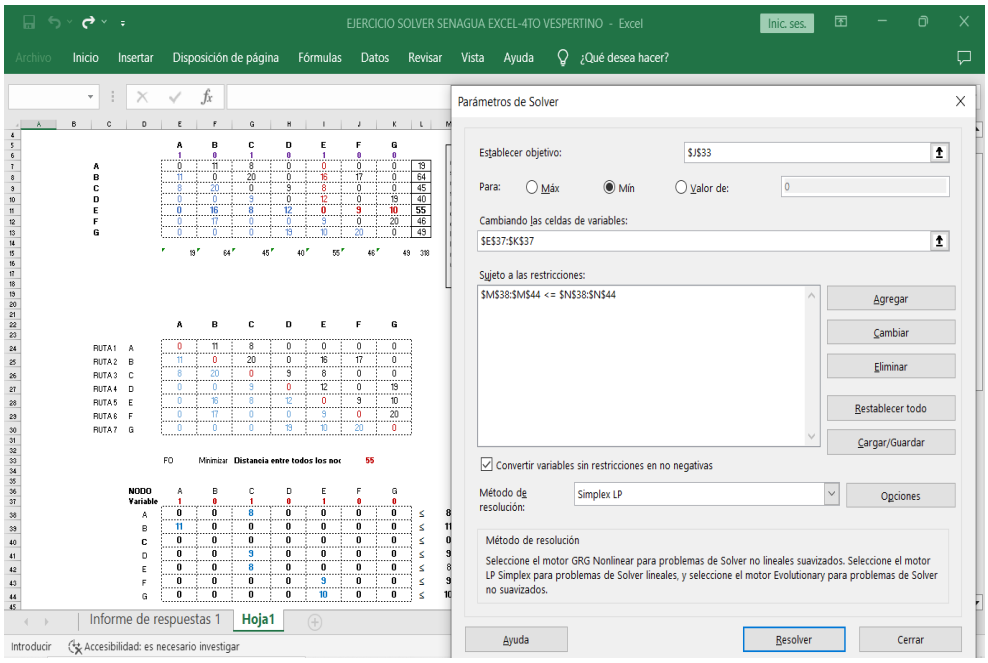
Problema: Durante la expansión de las redes ferroviarias en Europa y América, se buscaba diseñar rutas que conectaran varias ciudades minimizando los costos de construcción y mantenimiento.

Solución: Aunque los métodos formales del AEM aún no existían, los principios del árbol de expansión mínima se aplicaron intuitivamente para seleccionar rutas óptimas. Posteriormente, con la formalización del AEM, se utilizó en la planificación de redes ferroviarias modernas.

Impacto: Ayudó a reducir costos y mejorar la conectividad entre ciudades, impulsando el comercio y la movilidad.

Gráfico 8.2

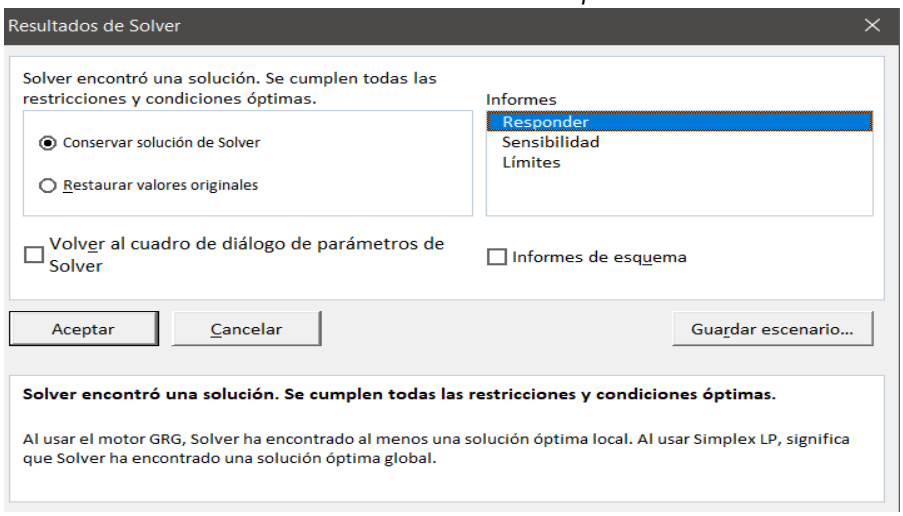
Parámetros SOLVER, problema SENAGUA.



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 8.3

Solicitud resultados de SOLVER problema SENAGUA



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Diseño de redes telefónicas (Década de 1950)

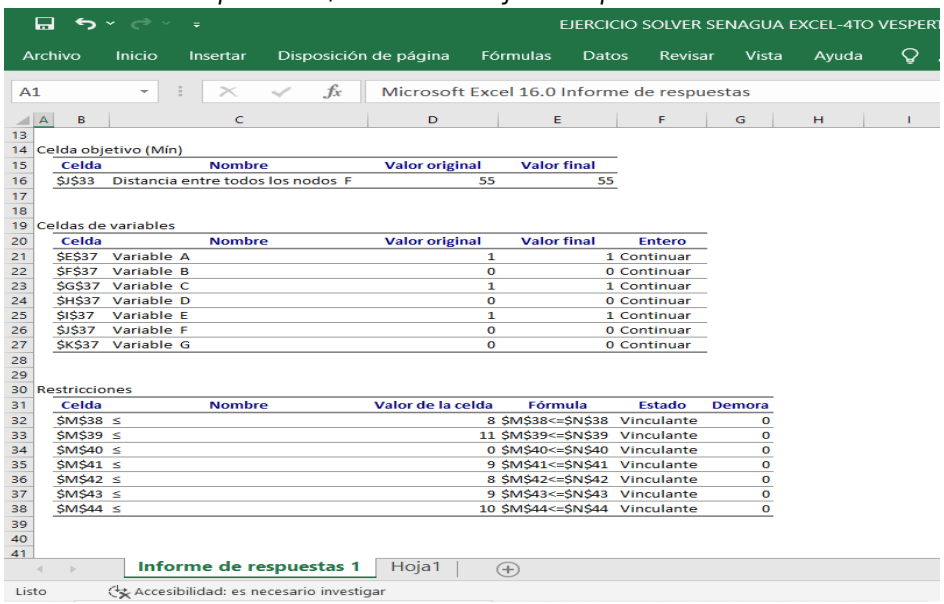
Problema: Durante la expansión de las redes de telecomunicaciones, las compañías telefónicas buscaban conectar estaciones telefónicas en áreas urbanas y rurales minimizando el costo de los cables.

Solución: El método del árbol de expansión mínima se utilizó para determinar las conexiones óptimas entre estaciones, asegurando que todas estuvieran conectadas con la mínima longitud total de cableado.

Impacto: Este enfoque permitió una rápida expansión de las redes telefónicas en países como Estados Unidos y Europa, reduciendo significativamente los costos de instalación.

Gráfico 8.4.

Informe de respuestas, función objetivo. problema SENAGUA.



Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$J$33	Distancia entre todos los nodos F	55	55

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$E$37	Variable A	1	1	Continuar
$F$37	Variable B	0	0	Continuar
$G$37	Variable C	1	1	Continuar
$H$37	Variable D	0	0	Continuar
$I$37	Variable E	1	1	Continuar
$J$37	Variable F	0	0	Continuar
$K$37	Variable G	0	0	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$M$38 ≤		8	$M$38<=$N$38	Vinculante	0
$M$39 ≤		11	$M$39<=$N$39	Vinculante	0
$M$40 ≤		0	$M$40<=$N$40	Vinculante	0
$M$41 ≤		9	$M$41<=$N$41	Vinculante	0
$M$42 ≤		8	$M$42<=$N$42	Vinculante	0
$M$43 ≤		9	$M$43<=$N$43	Vinculante	0
$M$44 ≤		10	$M$44<=$N$44	Vinculante	0

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos A, C, E, D, F, G, B, con una distancia mínima de 55 Kms.

Como vemos, el algoritmo de la ruta más corta permite elaborar una distribución de nodos desde un origen específico, a cualquier otro nodo de la red; sin importar desde donde se parte, el resultado siempre es igual por cuanto se trata de una matriz diagonal donde la suma de las entradas siempre será igual a las salidas para que el modelo se minimice.

De igual forma el algoritmo del árbol de expansión mínima permite vincular todos los nodos sin importar cual sea el origen, y llegar a los mismos resultados a que si se lo hace a través del método de programación lineal usando las herramientas como SOLVER para minimizar las rutas y por

ende los costos de desplazamiento, tiempo o materiales de construcción como en este caso SENAGUA y los pozos profundos que abastecen agua al cantón Arenillas.

- *Comentarios. En teoría, un árbol de mínima expansión puede formularse y resolverse como un programa lineal. Sin embargo, la PL no es una opción práctica porque deben agregarse numerosas restricciones para excluir todos los ciclos y el resultado es una PL enorme, aun para redes pequeñas.* (Taha, 2017, p. 213).

Optimización de rutas de transporte de petróleo

Problema: Conectar varios puntos de extracción de petróleo con refinerías o estaciones de distribución minimizando la longitud total de los oleoductos.

Solución: El AEM se utilizó para determinar las rutas óptimas de los oleoductos, reduciendo costos de construcción y mantenimiento.

Impacto: Ayudó a optimizar las operaciones en la industria petrolera, especialmente en regiones con múltiples puntos de extracción.

8.3.2.-ALGORITMO ARBOL DE EXPANSION MINIMA

Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993) los pasos a seguir son:

PASO 1. Comenzaremos en cualquier nodo de la red, realizaremos la primera conexión con el arco de menor distancia. Estos pasaran a ser un solo bloque al que llamaremos conectados. Los otros nodos seguirán siendo llamados desconectados.

PASO 2. Verificaremos todos los nodos a un arco de distancia del bloque generado en el paso 1. Escogeremos el de menor distancia. Y este nodo pasara a ser denominado conectado, y a ser parte de todo el bloque de conectados.

PASO 3. Repetiremos estos dos pasos hasta que todos los nodos pasen al estado conectado. El bloque resultante al final será el árbol de expansión mínima.

Desarrollaremos un ejemplo prototípico (SENAGUA), en el que explicaremos paso a paso dicho algoritmo.

EJERCICIO PROTOTÍPICO (SENAGUA). CON ARBOL DE EXPANSION MINIMA

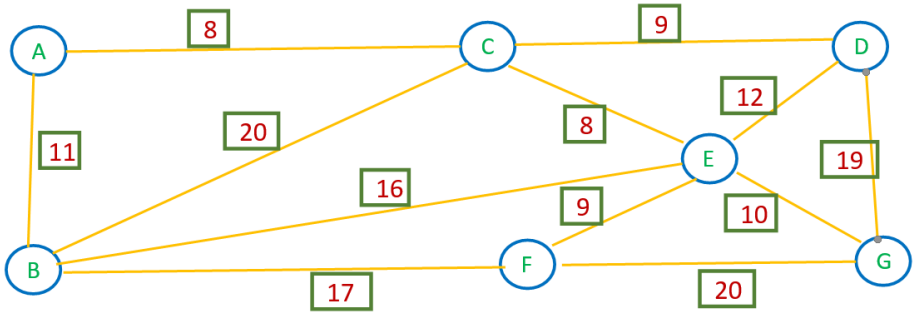
Problema distribución agua potable (SENAGUA).

SENAGUA administra siete pozos profundos, con los que abastece de agua a la ciudad de arenillas, cuando no hay servicio normal de la planta de agua potable. Los siete pozos

están interconectados de acuerdo con el grafico1. Alimentando cada uno un punto de distribución en la ciudad. En caso de solo poder utilizar un pozo ala ves. ¿Cuál sería la distribución que daría la menor distancia para abastecer todos los puntos de distribución, desde cualquier pozo?

Gráfico 8.1.

Distribución Pozos profundos, con su distancia en kilómetros.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

SOLUCION

Seleccionamos cualquier nodo para iniciar el procedimiento.

Utilizaremos el formato dado por la tabla 8.1, donde se indica cómo se van interconectando los nodos formando un solo bloque.

Diseño de redes de fibra óptica

Problema: Durante la expansión de las redes de fibra óptica en la década de 1990, se buscaba conectar ciudades y regiones minimizando los costos de instalación.

Solución: El AEM se utilizó para identificar las rutas óptimas entre estaciones de fibra óptica, asegurando la conexión de todas las regiones con el menor costo posible.

Impacto: Facilitó la expansión global de Internet y las telecomunicaciones, mejorando la conectividad a nivel mundial.

Tabla 8.1.

Tabla inicial de nodos conectados.

NODOS	NODOS CONECTADOS	DISTANCIA
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

PRIMER PASO: Aleatoriamente nos iniciamos en el **Nodo C**, observamos que todos los nodos están sueltos. Y el único nodo interconectado es el **Nodo C** con el mismo (gráfico 8.2), (Tabla 8.2.).

Tabla 8.2.

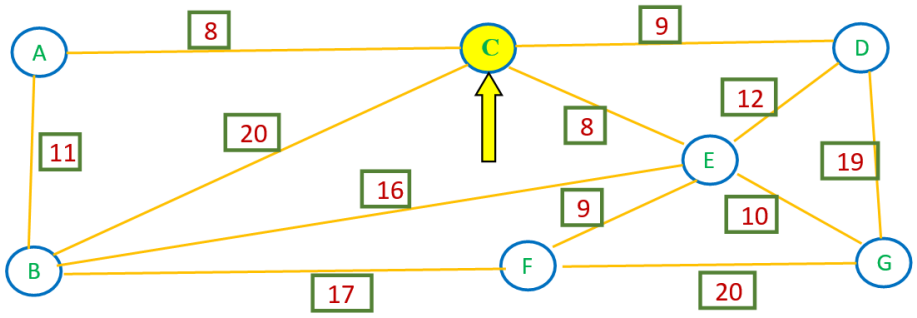
Inicio en el Nodo C.

NODOS	NODOS CONECTADOS	DISTANCIA
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 8.2.

Inicio Nodo C.

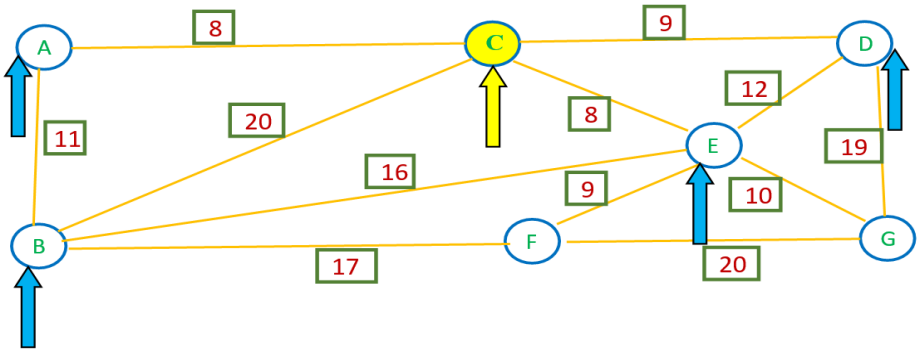


Nota: *grafico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

SEGUNDO PASO: seleccionamos todos los nodos que están a un arco de distancia de C. los señalamos con una flecha gruesa azul (gráfico 8.3)

Gráfico 8.3.

Selección nodos próximos a C.

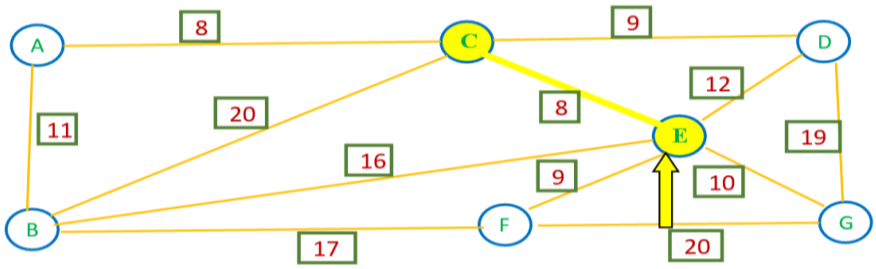


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Entre todos ellos, escogemos el nodo que está a menor distancia, el **Nodo E** (gráfico 8.4.) indicado con una flecha amarilla gruesa, y el circulo indicador de nodo, se rellena con el mismo color amarillo.

Gráfico 8.4.

Selección nodo E.



Nota: *grafico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Tabla 8.3.

Interconexión con el Nodo E.

NODOS	**NODOS CONECTADOS**	**DISTANCIA (kilómetros)**
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0
A, B, D, F, G	C, E	8

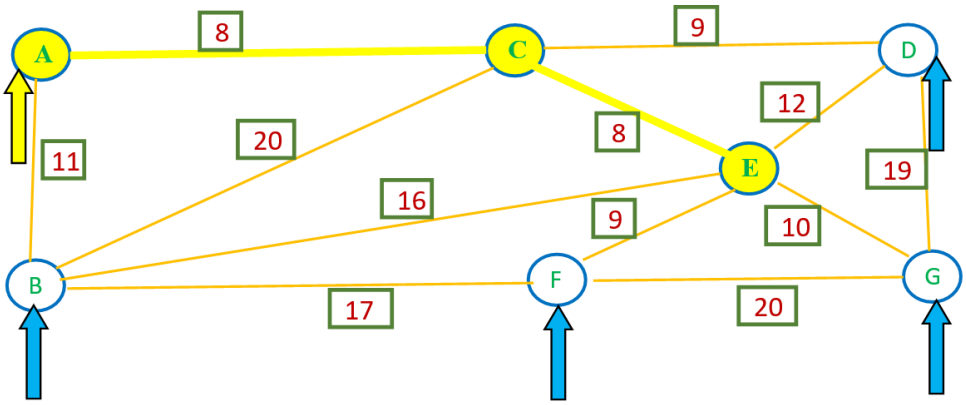
Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos C y E (Tabla 8.3.) interconectado con una línea gruesa blanca (gráfico 8.4.).

TERCER PASO: Los nodos que están a un arco de distancia del bloque creado por los **Nodos C** y **E**, son **(A, B, D, F, G)**, y el que está a menor distancia es el Nodo A (gráfico 8.5.).

Gráfico 8.5.

Bloque conformado por los nodos A, C, E.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Tabla 8.4.

Interconexión Nodos A, C, E

NODOS	**NODOS CONECTADOS**	**DISTANCIA(kilómetros)**
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0
A, B, D, F, G	C, E	8
B, D, F, G	A, C, E	8

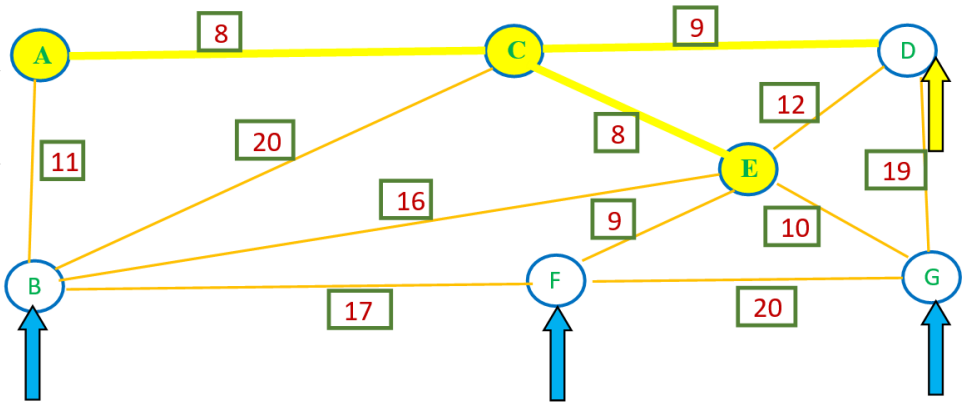
Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos A, C, E (Tabla 8.4.).

CUARTO PASO. Los nodos que están a un arco de distancia del bloque creado por los **Nodos A**, **C, E** son **(B, D, F, G)**, y el que está a menor distancia es el **Nodo D**

Gráfico 8.6.

Bloque conformado por los nodos A, C, E, D.



Nota: *grafico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Tabla 8.5.

Interconexión Nodos A, C, E, D

NODOS	**NODOS CONECTADOS**	**DISTANCIA(kilómetros)**
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0
A, B, D, F, G	C, E	8
B, D, F, G	A, C, E	8
B, F, G	A, C, E, D	9

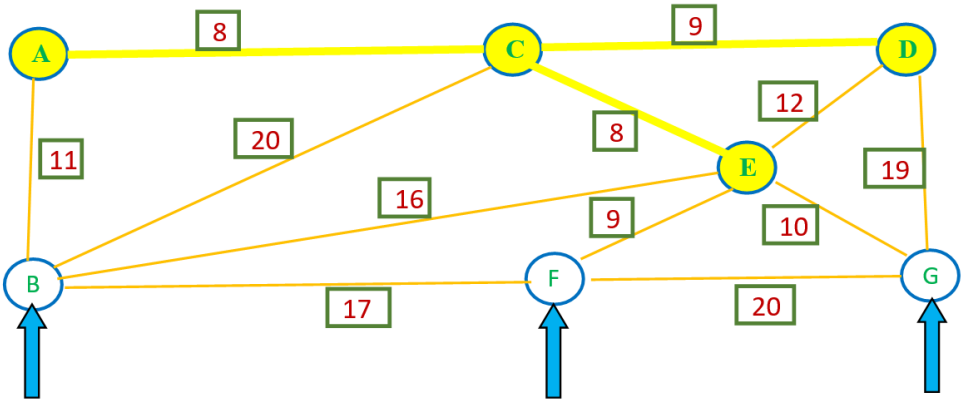
Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos A, C, E, D (Tabla 8.5.).

QUINTO PASO: Los nodos que están a un arco de distancia del bloque creado por los **Nodos A**, **C, E, D** son **(B, F, G)** gráfico 8.7., y el que está a menor distancia es el **Nodo F** (gráfico 8.8.).

Grafico 8.7.

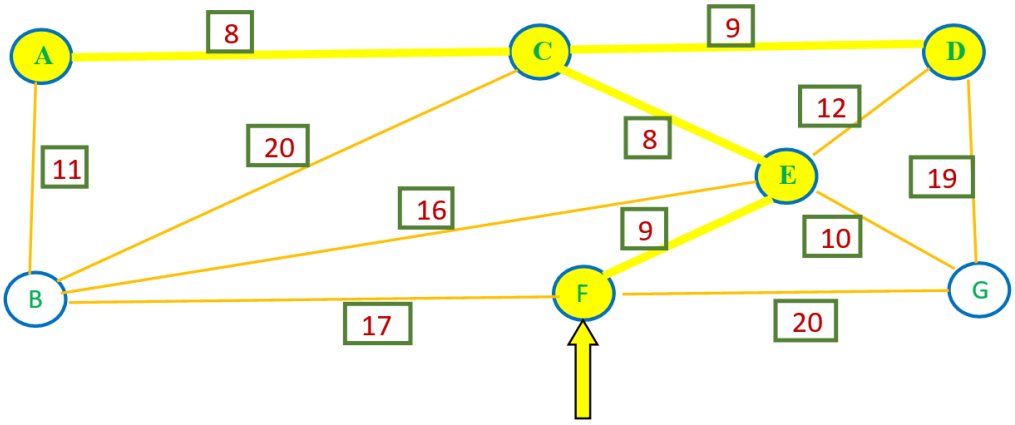
Selección nodos próximos a A, C, D, E.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Gráfico 8.8.

Bloque conformado por los nodos A, C, E, D, F.



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

Tabla 8.6.

Interconexión Nodos A, C, E, D, F

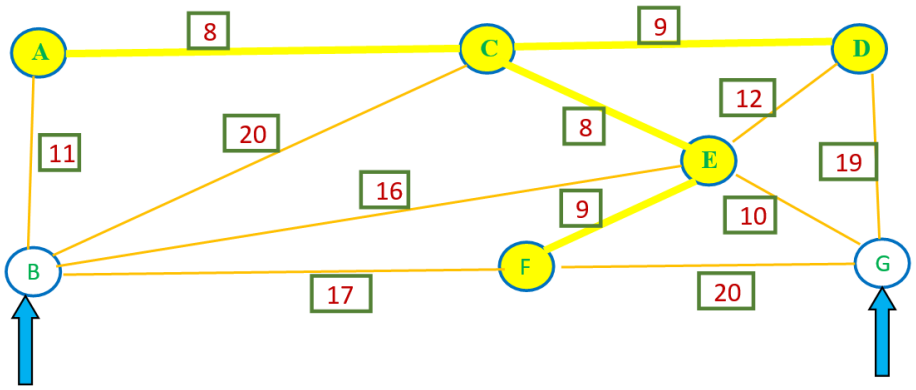
NODOS	**NODOS CONECTADOS**	**DISTANCIA(kilómetros)**
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0
A, B, D, F, G	C, E	8
B, D, F, G	A, C, E	8
B, F, G	A, C, E, D	9
B, G	A, C, E, D, F	9

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos A, C, E, D, F (Tabla 8.6.)

Gráfico 8.8.

Selección nodos próximos a (A, C, D, E, F).



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

SEXTO PASO: Los nodos que están a un arco de distancia del bloque creado por los **Nodos A, C, E, D, F** son **(B, G)** (gráfico 8.8.). y el que está a menor distancia es el **Nodo G**.

Tabla 8.7.

Interconexión Nodos A, C, E, D, F, G

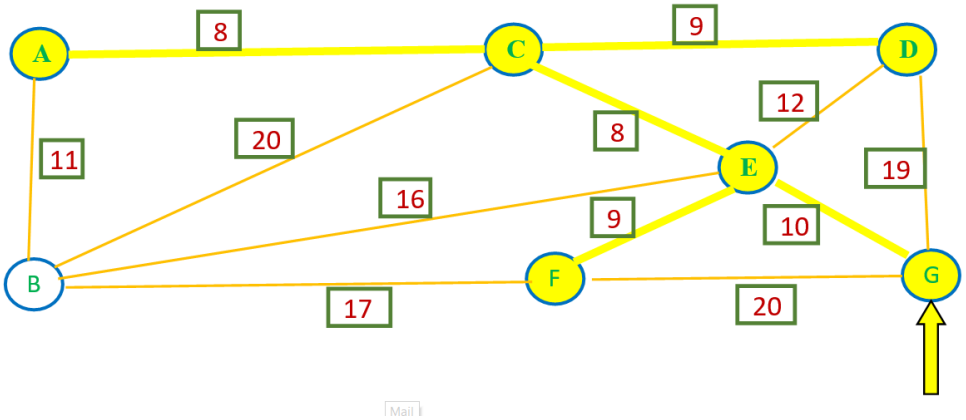
NODOS	**NODOS CONECTADOS**	**DISTANCIA(kilómetros)**
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0
A, B, D, F, G	C, E	8
B, D, F, G	A, C, E	8
B, F, G	A, C, E, D	9
B, G	A, C, E, D, F	9
B	A, C, E, D, F, G	10

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos A, C, E, D, F, G (Tabla 8.7.)

Gráfico 8.9.

Selección nodos próximos a (A, C, E, D, F, G).

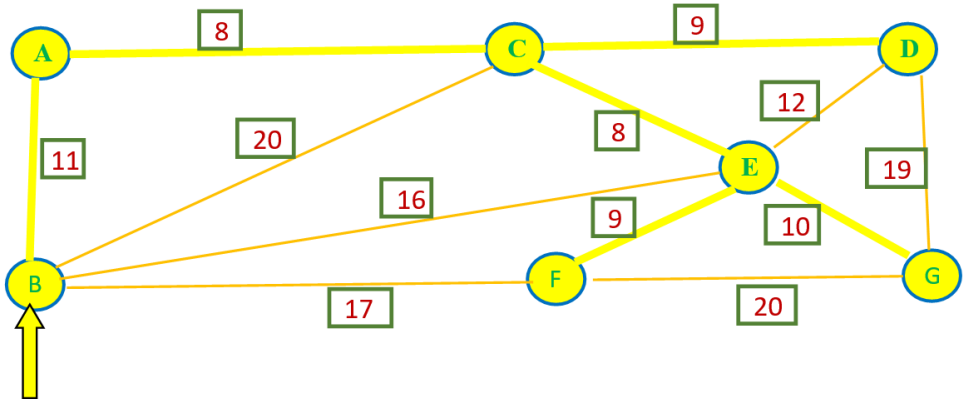


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

El nodo que está a un arco de distancia del bloque creado por los **Nodos (A, C, E, D, F, G)** es **B** que está a una distancia de 11(figura 9).

Gráfico 8.10.

Selección nodos (A, C, D, E, F, G, B).



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

Tabla 8.8.

Interconexión Nodos A, C, E, D, F, G, B

NODOS	**NODOS CONECTADOS**	**DISTANCIA (kilómetros)**
A, B, C, D, E, F, G	No hay	0
A, B, D, E, F, G	C	0
A, B, D, F, G	C, E	8
B, D, F, G	A, C, E	8
B, F, G	A, C, E, D	9
B, G	A, C, E, D, F	9
B	A, C, E, D, F, G	10
----------	A, C, E, D, F, G, B	11
TOTAL		55

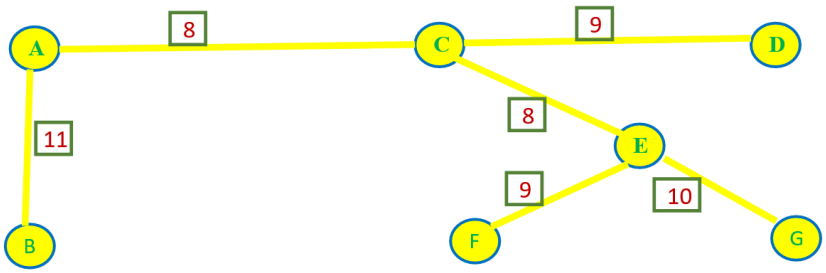
Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El bloque será conformado por los Nodos A, C, E, D, F, G, B (Tabla 8.8.)

El resultado del algoritmo del **ARBOL DE EXPANSION MINIMA** nos arroja una distancia de 55 kilómetros (tabla 8.8.). Y la ruta con la menor distancia para poder abastecer de agua a la ciudad de Arenillas la podemos ver en el gráfico 8.11.

Gráfico 8.11.

Ruta con la menor distancia



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

8.4.-CONCLUSIONES

Como vemos, el algoritmo de la ruta más corta nos permitirá elaborar una distribución de nodos desde un origen especifico, a cualquier otro nodo de la red. El algoritmo de expansión mínima nos permite vincular todos los nodos sin importar cual sea el origen, y obtener la ruta que los vincularía a todos al menor costo. Esto lo podemos ver en una ruta de metro, de una de recorridos de transporte urbano, etc.

8.5.-CUESTIONARIO

8.5.1.-VERDADERO-FALSO

1. El objetivo básico del árbol de expansión mínima es el de que al menor costo se puedan conectar los nodos del circuito. (V) (F)
2. El algoritmo devorador utilizado para solucionar un árbol de expansión mínima, utiliza una heurística ventajosa, pero no óptima. (V) (F)
3. Al aplicar el algoritmo voraz, para hallar el árbol de expansión mínima, es indiferente el nodo por el que se comience. (V) (F)
4. Al aplicar el método de la ruta más corta a un problema de árbol de expansión mínima, las soluciones podrían ser iguales. (V) (F)

5. Los ciclos, hacen que el problema de árbol de expansión mínima sea poco práctico resolverlo por el SOLVER de EXCEL. (V) (F)

8.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

6.- Un circuito con n nodos requiere para hallar el árbol de expansión mínima:

a.-Solamente (n -1) arcos.

b. Solamente (n +1) arcos.

c. Solamente n arcos

d.-Ninguna de los anteriores

6.-En el algoritmo del árbol de expansión mínima se selecciona, de manera arbitraria, cualquier nodo y se conecta al nodo distinto:

a.- Mas lejano

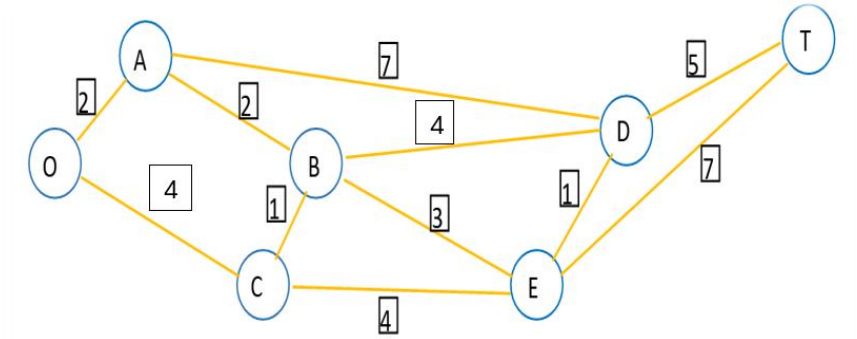
b. -Más cercano

c. a y b

d.-Ninguna de los anteriores

8.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

13.- La gerencia del parque ecológico "oso de anteojos" quiere identificar los recorridos de las instalaciones telefónicas para comunicar todas las centrales con una longitud total mínima de cable.



8.6.-GLOS ARIO

Árbol de expansión mínima:

Algoritmo que conecta todos los nodos de una red con la mínima distancia posible, evitando ciclos y minimizando los costos de conexión.

Arco:

Conexión entre dos nodos en una red, que puede tener una longitud o peso asociado.

Bloque:

Conjunto de nodos que han sido conectados en el proceso del árbol de expansión mínima.

Conexión directa:

Relación entre dos nodos que están enlazados sin intermediarios.

Conexión indirecta:

Relación entre dos nodos que están enlazados mediante otros nodos intermedios.

Diagrama de red:

Representación gráfica de los nodos y las conexiones entre ellos.

Distancia:

Longitud o peso asociado a un arco entre dos nodos en una red.

Excel:

Herramienta utilizada para estructurar matrices y resolver problemas de programación lineal con SOLVER.

Función objetivo:

Expresión matemática que se busca minimizar o maximizar en un problema de programación lineal.

Matriz de conectividad:

Tabla que indica las conexiones directas entre nodos, representadas por 1 (conexión) o 0 (sin conexión).

Matriz de distancias:

Tabla que muestra las longitudes o pesos de los arcos entre nodos en una red.

Modelo matemático:

Representación abstracta de un problema en términos de ecuaciones y restricciones.

Nodo:

Punto en una red que puede esar conectado a otros nodos mediante arcos.

Paso:

Etapa en el proceso del algoritmo de árbol de expansión mínima para conectar nodos.

Programación lineal (PL):

Técnica matemática para optimizar una función objetivo sujeta a restricciones lineales.

Red:

Conjunto de nodos y arcos que representan un sistema de conexiones.

Restricciones:

Condiciones que deben cumplirse en un modelo matemático de programación lineal.

Ruta más corta:

Camino con la mínima distancia o costo entre dos nodos en una red.

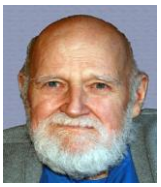
SOLVER:

Herramienta de Excel utilizada para resolver problemas de optimización, como programación lineal.

Sumatoria:

Proceso de sumar las distancias o pesos asociados a los arcos en una red.

PARTE 2. HEURISTICA Y METAHEURISTICA



L.R. Ford

D.R. Fulkerson

El problema del flujo en ríos (Ford y Fulkerson, 1956):

Contexto:

Los matemáticos L.R. Ford Jr. y D.R. Fulkerson desarrollaron el algoritmo de flujo máximo en 1956, y una de las motivaciones detrás de su trabajo fue modelar el flujo de agua en ríos y canales.

Anécdota:

Mientras trabajaban en el algoritmo, Ford y Fulkerson discutían cómo el agua podría "buscar" de manera natural los caminos de menor resistencia, lo que los llevó a conceptualizar el algoritmo como un proceso iterativo que encuentra rutas incrementales para aumentar el flujo. Esta idea simple pero poderosa permitió resolver problemas complejos de flujo en redes.

CAPITULO 9. MODELO DE FLUJO MAXIMO

9.1.-OBJETIVOS

-Desarrollar modelo matemático de programación lineal para un problema de FLUJO MAXIMO

-resolver con SOLVER

-Aplicar Algoritmo de FLUJO MAXIMO.

-Solucionar problema prototípico con SOLVER y Algoritmo de FLUJO MAXIMO.

-Verificar resultados

9.2.-INTRODUCCION

De acuerdo con (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000).

El flujo máximo se puede describir de la siguiente forma.

1.El flujo va través de una red que se origina en un nodo, llamado **origen**, y termina en otro nodo llamado **destino.**

2. Los nodos restantes son *nodos de trasbordo*

3. Se permitirá el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la magnitud del arco. En el origen, todos los arcos señalan hacia afuera. En el *destino*, todos señalan hacia el nodo.

4. El objetivo será maximizar la cantidad total de flujo del origen al destino. Vamos primero a resolver un problema prototípico (MANTENIMIENTO VIAL), con el programa SOLVER.

El diseño de redes de transporte en la India:

Contexto:

En la década de 1960, el gobierno indio enfrentó el desafío de diseñar un sistema de transporte eficiente para mover mercancías a través del país. Se utilizaron métodos basados en el flujo máximo para determinar las capacidades óptimas de carreteras y ferrocarriles.

Anécdota:

Durante las simulaciones, los planificadores descubrieron que ciertas rutas críticas (cuellos de botella) estaban limitando el flujo total, lo que llevó a inversiones estratégicas en infraestructura. Este caso es un ejemplo temprano de cómo los algoritmos de flujo máximo pueden influir directamente en decisiones de política pública.

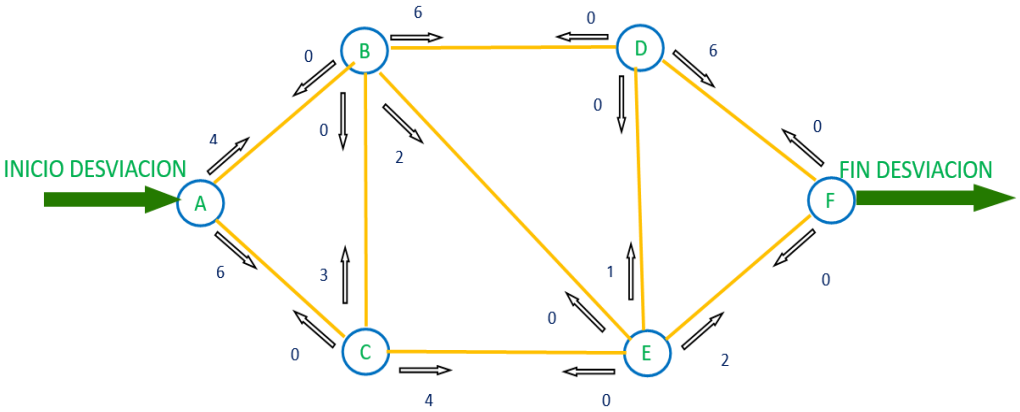
9.3.-DESARROLLO

9.3.1.-SOLUCION DE FLUJO MAXIMO CON SOLVER PROBLEMA MANTENIMIENTO VIAL.

El departamento de control de tráfico de la ciudad de Machala trabaja en estrecha relación con el departamento de mantenimiento. Se necesita realizar una reparación importante en la Circunvalación Norte, por lo que solicita se le dé una red de rutas alternas mientras se realizan las reparaciones. Se necesita saber cuál es el flujo máximo vehicular de dicha desviación (gráfico 9.1.).

Gráfico 9.1

Red de rutas alternas con capacidad de flujo de vehículos(cientos)



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993)*

El puente aéreo de Berlín (1948-1949):

Contexto: Durante el bloqueo de Berlín por parte de la Unión Soviética, las potencias aliadas establecieron un puente aéreo para abastecer a la ciudad con alimentos y suministros esenciales. La logística del puente aéreo implicaba maximizar el número de vuelos diarios y la cantidad de carga transportada.

Relación con el flujo máximo:

Aunque el algoritmo de flujo máximo no se utilizó formalmente en esa época, el problema que enfrentaron los planificadores era esencialmente un problema de flujo máximo: cómo optimizar las rutas aéreas, los horarios de vuelo y la capacidad de los aeropuertos para maximizar el suministro a Berlín.

Anécdota: Este caso histórico inspiró a matemáticos e ingenieros a desarrollar herramientas más formales para resolver problemas de flujo en redes, y el algoritmo de flujo máximo encontró aplicaciones inmediatas en problemas logísticos similares.

FUNCION OBJETIVO

Segun *(Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000).*

Max f

s.a.

$$\sum_j X_{ij} - \sum_j X_{ji} = \begin{cases} f, & \text{si } i = 1 \\ -f, & \text{si } i = n \\ 0, & \text{en otras condiciones} \end{cases}$$

$$0 \leqslant X_{IJ} \leqslant u_{ij}, \text{ para todo } (i,j) \text{ de la red}$$

SOLUCION CON SOLVER

Z(Max)= $X_{AB} + X_{AC}$

SUJETO A:

X_{AB}	$\geqslant$	**4**
X_{AC}	$\geqslant$	**6**
X_{BD}	$\geqslant$	**6**
X_{BE}	$\geqslant$	**2**
X_{CB}	$\geqslant$	**3**
X_{CE}	$\geqslant$	**4**
X_{DF}	$\geqslant$	**6**
X_{EF}	$\geqslant$	**2**
X_{ED}	$\geqslant$	**1**

$$X_{AB} + X_{CB} = X_{BD} + X_{BE}$$

$$X_{AC} = X_{CB} + X_{CE}$$

$$X_{BD} = X_{DF}$$

$$X_{CE} + X_{BE} = X_{ED} + X_{EF}$$

La evacuación de Nueva Orleans (Huracán Katrina, 2005):

Contexto:

Durante el huracán Katrina, uno de los mayores desafíos fue evacuar a los residentes de Nueva Orleans de manera rápida y segura. Los ingenieros y planificadores utilizaron modelos basados en el flujo máximo para optimizar las rutas de evacuación y minimizar los tiempos de traslado.

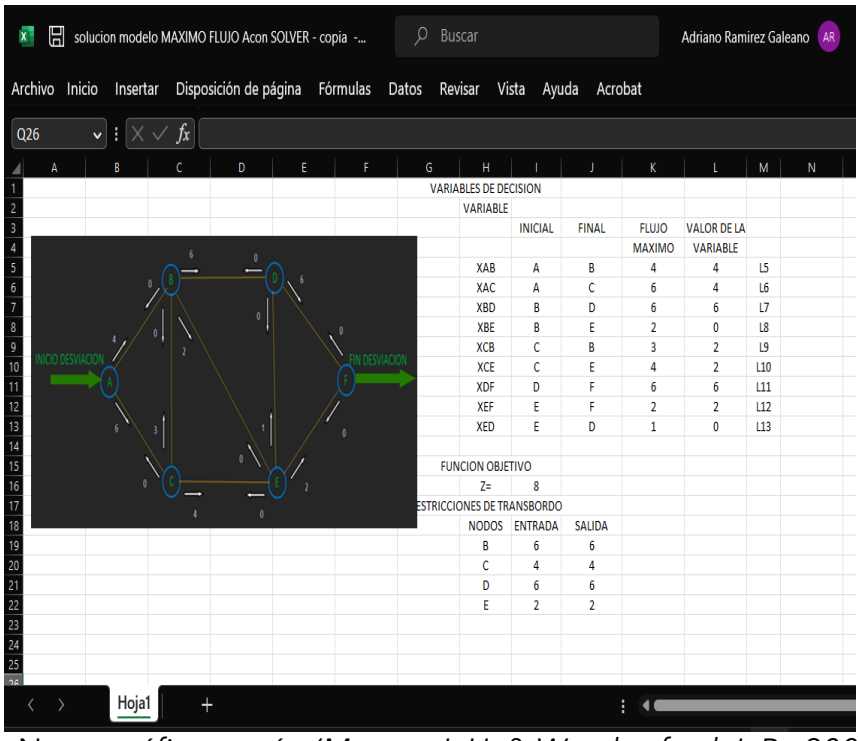
Anécdota:

En una simulación inicial, los planificadores descubrieron que muchas rutas estaban subutilizadas debido a la mala coordinación, lo que resultó en largas filas de vehículos en ciertas carreteras. Al ajustar las capacidades de las rutas (similar a ajustar los pesos en un grafo), lograron mejorar significativamente el flujo de evacuación.

Estos datos los ingresamos a la hoja de Excel gráfico 9.2.

Gráfico 9.2.

Ingreso datos problemas DESVIO



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Tabla 9.1.

Fórmulas de ingreso restricciones en EXCEL

CELDA	**FORMULA EN EXCEL**
I19	=L5+L9
I20	=L6
I21	=L7+L13
I22	=L10+L8

Nota: *Tabla según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

El algoritmo de flujo máximo y los partidos de béisbol:

Contexto:

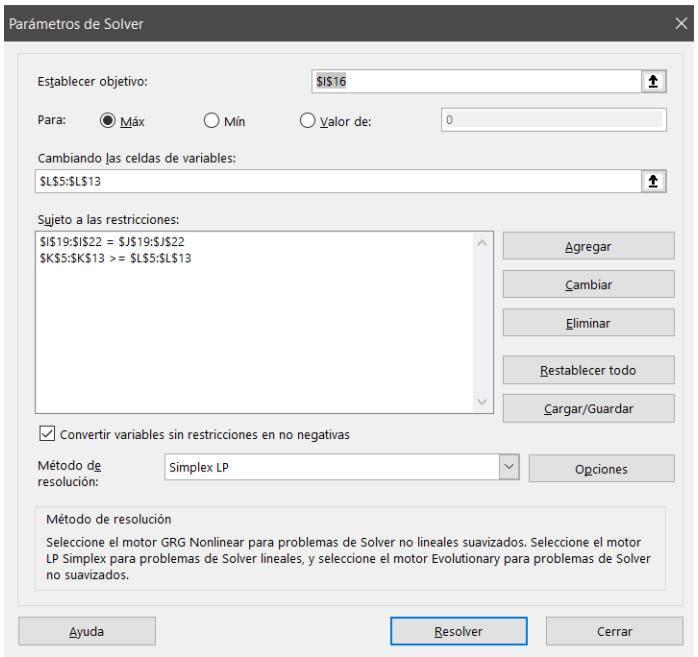
En la década de 1960, los matemáticos comenzaron a usar el algoritmo de flujo máximo para resolver problemas de clasificación deportiva. Por ejemplo, determinar si un equipo de béisbol aún tiene posibilidades matemáticas de clasificar a los playoffs.

Anécdota:

Un caso famoso ocurrió en la liga de béisbol de Estados Unidos, cuando un equipo utilizó este método para demostrar que otro equipo rival ya no podía clasificar, incluso si ganaba todos sus partidos restantes. Esto generó controversia, ya que los fanáticos no entendían cómo las matemáticas podían decidir el destino de un equipo antes de que se jugaran los partidos.

Gráfico 9.3.

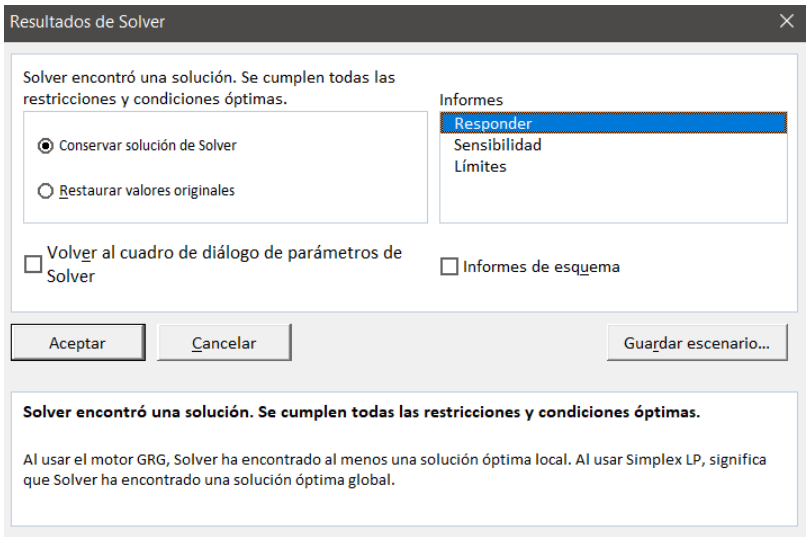
Parametros SOLVER



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 9.4.

Solicitamos solución a SOLVER.



La optimización de redes de Internet en la década de 1990:

Contexto:

Con el crecimiento de Internet en la década de 1990, surgió la necesidad de diseñar redes que pudieran manejar grandes volúmenes de datos. Los algoritmos de flujo máximo se utilizaron para modelar y optimizar el tráfico en redes de computadoras.

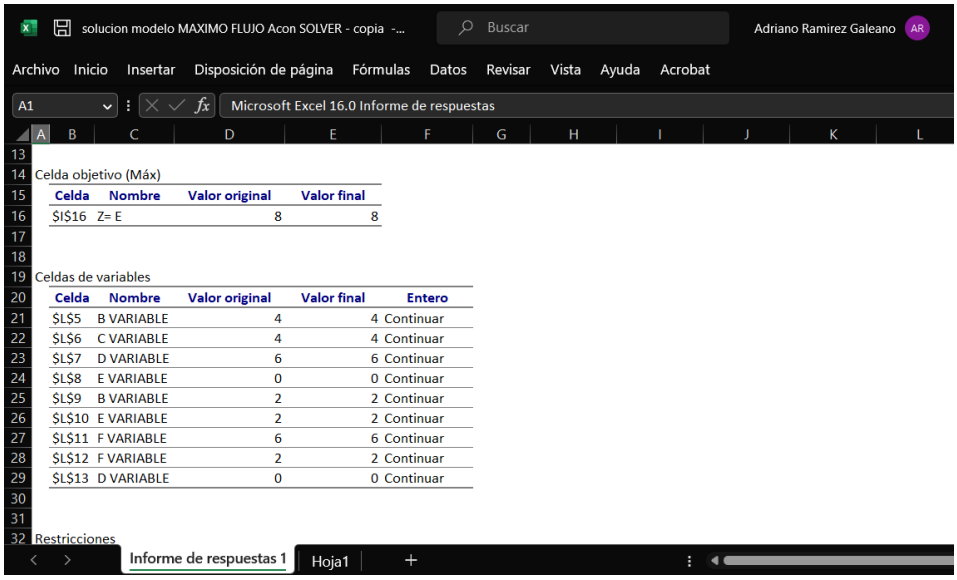
Anécdota:

Durante una conferencia técnica, un grupo de ingenieros de redes demostró que al usar el algoritmo de flujo máximo, podían redirigir automáticamente el tráfico en caso de fallos en ciertos nodos. Esto impresionó tanto a los asistentes que uno de ellos comentó en broma: "¡El flujo máximo no solo salva datos, también salva carreras profesionales!"

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 9.5.

Hoja soluciones problema DESVIO con SOLVER



solucion modelo MAXIMO FLUJO Acon SOLVER - copia -... Buscar Adriano Ramirez Galeano

Archivo Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Revisar Vista Ayuda Acrobat

A1 Microsoft Excel 16.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$I$16	Z= E	8	8

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$L$5	B VARIABLE	4	4	Continuar
$L$6	C VARIABLE	4	4	Continuar
$L$7	D VARIABLE	6	6	Continuar
$L$8	E VARIABLE	0	0	Continuar
$L$9	B VARIABLE	2	2	Continuar
$L$10	E VARIABLE	2	2	Continuar
$L$11	F VARIABLE	6	6	Continuar
$L$12	F VARIABLE	2	2	Continuar
$L$13	D VARIABLE	0	0	Continuar

Restricciones

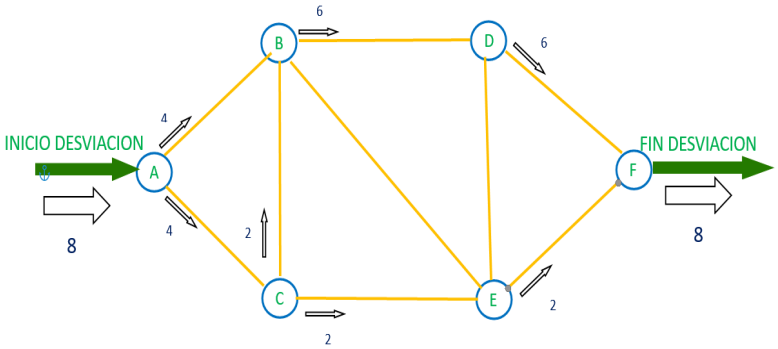
Informe de respuestas 1 Hoja1

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

La solución de SOLVER, nos indica que el máximo flujo de carros que podría soportar este desvío para el mantenimiento de la Circunvalación Norte es de 800 carros por hora.

Gráfico 9.6.

Solución de la Distribución flujo Máximo



London 2012

La planificación de rutas en los Juegos Olímpicos de Londres 2012:

Contexto:

Durante los Juegos Olímpicos de Londres, uno de los mayores desafíos fue planificar rutas de transporte público que pudieran manejar el flujo masivo de personas entre las sedes deportivas.

Anécdota:

Utilizando un modelo basado en el flujo máximo, los planificadores descubrieron que ciertas estaciones de tren serían puntos críticos. Esto les permitió implementar medidas preventivas, como aumentar la capacidad de ciertas rutas y establecer desvíos temporales. El éxito del sistema de transporte durante el evento fue atribuido, en parte, a estas simulaciones.

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

9.3.2.-SOLUCION DE Problema MANTENIMIENTO VIAL CON ALGORITMO METODO de FLUJO MAXIMO

ALGORITMO FLUJO MAXIMO

PASO 1. Encontraremos cualquier recorrido desde el origen hasta el destino con flujo positivo. Si no hay recorridos posibles, habremos encontrado la solución óptima.

PASO 2. Seleccionaremos el arco con la menor capacidad, de los que obtenidos en el Aumentaremos el flujo propio a través de la red con el flujo mínimo obtenido en el paso 1.

PASO 3. Disminuiremos en la misma cantidad en este mismo recorrido. Y
aumentaremos en esta misma cantidad en dirección opuesta para todos los
arcos del recorrido.

Lo aplicaremos paso a paso en el siguiente ejemplo prototípico

PROBLEMA MANTENIMIENTO VIAL.

El departamento de control de tráfico de la ciudad de Machala, trabaja en estrecha relación con el departamento de mantenimiento. Se necesita realizar una reparación importante en la Circunvalación Norte, por lo que solicita se le dé una red de rutas alternas mientras se realizan las reparaciones. Se necesita saber cuál es el flujo máximo vehicular de dicha desviación (gráfico 9.7.).

La guerra de redes de agua en California:

Contexto:

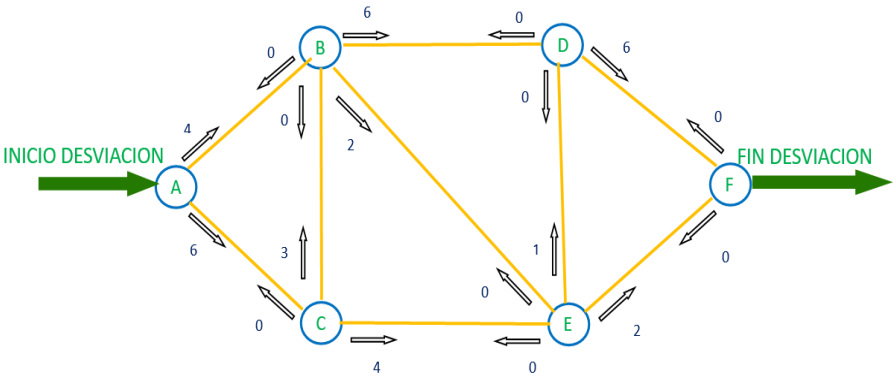
En California, donde el agua es un recurso escaso, las autoridades han utilizado el algoritmo de flujo máximo para planificar la distribución del agua en sistemas de acueductos.

Anécdota:

En una reunión entre ingenieros y políticos, un ingeniero explicó cómo el algoritmo podía maximizar la cantidad de agua distribuida sin sobrecargar los acueductos. Un político, impresionado por la solución, comentó: "¡Deberíamos aplicar esto a nuestras finanzas también!" Aunque fue una broma, la anécdota refleja cómo el flujo máximo se ha convertido en una herramienta de referencia en la gestión de

Gráfico 9.7.

Red de rutas alternas con capacidad de flujo de vehículos(cientos)



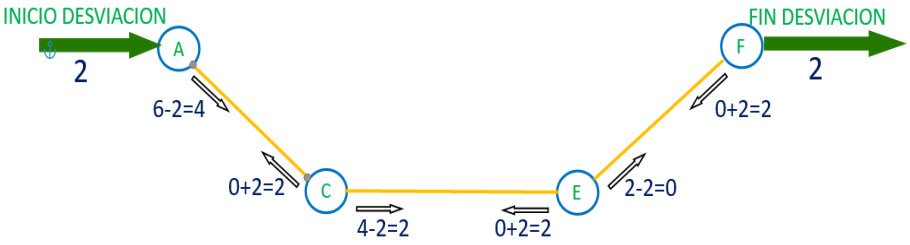
Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

SOLUCION

PRIMER PASO: Comenzamos aleatoriamente con el recorrido de los Nodos: A-C-E-F, cuya mínima capacidad es 2. Este valor lo reducimos a todo el recorrido A-C-E-F, y lo aumentamos en el sentido contrario (gráfico 9.8.).

Gráfico 9.8.

Primera actualización del DESVIO



El algoritmo de flujo máximo y las elecciones:

Contexto:

En algunos países, los problemas de flujo máximo se han utilizado para modelar la distribución de boletas electorales y urnas durante las elecciones, asegurando que todos los votantes puedan ejercer su derecho a tiempo.

Anécdota:

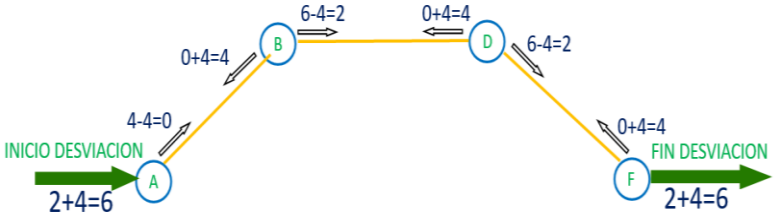
En una elección en India, se descubrió que ciertas áreas rurales estaban recibiendo menos urnas de las necesarias debido a un error en la planificación. Al implementar un modelo de flujo máximo, se redistribuyeron las urnas de manera más equitativa, evitando largas filas y retrasos.

Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

SEGUNDO PASO: El segundo recorrido que elegimos es el A-B-D-F, cuya mínima capacidad es 4. Este valor lo reducimos a todo el recorrido A-B-D-F, y lo aumentamos en el sentido contrario (gráfico 9.9).

Gráfico 9.9.

Segunda actualización del DESVIO

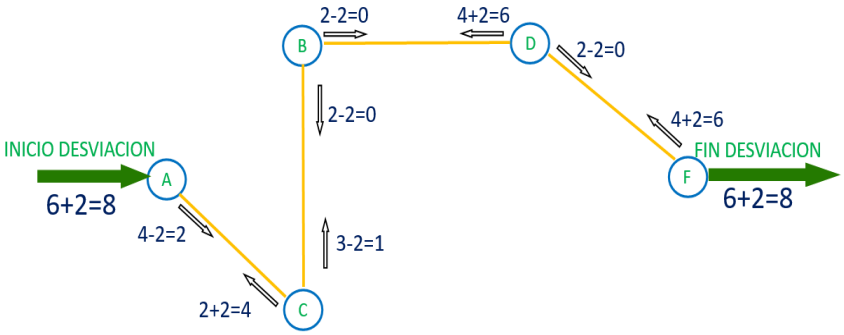


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

TERCER PASO: El tercer recorrido que elegimos es el A-C-B-D-F, cuya mínima capacidad es 4. Este valor lo reducimos a todo el recorrido A-B-D-F, y lo aumentamos en el sentido contrario (gráfico 9.10.).

Gráfico 9.10.

Tercera actualización del DESVIO

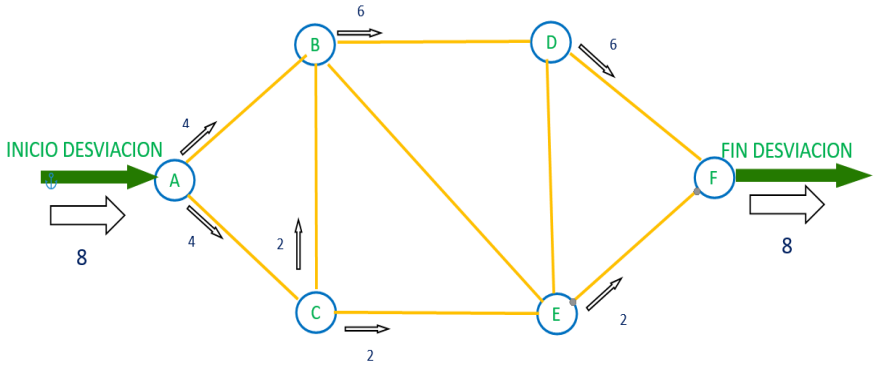


Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

El algoritmo alcanza su límite máximo, cuando todos los arcos que conducen al nodo de salida tienen flujo cero. (gráfico 11)

Gráfico 9.11.

Solución de la Distribución flujo Máximo



Nota: *gráfico Según (Eppen, Gould y Schmidt, 1993*)

9.4.-CONCLUCIONES

La solución entregada por la aplicación del algoritmo de flujo máximo

es confirmada por los reportes entregados por el paquete SOLVER.

Muchos problemas prácticos, podrán ser solucionados a través de este método, dando un resultado eficiente y objetivo.

Todo flujo a través de una red conexa dirigida se origina en un nodo, llamado fuente, y termina en otro nodo llamado destino.

9.5.-CUESTIONARIO

9.5.1.-VERDADERO-FALSO

1. En un circuito el flujo total se origina en un nodo fuente y llega a un nodo denominado destino. (V) (F)

2. En un problema de flujo máximo desde un nodo origen a un nodo destino, determina que los nodos restantes sean nodos de trasbordo. (V) (F)

9.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

3.- El problema de flujo máximo se puede usar para maximizar el flujo a través de:

a.- una red de distribución

b.- de una red de montaje

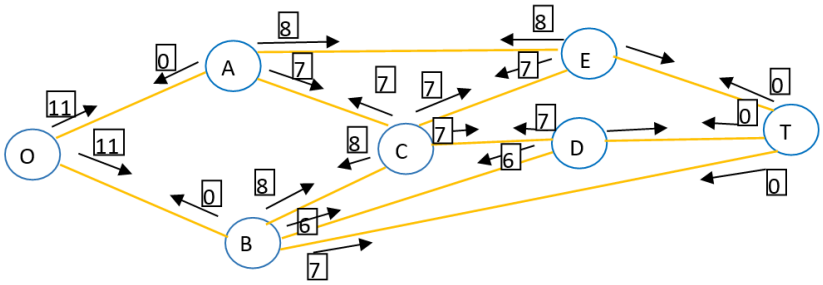
c.- de una red de corriente eléctrica

d.- de una red de paquetes de información

e.- Todas las anteriores

9.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

4.-Texaco distribuye petróleo crudo a diversas refinerías en el golfo de México, En la figura a continuación se representa esta red. ¿Cuál es el flujo máximo desde el nodo O, hasta el nodo T.?



9.6.-GLOSARIO

Algoritmo de flujo máximo:

Método utilizado para encontrar el flujo máximo que puede pasar a través de una red desde un nodo origen hasta un nodo destino, siguiendo ciertas restricciones de capacidad.

Arco:

Conexión dirigida entre dos nodos en una red. Representa la dirección y capacidad máxima del flujo permitido.

Capacidad:

Cantidad máxima de flujo que puede pasar a través de un arco en una red.

Destino:

Nodo final en una red hacia el cual se dirige el flujo.

Flujo:

Cantidad de elementos (vehículos, agua, datos, etc.) que se mueven a través de una red desde el origen hasta el destino.

Fuente:

Nodo inicial en una red desde donde se origina el flujo. También conocido como nodo origen.

Hoja de Excel:

Herramienta utilizada para ingresar datos, restricciones y fórmulas, y resolver problemas mediante programas como SOLVER.

Nodo:

Punto en una red que puede representar una intersección, un origen, un destino o un punto de trasbordo.

Nodo de trasbordo:

Nodo intermedio en una red que no es ni el origen ni el destino, pero que permite el paso del flujo.

Problema de Flujo Máximo:

Problema de encontrar las rutas de máxima cantidad de flujo a lo largo de una red.

Programa SOLVER:

Herramienta de optimización dentro de Excel que se utiliza para resolver problemas matemáticos como el flujo máximo.

Recorrido:

Camino que sigue el flujo desde el nodo origen hasta el nodo destino a través de los arcos de la red.

Red:

Conjunto de nodos y arcos conectados que representan un sistema de transporte, distribución o comunicación.

Restricciones:

Condiciones o límites que deben cumplirse en un problema de optimización, como las capacidades máximas de los arcos en una red.

Ruta alterna:

Camino alternativo en una red utilizado para desviar el flujo debido a reparaciones o bloqueos.

Solución óptima:

Mejor resultado posible para un problema de flujo máximo, donde no es posible aumentar el flujo total en la red.

Trasbordo:

Proceso de transferencia de flujo de un nodo a otro en una red.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS PARTE 2.

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (2009). *Network flows: Theory, algorithms, and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011). *Linear programming and network flows* (4ª ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (2004). *Introduction to linear optimization*. Belmont, MA: Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). *Programas de computación para formular alimentos*. Madrid, España: Avicultura profesional.

Cohen, M. A., & Murdock, J. (2012). *Operations research: A practical introduction*. Hoboken, NJ: Wiley.

Daniel Izquierdo Granja, & Ruiz Ruiz, J. J. (2006). PHPSIMPLEX Versión 0.81 [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm

Dantzig, G. B., & Thapa, M. (2003). *Linear programming: Foundations and extensions* (2ª ed.). New York, NY: Springer.

Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (1993). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. México D.F., México: Prentice Hall.

Gallagher, H., & Watson, J. (1990). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración*. México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Gass, S. I. (1990). *An illustrated guide to linear programming*. New York, NY: Dover Publications.

García Sabater, J. P. (2011). *Métodos cuantitativos de organización industrial*. Valencia, España: Universitat Politècnica de València. https://jpgarcia.webs.upv.es/?page_id=1932

González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A. (2015). *Manual práctico de investigación de operaciones I* (4.ª ed.). Barranquilla, Colombia: Editorial Universidad del Norte.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research* (10ª ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Kall, P., & Mayer, S. (2005). *Stochastic optimization: Methods and applications*. New York, NY: Springer.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming* (3ª ed.). New York, NY: Springer.

Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa* (5ª ed.). México D.F., México: Prentice Hall.

Murty, K. G., & Katta, S. (1983). *Linear programming*. New York, NY: Wiley.

Peñafiel, L. (1976). *Programación lineal*. México D.F., México: Trillas S.A.

Prawda Witenberg, J. (1977). *Métodos y modelos de investigación de operaciones: Volumen 1* (1977.a ed.). México D.F., México: Limusa.

Rardin, R. L. (2016). *Optimization in operations research* (2ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Rincón Abril, L. A. (2001). *Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

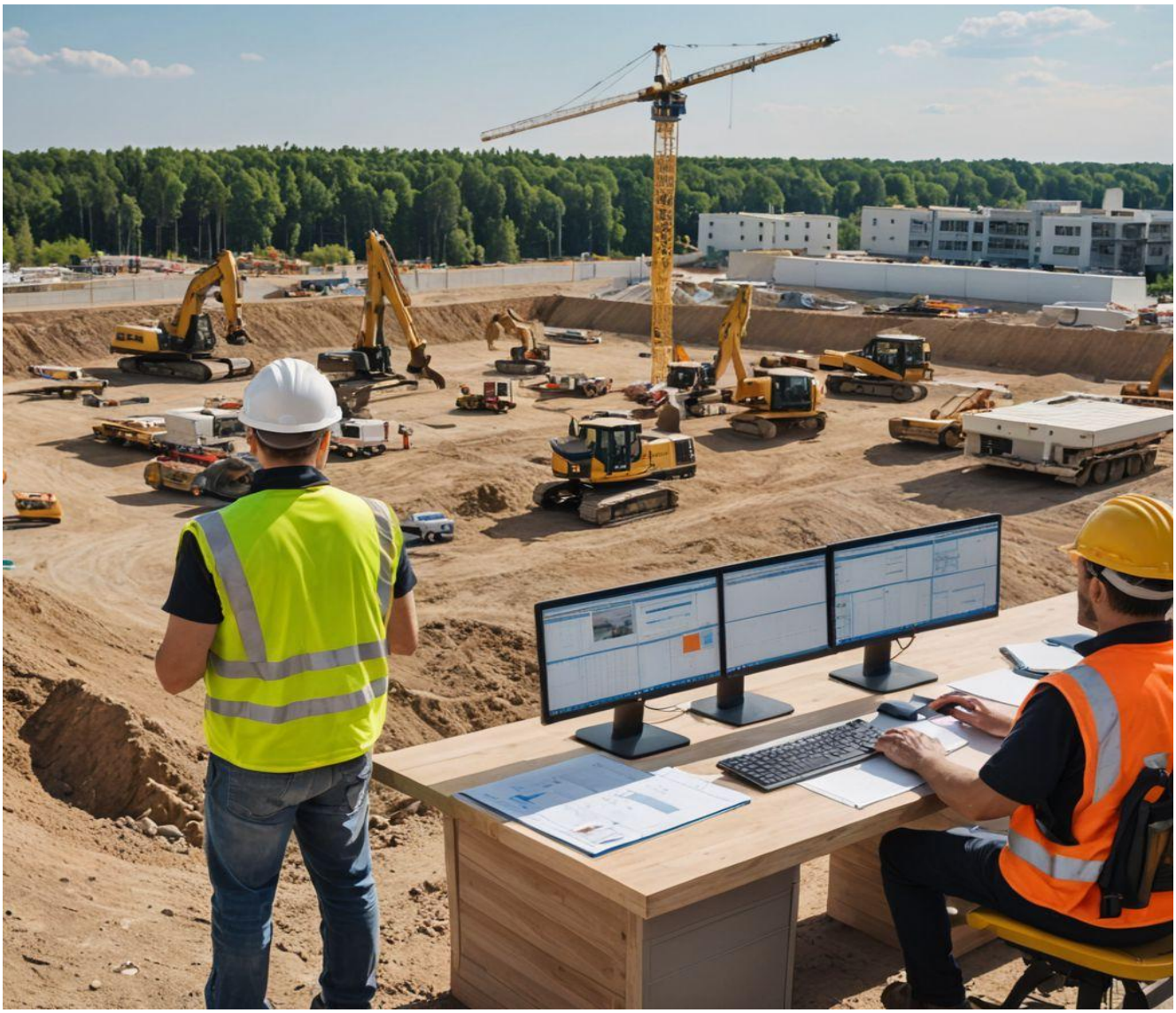
Sasieni, M. W., & Cohen, R. (2007). *Operations research: A practical guide to the use of OR techniques*. Hoboken, NJ: Wiley.

Shamblin, J., & Stevens, G. T. (1988). *Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental*. México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Taha, H. A. (2017). *Operations research: An introduction* (10ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Varela, J. E. (1991). *Introducción a la investigación de operaciones*. México D.F., México: Fondo Editorial Interamericana.

Winston, W. L. (2004). *Operations research: Applications and algorithms* (4ª ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole.



PARTE 3. ALGORITMO ADMINISTRACION DE PROYECTOS

Morgan R. Walker

James E. Kelley Jr

La exploración histórica del método de la ruta crítica (CPM, por sus siglas en inglés: Critical Path Method) muestra cómo esta herramienta revolucionó la administración y gestión de proyectos desde mediados del siglo XX. Su desarrollo y aplicación han jugado un papel crucial en la planificación, programación y control de proyectos complejos en diversas industrias**.**

A continuación, se detalla su evolución histórica y su impacto:

Orígenes del Método de la Ruta Crítica (CPM)

Año de desarrollo: El método de la ruta crítica fue desarrollado en 1957 por James E. Kelley Jr. de la empresa Remington Rand y Morgan R. Walker de la compañía DuPont.

Motivación: El objetivo principal era encontrar una forma eficiente de programar y gestionar proyectos complejos, minimizando los costos y tiempos de ejecución. En ese momento, las empresas enfrentaban desafíos importantes en la planificación de grandes proyectos industriales y de construcción.

CAPITULO 10: MÉTODO CPM -RUTA CRITICA

10.1.-OBJETIVOS

-Desarrollar modelo matemático de programación lineal para un problema de RUTA CRITICA

-resolver con SOLVER

-Aplicar Algoritmo RUTA CRITICA para resolver problemas de gestión de proyectos.

-Solucionar problema prototípico con SOLVER y Algoritmo RUTA CRITICA

-Verificar resultados

10.2.-INTRODUCCION

El procedimiento CPM (equivalente a la sigla en inglés Critical Path Method o Método de la Ruta Crítica), es utilizado en el desarrollo y control de proyectos. Su finalidad principal es determinar la duración de un proyecto. En este sentido la principal asunción de CPM, es que las actividades y sus tiempos de duración son conocidos.

Una ruta es una trayectoria desde el inicio hasta el final de un proyecto. Por lo que, la longitud de la ruta crítica es igual a la trayectoria más grande del proyecto. Indicaremos que la duración de un proyecto es igual a la ruta crítica.

Para utilizar este sistema necesitaremos considerar las siguientes condiciones:

1. establecer el proyecto con todas sus actividades.

2. Especificar cuál debe comenzar antes y cuál debe seguir después.

3. Graficar estas condiciones.

4. Establecer costos y tiempo estimado para cada actividad.

Primer caso práctico: El CPM se utilizó por primera vez en la industria química, específicamente en un proyecto de mantenimiento de plantas de DuPont. Este proyecto requería coordinar múltiples tareas interdependientes para reducir el tiempo de inactividad de las plantas, lo que representaba pérdidas económicas significativas.

Características iniciales del CPM

Propósito: Identificar las actividades críticas de un proyecto, es decir, aquellas que determinan la duración total del proyecto. Cualquier retraso en estas actividades impactaría directamente en la fecha de finalización.

Modelo matemático: El CPM se basa en un modelo determinista que utiliza tiempos fijos para las actividades, lo que lo diferencia de otros métodos como PERT (Program Evaluation and Review Technique), que considera tiempos probabilísticos.

Representación visual: Utiliza diagramas de red (grafos) para representar las actividades y sus dependencias, facilitando la identificación de la ruta crítica.

Evolución y adopción del CPM

Década de 1960: Expansión a otras industrias

Después de su éxito inicial en la industria química, el CPM se adoptó rápidamente en proyectos de construcción, ingeniería y manufactura.

Por ejemplo, se utilizó en la planificación de proyectos de infraestructura como carreteras, puentes y plantas industriales.

Empresas como Boeing y General Electric comenzaron a usar el CPM para gestionar proyectos de desarrollo de productos.

Desarrollo paralelo del método PERT

En 1958, la Marina de los Estados Unidos desarrolló el método PERT para gestionar el proyecto del misil submarino Polaris. Aunque PERT y CPM son métodos diferentes, ambos comparten principios similares y se complementaron en la práctica.

PERT se enfocó más en proyectos con alta incertidumbre, mientras que el CPM se aplicó a proyectos

5. Identificar la trayectoria más larga del proyecto, que determinará la duración del proyecto (Ruta Crítica).

6. El grafico ayudara a planear, supervisar y controlar el proyecto.

Al ser los problemas de critica también un caso de programación lineal, este puede ser resuelto a través de SOLVER, por lo que el ejemplo prototípico a ser usado será resuelto primero por el paquete SOLVER., teniendo de esta manera un patrón de resultados con los que podremos confirmar el algoritmo de la RUTA CRITICA (CPM), el que luego usaremos para resolver este mismo problema.

10.3.-DESARROLLO

Ejercicio prototípico

10.3.1.-SOLUCION CON SOLVER

Desarrolle el diagrama de red de las actividades (tabla 10.1.), y halle la ruta crítica con SOLVER.

Tabla 10.1.

Actividades y duración de estas

ACTIVIDAD	**Nodo 0**	**Nodo 1**	**Nodo 2**	**Nodo 3**	**Nodo 4**	**Nodo 5**	**Nodo 6**	**Nodo 7**	**Nodo 8**	**Nodo 9**
DURACION	0	3	4	6	4	6	8	6	4	0

Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

PERT se enfocó más en proyectos con alta incertidumbre, mientras que el CPM se aplicó a proyectos con tiempos de actividad bien definidos.

Década de 1970: Incorporación de software

Con el avance de la tecnología informática, el CPM comenzó a integrarse en programas de software especializados como Primavera y Microsoft Project**.**

Esto permitió que los gestores de proyectos realizaran cálculos complejos de manera más rápida y precisa, lo que popularizó aún más el método.

Aplicaciones en proyectos históricos

Construcción del sistema interestatal de carreteras en Estados Unidos: El CPM se utilizó para coordinar la construcción de miles de kilómetros de carreteras, asegurando que los plazos se cumplieran en un proyecto tan masivo.

Programa Apolo (NASA): Aunque PERT fue el método principal utilizado, el CPM también se aplicó en ciertas fases del proyecto para planificar actividades críticas en el desarrollo de cohetes y módulos espaciales.

Impacto del CPM en la administración y gestión de proyectos

El CPM revolucionó la forma en que se gestionaban los proyectos al proporcionar un enfoque estructurado para planificar, programar y controlar actividades. Entre sus principales contribuciones destacan:

Optimización del tiempo y los recursos:

El CPM permite identificar actividades críticas y optimizar los recursos asignados a estas tareas, reduciendo los costos generales del proyecto.

Esto fue especialmente útil en industrias como la construcción, donde los retrasos pueden tener consecuencias económicas graves.

Tabla10.2.

Actividades precedentes

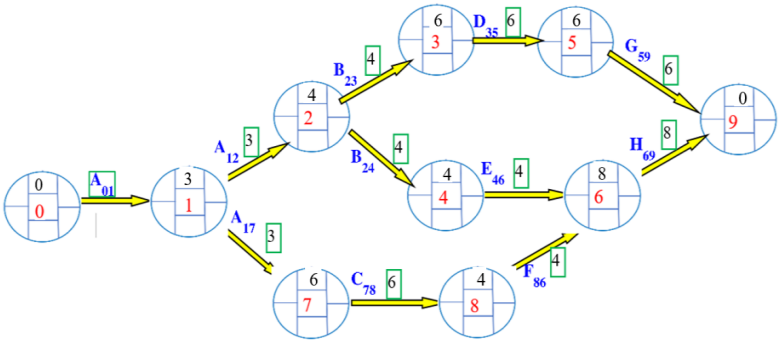
ACTIVIDAD	PRECEDENTES INMEDIATOS
Nodo 1	Nodo 0
Nodo2	Nodo 1
Nodo3	Nodo2
Nodo4	Nodo2
Nodo5	Nodo3
Nodo6	Nodo4 Nodo8
Nodo7	Nodo 1
Nodo8	Nodo7
Nodo9	Nodo5 Nodo6

Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

SOLUCION

Figura10.1.

Diagrama de red de las Actividades



Mejora en la toma de decisiones:

Al identificar la ruta crítica, los gestores de proyectos pueden priorizar actividades y tomar decisiones informadas sobre cómo manejar retrasos o cambios en el proyecto.

Estandarización de la gestión de proyectos:

El CPM, junto con métodos como PERT, sentó las bases para los estándares modernos de gestión de proyectos, como los definidos por el Project Management Institute (PMI).

Aplicaciones modernas del CPM

Hoy en día, el CPM sigue siendo ampliamente utilizado en diversos sectores, incluyendo:

Construcción y arquitectura:

Planificación de grandes proyectos de infraestructura, como aeropuertos, estadios y edificios residenciales.

Ejemplo: El CPM se utilizó en la construcción del Burj Khalifa, el edificio más alto del mundo, para coordinar múltiples actividades interdependientes.

Tecnología de la información:

Gestión de proyectos de desarrollo de software, donde las actividades críticas incluyen la programación, pruebas y despliegue.

Producción y manufactura:

Optimización de líneas de producción y proyectos de mejora continua en fábricas.

Eventos y logística:

Planificación de eventos masivos, como los Juegos Olímpicos, donde es crucial coordinar innumerables actividades dentro de plazos estrictos.

Conclusión

El método de la ruta crítica

Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Solución con SOLVER:

El modelo CPM busca la ruta *más larga* entre los nodos 1 y de terminación 9 de la red del proyecto. Por tanto, su formulación como

una PL es semejante a la PL del modelo de la ruta más corta. La única

diferencia es que la función objetivo se maximiza en lugar de minimizarse. Defina:

X_{ij}=Cantidad de flujo de la actividad (i,j)para toda *i* y *j* definidas

D_{IJ} =Duración de la actividad (i,j) para toda *i* y *j* definidas

Por lo tanto, la función objetivo del programa lineal es

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{\text{todas las actividades}(i,j)} D_{ij} X_{ij}$$

Para cada nodo hay una restricción que representa la conservación del flujo:

Sujeto a:

Flujo de entrada total=Flujo de salida total

Todas las variables, X_{ij} son no negativas

Tabla 10.2.

Diagrama de simulación de flujo para la red (grafico 1).

ACTIVIDADES	A_{12}	A_{17}	B_{23}	B_{24}	C_{78}	D_{35}	E_{46}	F_{86}	G_{59}	H_{69}			
NODO 1	-1	-1									-1	=	-1
NODO 2	1		-1	-1							0	=	0
NODO 3			1			-1					0	=	0
NODO 4				1			-1				0	=	0
NODO 5						1			-1		0	=	0
NODO 6							1	1		-1	0	=	0
NODO 7		1			-1						0	=	0
NODO 8					1			-1			0	=	0
NODO 9									1	1	1	=	1

Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Tabla 10.3.

Duración de actividades.

ACTIVIDAD	Nodo 0	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Nodo 7	Nodo 8	Nodo 9
DURACION	0	3	4	6	4	6	8	6	4	0

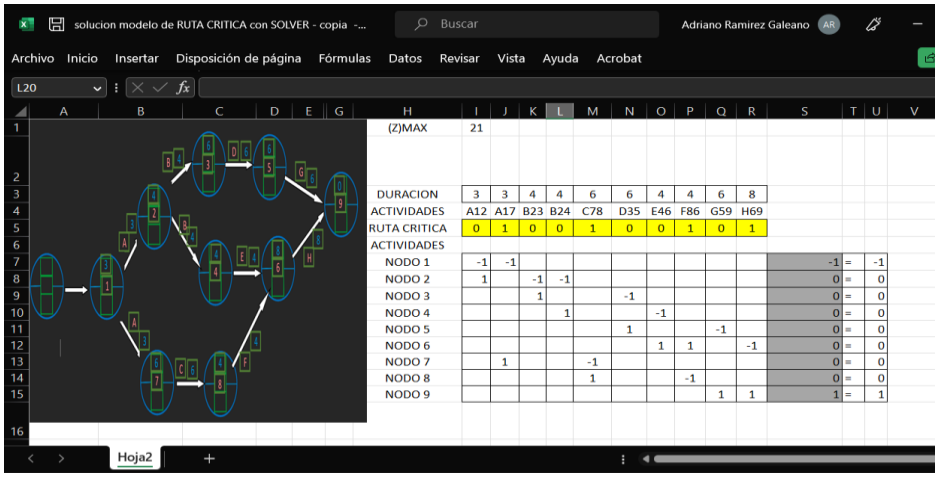
Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Conclusión

El método de la ruta crítica (CPM) marcó un hito en la gestión de proyectos al proporcionar una herramienta práctica y efectiva para planificar y controlar proyectos complejos. Desde su desarrollo en 1957 hasta su adopción masiva en diversas industrias, el CPM ha demostrado ser una técnica esencial para garantizar el éxito de proyectos de cualquier escala. Su combinación con tecnologías modernas y software de gestión ha asegurado su relevancia continua en el mundo actual.

Gráfico 10.2.

Cuadro Restricciones



Nota: *Grafica según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Ingresamos en la página de Excel (tabla 10.3.), con la que entregamos los valores requeridos para ejecutar SOLVER.

Tabla 10.3.

Formulas Excel problema RUTA CRITICA.

Celda	Fórmula	Cópiese a
I_1	=SUMAPRODUCTO(I3:R3,I5:R5)	----------
S_7	=SUMAPRODUCTO(I7:R7,$I$5:$R$5)	S07:S14

Nota: *Tabla de acuerdo con (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

La **función objetivo** será:

Z(MAX)= (3) A_{12}**+(3)**A_{17}**+(4)** B_{23}**+(4)** B_{24}**+(6)** C_{78}**+(6)** D_{35}**+(4)** E_{46}**+(4)** F_{86}

+(6) G_{59}**+(8)** H_{69}

Sujeto a:

(NODO 1) $A_{12} + A_{17} = -1$

(NODO 2) $A_{12} + B_{23} + B_{24} = 0$

(NODO 3) $B_{23} + D_{35} = 0$

(NODO 4) $B_{24} + E_{46} = 0$

(NODO 5) $D_{35} + G_{59} = 0$

(NODO 6) $E_{46} + F_{86} + H_{69} = 0$

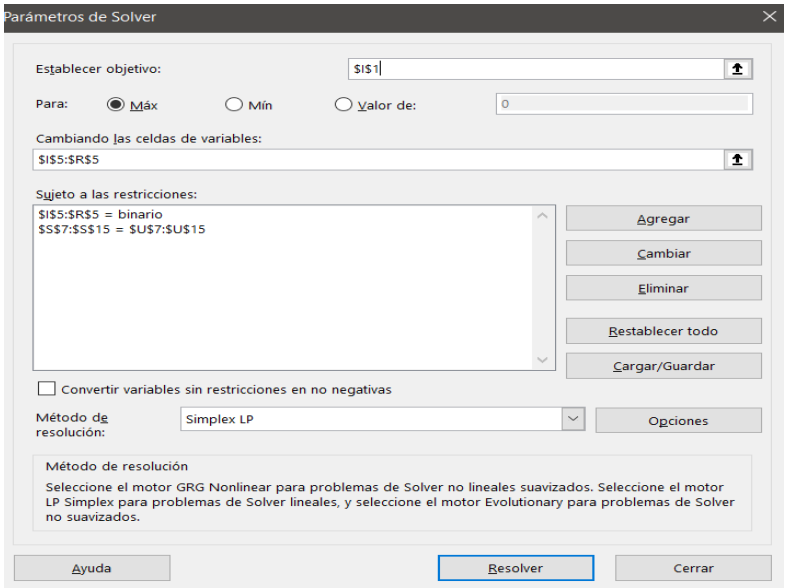
(NODO 7 $A_{17} + C_{78} = 0$

(NODO 8) $C_{78} + F_{86} = 0$

(NODO 9) $G_{59} + H_{69} = 1$

Gráfico 10.3.

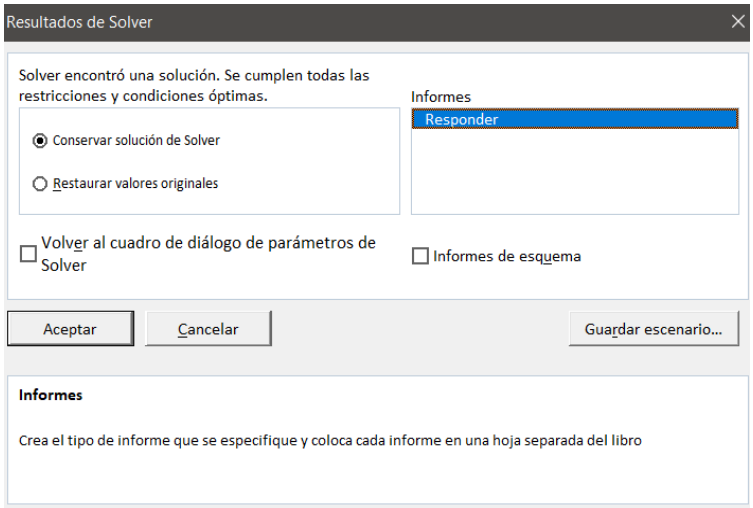
Parámetros SOLVER, problema RUTA CRITICA.



Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 10.4.

Solicitud resultados SOLVER, problema RUTA CRITICA.



Mantenimiento de plantas industriales en DuPont

Contexto: Este fue el primer caso práctico del CPM, desarrollado en 1957 por DuPont y Remington Rand.

Aplicación del CPM:

DuPont utilizó el CPM para planificar el mantenimiento de sus plantas químicas.

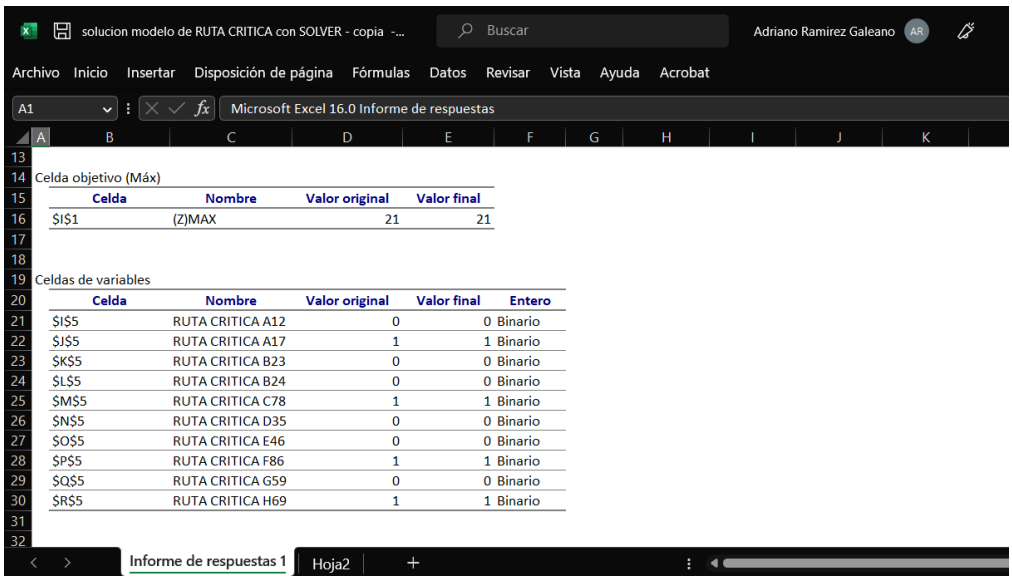
El objetivo era minimizar el tiempo de inactividad de las plantas, lo que representaba pérdidas económicas significativas.

La implementación del método permitió reducir el tiempo de mantenimiento de 125 a 93 horas, ahorrando costos importantes y demostrando la efectividad del CPM.

Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

Gráfico 10.5.

Informe de respuestas, función objetivo problema RUTA CRITICA.



Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$I$1	(Z)MAX	21	21

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$I$5	RUTA CRITICA A12	0	0	Binario
$J$5	RUTA CRITICA A17	1	1	Binario
$K$5	RUTA CRITICA B23	0	0	Binario
$L$5	RUTA CRITICA B24	0	0	Binario
$M$5	RUTA CRITICA C78	1	1	Binario
$N$5	RUTA CRITICA D35	0	0	Binario
$O$5	RUTA CRITICA E46	0	0	Binario
$P$5	RUTA CRITICA F86	1	1	Binario
$Q$5	RUTA CRITICA G59	0	0	Binario
$R$5	RUTA CRITICA H69	1	1	Binario

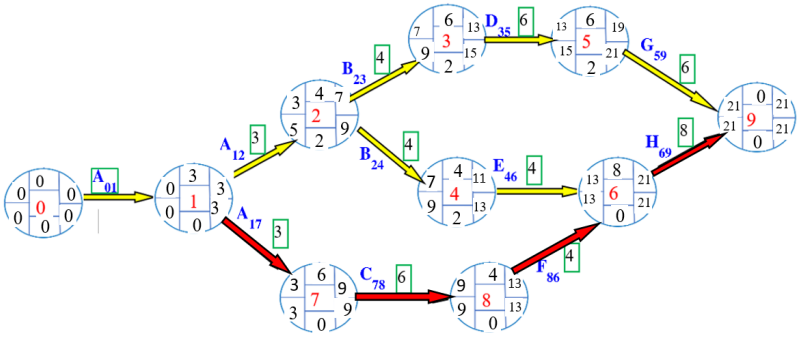
Nota: *gráfico según (Moore, J. H. & Weatherford, L.R., 2000)*

La ruta CRITICA es (A_{17} **-** C_{78} **+** F_{86} **+** H_{69}**)** (gráfico 10.6.).

Y esta ruta tiene una duración de **21 días** (gráfico 10.6.).

Gráfico 10.6.

RUTA CRITICA.



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

10.3.2.-SOLUCION CRITICA CON ALGORITMO

Este algoritmo lo desarrollaremos a continuación paso a paso utilizando un sistema etiquetado nodo a nodo en el ejercicio prototípico solucionado anteriormente con SOLVER

Desarrolle el diagrama de red de las actividades y su duración (tabla 10.4), y halle la ruta crítica con el Algoritmo de la ruta crítica.

Tabla 10.4.

Actividades y duración de estas

ACTIVIDAD	**Nodo 0**	**Nodo 1**	**Nodo 2**	**Nodo 3**	**Nodo 4**	**Nodo 5**	**Nodo 6**	**Nodo 7**	**Nodo 8**	**Nodo 9**
DURACION	0	3	4	6	4	6	8	6	4	0

Nota: *Tabla* según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Tabla 10.4.

Actividades precedentes

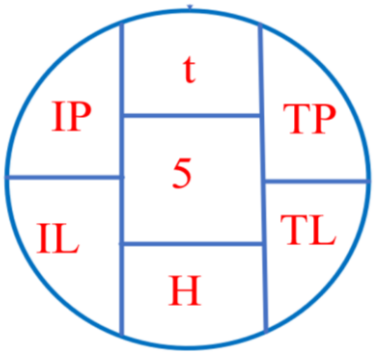
ACTIVIDAD	**PRECEDENTES INMEDIATOS**
Nodo 1	**Nodo 0**
Nodo2	**Nodo 1**
Nodo3	**Nodo2**
Nodo4	**Nodo2**
Nodo5	**Nodo3**
Nodo6	**Nodo4 Nodo8**
Nodo7	**Nodo 1**
Nodo8	**Nodo7**
Nodo9	**Nodo5 Nodo6**

Nota: *Tabla* según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Solución con ALGORITMO de la RUTA CRICA:

Gráfico 10.7.

Estructura para representar una actividad



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP = Tiempo de inicio más próximo

TP = Tiempo de terminación más próximo

IL = Tiempo de inicio más lejano

TL= Tiempo de terminación más lejano

5= Nombre de actividad o símbolo

t= tiempo de duración de la actividad

Construcción del World Trade Center (Nueva York)

Contexto: La construcción de las Torres Gemelas del World Trade Center en la década de 1970 fue uno de los proyectos arquitectónicos más ambiciosos de su tiempo.

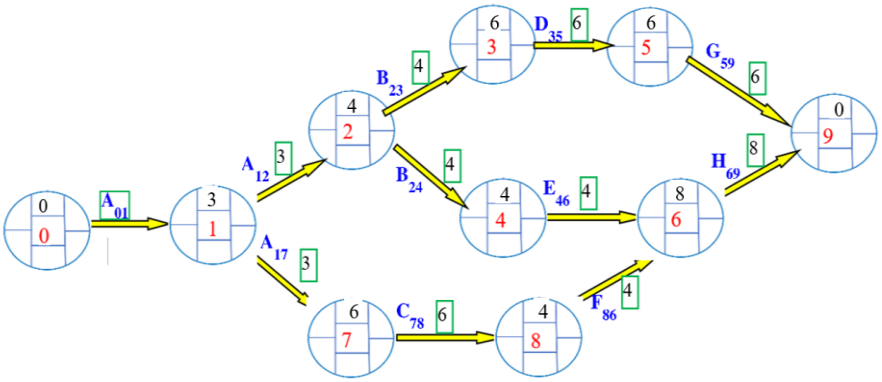
Aplicación del CPM:

El CPM se utilizó para planificar la construcción de los edificios, que involucraba tareas complejas como la excavación, cimentación y ensamblaje de estructuras de acero.

Ayudó a coordinar a múltiples contratistas y proveedores, asegurando que las actividades críticas se completaran a tiempo.

Gráfico 10.8.

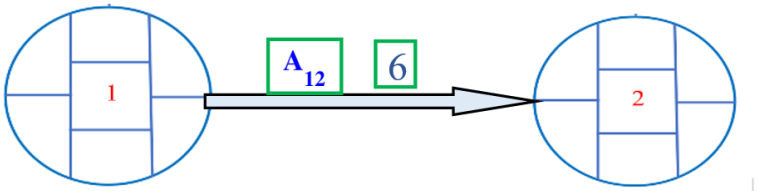
Diagrama de red de las Actividades



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Gráfico 10.8.

Estructura del Arco que une nodos



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

A_{12}= Arco A, que va del nodo 1 al nodo 2

6 = duración de la actividad`

Juegos Olímpicos de Los Ángeles 1984

Contexto:

Los Juegos Olímpicos de Los Ángeles fueron un evento masivo que requirió una planificación meticulosa de las instalaciones deportivas, transporte y logística.

Aplicación del CPM:

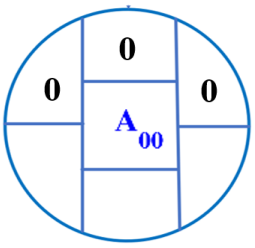
Se utilizó el CPM para coordinar la construcción de estadios, la instalación de infraestructura temporal y la planificación de rutas de transporte.

El método permitió cumplir con los plazos ajustados y garantizar que todo estuviera listo para el inicio de los Juegos.

PRIMER PASO: Realizamos un recorrido hacia adelante, comenzando con un nodo ficticio inicial

Gráfico 10.9.

Actividad A_{00}.



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Actividad A_{00} (Gráfico 10.9.)

Este nodo tiene un:

IP(A_{00})=0= tiempo de inicio más próximo

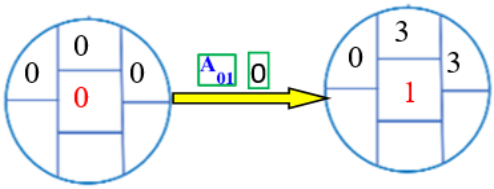
TP(A_{00}) =0 = tiempo de terminación más próximo

t=0= duración

ACTIVIDAD A_{01}

Gráfico 10.10.

Actividad A_{01}



Proyecto de construcción del Burj Khalifa (Dubái)

Contexto:

El Burj Khalifa, inaugurado en 2010, es el edificio más alto del mundo, con una altura de 828 metros.

Aplicación del CPM:

El CPM se utilizó para planificar y gestionar las actividades críticas durante la construcción de esta megaestructura.

Ayudó a coordinar a miles de trabajadores y asegurar que los materiales y recursos llegaran a tiempo, evitando retrasos en el cronograma.

Fue esencial para gestionar la complejidad del proyecto y garantizar su finalización dentro del plazo previsto.

Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(A_{01}) =0= tiempo de inicio más próximo.

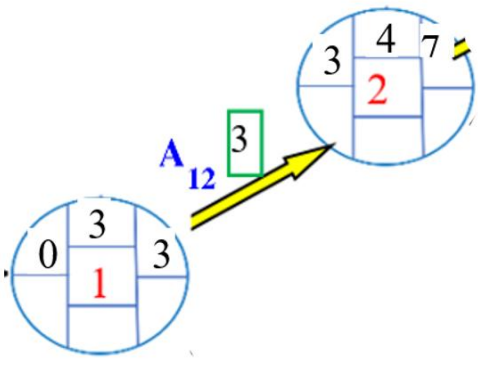
t=3= duración

TP(A_{01}) = IP(A_{01})+t=0+3=3

ACTIVIDAD A_{12}

Gráfico 10.11.

Actividad A_{12}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(A_{12}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad A_{12}=0

T=duración=3

TP(A_{12}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad A_{12} =

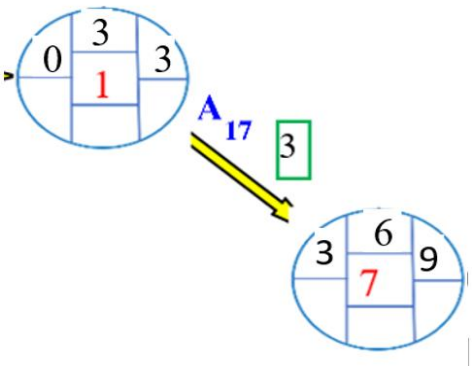
IP(A_{12}) +3

TP(A_{12}) =0+3=3

ACTIVIDAD A_{17}

Gráfico 10.12.

Actividad A_{17}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(A_{17}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad A_{17}=0

T=duración=3

TP(A_{17}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad A_{17} =

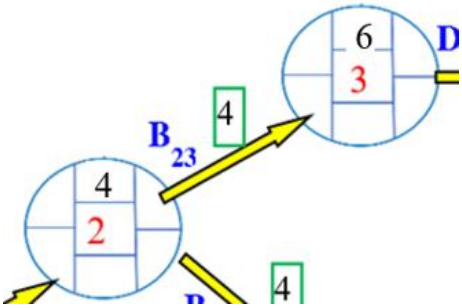
IP(A_{17}) +3

TP(A_{17}) =0+3=3

ACTIVIDAD B_{23}

Gráfico 10.13.

Actividad B_{23}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(B_{23}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad B_{23}=3

T=duración=4

TP(B_{23}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad B_{23} =

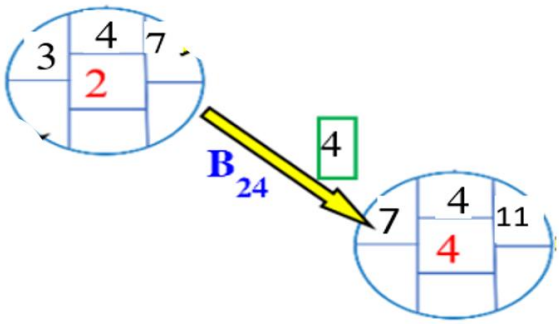
IP(B_{23}) +4

TP(B_{23}) =4+3=7

ACTIVIDAD B_{24}

Gráfico 10.14.

Actividad B_{24}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(B_{24}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad B_{24}=3

T=duración=4

TP(B_{24}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad B_{24}=

IP(B_{24}) +4

TP(B_{24}) =3+4=7

ACTIVIDAD C_{78}

Ampliación del Canal de Panamá

Contexto:

La ampliación del Canal de Panamá, completada en 2016, fue un proyecto de ingeniería monumental que duplicó la capacidad del canal para manejar barcos más grandes.

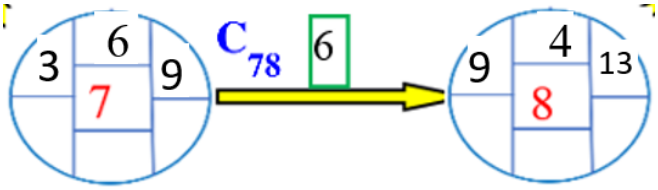
Aplicación del CPM:

Se utilizó el CPM para identificar las actividades críticas en la construcción de las nuevas esclusas y la excavación de canales adicionales.

El método permitió gestionar los recursos de manera eficiente y minimizar los retrasos en un proyecto de gran escala y relevancia global.

Gráfico 10.15.

Actividad C_{78}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(C_{78}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad C_{78}=3

t=duración=6

TP(C_{78}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad C_{78}=

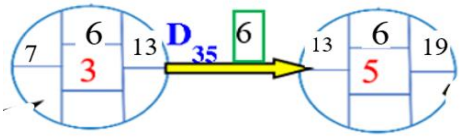
IP(C_{78}) +6

TP(C_{78}) =3+6=9

ACTIVIDAD D_{35}

Gráfico 10.16.

Actividad D_{35}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(D_{35}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad D_{35}=7

t=duración=6

TP(D_{35}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad D_{35}=

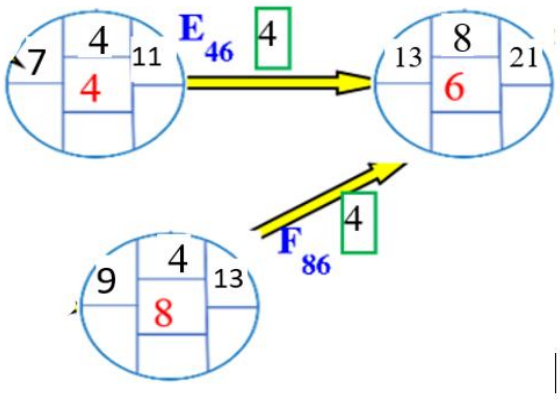
IP(D_{35}) +6

TP(D_{35}) =7+6=13

ACTIVIDAD E_{46}-F_{86}

Gráfico 10.17.

Actividad E_{46}-F_{86}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

ARCO E_{46}

IP(E_{46}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad E_{46}=7

t=duración=4

TP(E_{46}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad E_{46}=

IP(E_{46}) +4

TP(E_{46}) =7+4=11

ARCO F_{86}

IP(F_{86}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad F_{86}=9

t=duración=4

TP(F_{86}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad F_{86}=

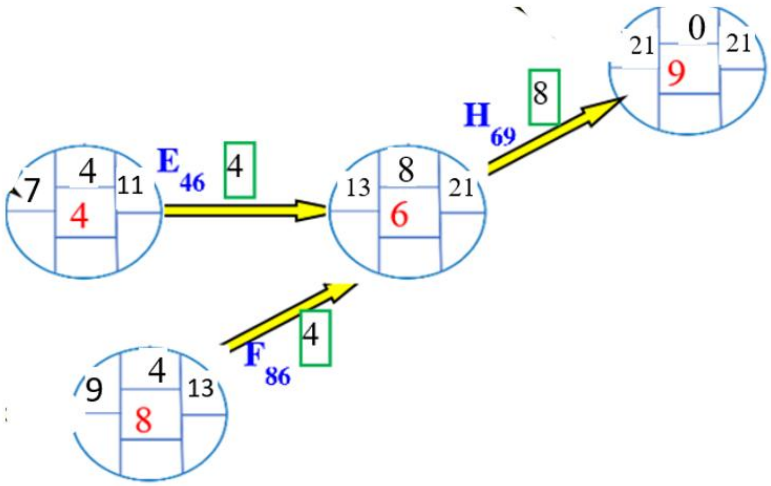
IP(F_{86}) +4

TP(F_{86}) =9+4=13

ACTIVIDAD H_{69}

Gráfico 10.18.

Actividad H_{69}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Para iniciarse la actividad H_{69}, tienen que haber terminado las actividades F_{86} Y E_{46}, como la una termina a los 13 días y la otra a los 11, escogemos la de más larga duración, F86 que termina a los 13 días.

Por lo tanto, tenemos:

IP(H_{69}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad H_{69} =13

t=duración=8

TP(H_{69}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad H_{69}=

IP(H_{69}) + 8

TP(H_{69}) =13+8=21

ACTIVIDAD G_{59}

Construcción del Eurotúnel (Canal de la Mancha)

Contexto:

El Eurotúnel, inaugurado en 1994, conecta Francia e Inglaterra a través de un túnel submarino de 50 kilómetros.

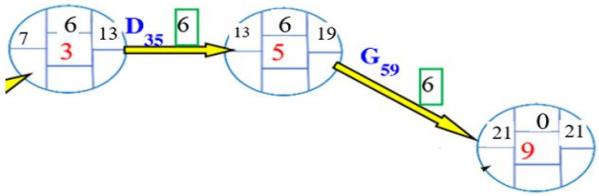
Aplicación del CPM:

El CPM se utilizó para coordinar las actividades críticas, como la perforación desde ambos lados del canal y la instalación de sistemas eléctricos y de ventilación.

Permitió gestionar la complejidad del proyecto, asegurando que las actividades interdependientes se completaran a tiempo.

Gráfico 10.19.

Actividad G_{59}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

IP(G_{59}) = tiempo de inicio más temprano de la actividad G_{59} =13

t=duración=6

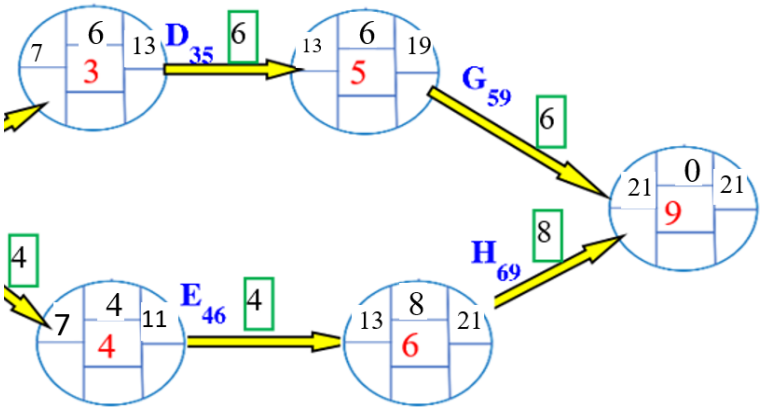
TP(G_{59}) = tiempo de terminación más pronto de la actividad G_{59}= IP(G_{59}) +6

TP(G_{59}) =13+6=19

ACTIVIDAD FICTICIA FIN_9

Gráfico 10.20.

Actividad ficticia FIN_9



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

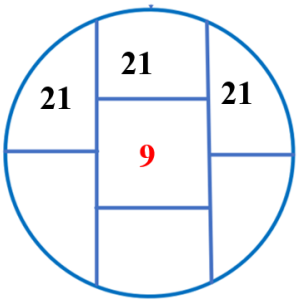
Para iniciarse la actividad FIN_9, tienen que haber terminado las actividades G_{59} Y H_{69}, como la una termina a los 19 días y la otra a los 21, escogemos la de más larga duración, H_{69} que termina a los 21 días.

Con esto terminamos el primer paso que es hacia adelante, arrojándonos un lapso máximo de 21 días para toda la red.

SEGUNDO PASO: ahora realizamos un recorrido hacia atrás, desde nuestro último nodo el ficticio 9, el cual tiene una duración de cero días.

Gráfico 10.21.

Actividad ficticia FIN_9



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Ahora trabajaremos con:

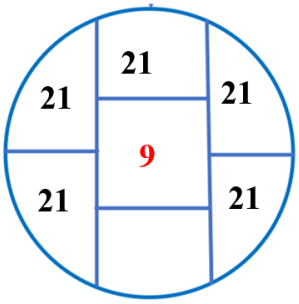
IL = Tiempo de inicio más lejano

TL= Tiempo de terminación más lejano

H=holgura

Gráfico 10.22.

Actividad ficticia FIN_9, ***Tl e IL***



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

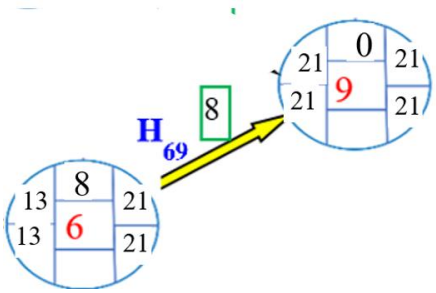
TL(FIN_9) = 21 (Gráfico 10.21.)

IL(FIN_9) = TL(FIN_9)-t= 21 -0=21 (Gráfico 10.21.)

ACTIVIDAD H_{69}

Gráfico 10.23.

Actividad H_{69}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(H_{69}) = Terminación más lejano para H_{69}=IL(FIN_9) =21

IL(H_{69}) = Inicio más lejano para H_{69}**=TL(H_{69})-t=21-8=13**

H=HOLGURA= TL(H_{69})-TP(H_{69}) =21-21=0

Construcción del Sistema Interestatal de Carreteras en Estados Unidos

Contexto: En la década de 1950, el gobierno de Estados Unidos emprendió uno de los proyectos de infraestructura más ambiciosos: la construcción de la red de carreteras interestatales, que abarcó miles de kilómetros.

Aplicación del CPM:

Se utilizó el CPM para planificar y coordinar las etapas de construcción en diferentes estados.

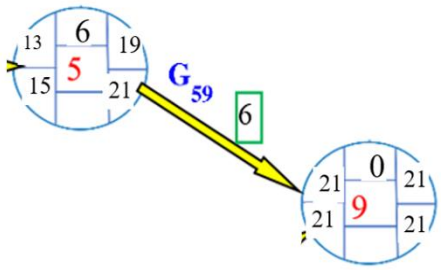
El método ayudó a identificar las actividades críticas, permitiendo priorizar recursos y reducir retrasos.

Gracias al CPM, se logró mantener el proyecto dentro de los plazos establecidos, lo que fue crucial para cumplir con los objetivos de desarrollo económico y movilidad nacional.

ACTIVIDAD G_{59}

Gráfico 10.24.

Actividad G_{59}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(G_{59}) = Terminación más lejano para G_{59}**= IL(FIN_9) = 21**

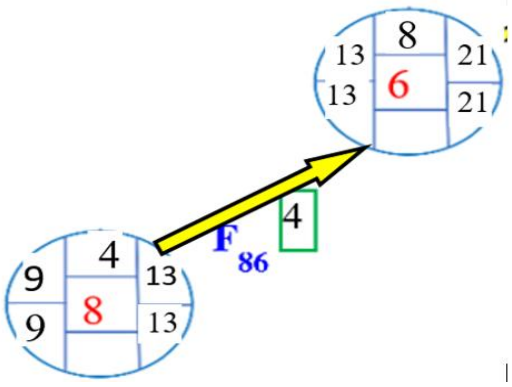
IL(G_{59}) = Inicio más lejano para G_{59}**=TL(G_{59})-t=21-6=15**

H=HOLGURA= TL(G_{59})-TP(G_{59}) =21-19=2

ACTIVIDAD F_{86}

Gráfico 10.25.

Actividad F_{86}



Restauración de la Estatua de la Libertad (1984-1986)

Contexto:

La Estatua de la Libertad fue sometida a una restauración completa en preparación para su centenario en 1986.

Aplicación del CPM:

El CPM se utilizó para planificar las actividades críticas, como la reparación de la estructura interna y la restauración de la superficie de cobre.

Ayudó a coordinar a los equipos de trabajo y garantizar que el proyecto se completara a tiempo para las celebraciones.

Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(F_{86}) = Terminación más lejano para F_{86} **= IL(H_{69}) = 13**

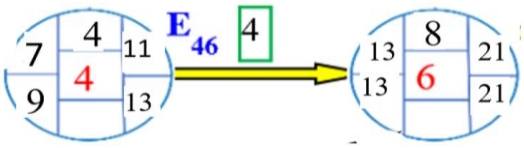
IL(F_{86}) = Inicio más lejano para F_{86} **=TL(F_{86})-t=13-4=9**

H=HOLGURA= TL(G_{59})-TP(G_{59}) =13-13=0

ACTIVIDAD E_{46}

Gráfico 10.26.

Actividad E_{46}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(E_{46}) = Terminación más lejano para E_{46} **= IL(H_{69}) = 13**

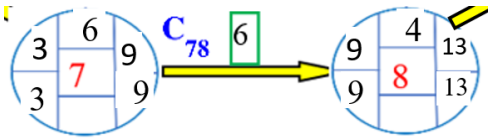
IL(E_{46}) = Inicio más lejano para E_{46} **=TL(F_{86})-t=13-4=9**

H=HOLGURA= TL(E_{46})-TP(E_{46}) =13-13=0

ACTIVIDAD C_{78}

Gráfico 10.27.

Actividad C_{78}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(C_{78}) = Terminación más lejano para C_{78}**= IL(F_{86}) = 9**

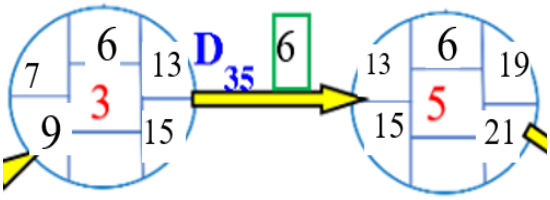
IL(C_{78}) = Inicio más lejano para C_{78}**=TL(C_{78})-t=9-6=3**

H=HOLGURA= TL(C_{78})-TP(C_{78}) =9-9=0

ACTIVIDAD D_{35}

Gráfico 10.28.

Actividad D_{35}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(D_{35}) = Terminación más lejano para D_{35}**= IL(G_{59}) = 15**

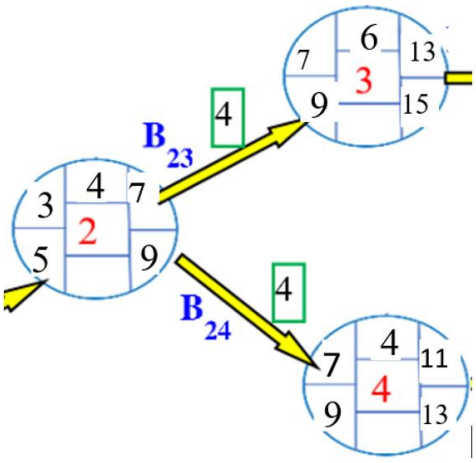
IL(D_{35}) = Inicio más lejano para D_{35}**TL(D_{35})-t=15-6=9**

H=HOLGURA= TL(D_{35})-TP(D_{35}) =15-13=2

ACTIVIDADES B_{23} - B_{24}

Gráfico 10.29.

Actividad B_{23} - B_{24}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(B_{23}) = Terminación más lejano para B_{23}**= IL(D_{35}) = 9**

TL(B_{24}) = Terminación más lejano para B_{24}**= IL(F_{86}) = 9**

Los tiempos de inicio más lejanos para B_{23} y B_{24} es 9 en ambos casos, por lo que el tiempo más lejano para terminar las actividades B_{23} y B_{24} es 9, se escoge el valor menor.

IL(B_{23}) = Inicio más lejano para B_{23}**=TL(B_{23})-t=9-4=5**

H=HOLGURA= TL(B_{23})-TP(B_{23}) =9-7=2

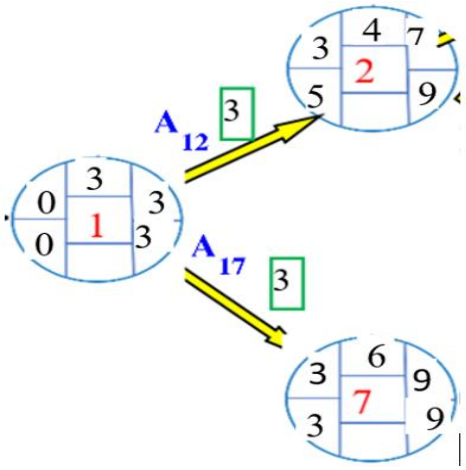
IL(B_{24}) = Inicio más lejano para B_{24}**=TL(B_{24})-t=9-4=5**

H=HOLGURA= TL(B_{24})-TP(B_{24}) =9-7=2

ACTIVIDADES A_{12} - A_{17}

Gráfico 10.30.

Actividad A_{12} – A_{17}



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

TL(A_{12}) = Terminación más lejano para **(A_{12})= IL(B_{23} - B_{24}) = 5**

TL(A_{17}) = Terminación más lejano para **(A_{17})= IL(C_{78}) = 3**

Los tiempos de inicio más lejanos para A_{12} y A_{17} es 5 y 3 en ambos casos, por lo que el tiempo más lejano para terminar las actividades A_{12} y A_{17} es 3, se escoge el valor menor.

IL(A_{12}) = Inicio más lejano para **A_{12}=TL(A_{12})-t=3-3=0**

H=HOLGURA= TL(A_{12})-TP(A_{12}) =3-3=0

IL(A_{17}) = Inicio más lejano para **A_{17}=TL(A_{17})-t=3-3=0**

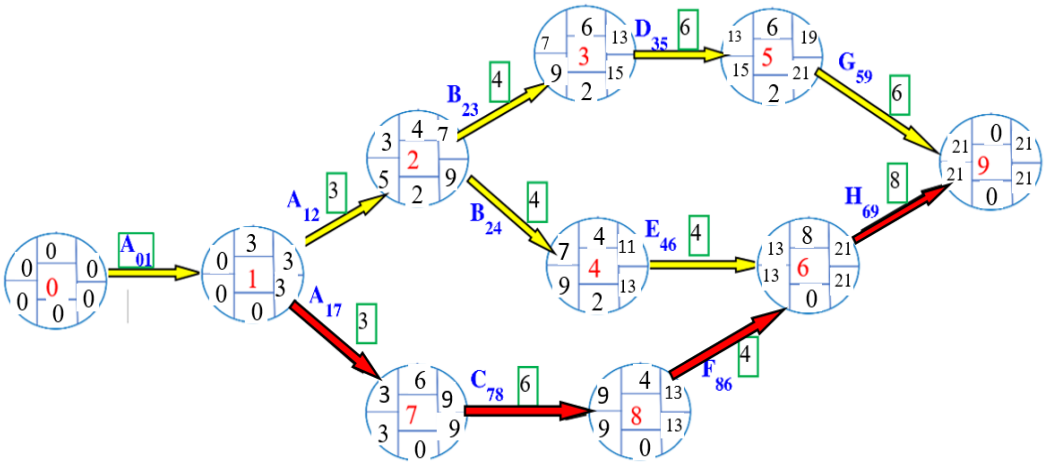
H=HOLGURA= TL(A_{17})-TP(A_{17}) =3-3=0

Regresamos al nodo 1 inicial.

Al revisar el diagrama de red, revisamos todos los que tienen holgura cero, dándonos el siguiente diagrama con su ruta crítica.

Gráfico 10.31.

RUTA CRITICA



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

10.4.-CONCLUSIONES

El problema de la ruta crítica fue solucionado por medio de SOLVER, y después con la aplicación del algoritmo de la ruta crítica, se confirmó su exactitud al compararlos.

Los problemas de ruta crítica tienen una enorme aplicación dentro del campo de la gestión de proyectos, su utilización para el control de este corresponde a todo un curso por separado.

10.5.-CUESTIONARIO

10.5.1.-VERDADERO-FALSO

1. Puedes estar seguro de que ambos PERT como CPM No son modelos de redes. (V) (F)
2. Pueden tomar la misma cantidad de tiempo las actividades que se grafican por medio de una red. (V) (F)
3. CPM: Se utiliza para controlar y rastrear el tiempo planificado del proyecto de modo que, en caso de retrasos, se pueda aumentar el nivel de recursos para

dar un impulso al tiempo de las actividades y cumplir con la duración planificada. (V) (F)

4. PERT: Es utilizada cuando se desconoce la variable "tiempo" y sólo se dispone de tiempos estimados. (V) (F)
5. La hora más temprana (PT) de un evento es la hora (estimada) del evento en la que las actividades anteriores comienzan lo antes posible. (V) (F)
6. Se podría decir que un proyecto es: una empresa temporal para crear un producto o servicio único. (V) (F)
7. El tiempo de finalización más temprano de la actividad depende del tiempo de finalización más temprano del proyecto. (V) (F)
8. El Tiempo más largo para completar una actividad depende de la fecha de finalización más cercana del proyecto. (V) (F)
9. El tiempo de finalización más largo es igual a su tiempo de inicio más próximo en cualquiera de las actividades de la ruta crítica. (V) (F)
10. El análisis estratégico de la red PERT se centra en la asignación de recursos para reducir el tiempo de la ruta crítica. (V) (F)

10.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

11.- De todos los caminos de la red, existe un camino crítico en donde:

a.- Se puede encontrar el tiempo máximo esperado.

b.- Se puede encontrar el tiempo mínimo esperado

c.-Se puede encontrar el tiempo real máximo

d.- Se puede encontrar un tiempo real mínimo

12.- El momento de inicio más cercano de una operación que sale del nodo C.

a.- Es el máximo de los tiempos de finalización más cercanos de todas las operaciones entrantes en el nodo C

b.- Es igual al tiempo de finalización más cercano de la misma operación menos el tiempo de trabajo estimado

c.- Depende de todas las rutas desde la fuente al nodo C.

d.- todo lo anterior

13.-El tiempo de finalización más lejano (TTL) de una actividad que ingresa al nodo H

a. Es igual al máximo de los tiempos de inicio más distante de todas las operaciones que salen del nodo H

b. Depende del tiempo de finalización más distante del proyecto

c. Es igual al momento de inicio más distante menos la duración de la actividad especificada

d. nada de lo anterior

14.-El modelo PERT/Costo asume que:

a. cada actividad **llega a** su **momento** optimista

b. **Los** costos **se distribuyen** uniformemente **durante** la **permanencia** de la **operación.**

c. **Los** tiempos de **operación** son estadísticamente **independientes.**

d. nada de lo anterior

10.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

15.- Construya el diagrama de red CPM para las actividades dadas en la siguiente tabla, halle la ruta crítica.

ACTIVIDADES	PREDECESORES INMEDIATOS	TIEMPO DIAS
A	---	2
B	---	4
C	A	4
D	B	6
E	B	4
F	C	3
G	D	6
H	E	8
I	G	7
J	E	7
K	H	4
L	F	5
M	L, I, K, J	8

16.- Halle los tiempos de inicio más próximos, los tiempos de terminación más próximos, los tiempos de inicio más lejanos. Halle la ruta crítica.

ACTIVIDAD	**PREDECESORES INMEDIATOS**	**OPTIMISTA**	**MAS PROBABLE**	**PESIMISTA**
A	**---**	**1**	**3**	**4**
B	**A**	**1**	**4**	**6**
C	**A**	**2**	**4**	**5**
D	**B, C**	**2**	**4**	**7**
E	**D**	**2**	**2**	**6**
F	**B, C**	**2**	**2**	**5**
G	**B, C**	**1**	**3**	**6**
H	**F, G**	**1**	**3**	**7**
I	**F, G**	**2**	**4**	**6**
J	**H, I**	**2**	**4**	**6**

10.6.-GLOSARIO

Actividad.

Un trabajo que debe ser terminado como parte del proyecto.

Actividad ficticia.

Una actividad imaginaria, que no requiere tiempo

y es utilizada para mantener las relaciones de precedencia

adecuadas en un diagrama de red

Actividades críticas.

Actividades en la ruta crítica.

Costo de recorte.

El costo requerido para lograr el tiempo de recorte.

Costo normal.

El costo requerido para lograr el tiempo normal.

CPM.

Siglas de Critical Path Method (Método de la ruta crítica), un método para programación y control de proyectos.

Diagrama de red.

Método gráfico para representar un proyecto con nodos y arcos.

Evento.

La terminación de todas las actividades que llevan a un nodo en una red

Holgura.

El tiempo que una actividad puede retrasarse respecto a su tiempo de inicio más próximo sin retrasar la terminación de todo el proyecto.

Lista de actividades.

Una lista de los trabajos en un proyecto con suspredecesores inmediatos, tiempos esperados y recurso necesarios.

Nodo. Un círculo en una red CPM, que indica la terminación de ciertas actividades y el inicio de otras o la actividad en sí.

Paso hacia adelante.

El proceso de moverse a lo largo de la red desde el principio hasta el final, calculando el tiempo de inicio más próximo y el tiempo de terminación más próximo de cada actividad.

Paso hacia atrás.

El proceso de moverse hacia atrás a lo largo de la red desde el final hacia el principio, calculando el tiempo de terminación más lejano y luego el tiempo de inicio más lejano de cada actividad.

Predecesores inmediatos.

Aquellas actividades que deben ser terminadas inmediatamente antes del comienzo de la actividad en cuestión.

Rama.

Línea en una red CPM que indica una actividad en los arcos o la precedencia de una actividad en los nodos. También se le llama *arco*.

Recorte.

Un término en CPM para describir el proceso de reducir el tiempo que se requiere para completar una actividad.

Ruta.

Una secuencia de actividades que van del nodo de inicio hasta el nodo de terminación de una red.

Ruta crítica.

Una secuencia de actividades que determinan la ruta más larga a través de una red, la cual proporciona el tiempo mínimo en el que todo un proyecto puede ser concluido.

Tiempo de inicio más lejano.

En una red CPM, el último momento en el cual una actividad puede comenzar, sin retrasar la terminación de todo el proyecto.

Tiempo de inicio más próximo.

En una red CPM, el momento más próximo en el cual una actividad puede comenzar.

Tiempo de recorte.

En CPM, el tiempo mínimo posible para terminar la actividad, correspondiente a la concentración máxima de los recursos.

Tiempo de terminación más lejano.

El momento más lejano en el cual se puede terminar una actividad sin retrasar la terminación de todo el proyecto.

Tiempo de terminación más próximo.

En una red CPM, el momento más próximo en el que una actividad puede terminarse.

Tiempo más probable.

El tiempo requerido para terminar una actividad bajo Circunstancias normales.

Tiempo normal.

En CPM, el tiempo máximo para terminar la actividad, correspondiente al uso mínimo de los recursos.

Tiempo optimista.

El tiempo requerido para completar una actividad si todo va a la perfección.

Tiempo pesimista.

El tiempo requerido para terminar una actividad bajo las condiciones más desfavorables.

PARTE 3. ALGORITMO ADMINISTRACION DE PROYECTOS

CAPITULO 11: MÉTODO PERT (PROYECT EVALUETION AND REVIEW TECHNIQUE)

Proyecto de desarrollo del misil Polaris (Marina de los Estados Unidos)

Contexto:

Aunque el método PERT fue el principal utilizado en este proyecto, el CPM también desempeñó un papel importante en ciertas fases.

Aplicación del CPM:

Se aplicó el CPM para planificar actividades críticas relacionadas con la producción y ensamblaje del misil Polaris.

Ayudó a coordinar múltiples tareas interdependientes, asegurando que los plazos se cumplieran en un proyecto de alta complejidad y relevancia estratégica durante la Guerra Fría.

11.1.-OBJETIVOS

-Aplicar Algoritmo RUTA MAS CORTA, pero maximizando, para resolver problemas de ACABADOS SARANGO.

-Solucionar problema prototípico con Algoritmo RUTA CRITICA

-Verificar resultados

11.2.-INTRODUCCION

El método PERT (equivalente a la sigla en inglés (Proyect Evaluetion and Review Technique o técnica de evaluación y revisión de proyectos), es utilizado en el desarrollo y control de proyectos. Su finalidad principal es determinar la duración de un proyecto.

En este sentido la principal asunción de PERT, es que las actividades y sus tiempos de duración son de carácter probabilístico.

PERT: Se utiliza cuando la variable "tiempo" es desconocida y solo se cuenta con tiempos estimados. En estos casos la duración del proyecto es la suma de los tiempos esperados para cada una de las actividades que lo componen. En estos casos, el tiempo esperado por actividad está basado en el tiempo pesimista, optimista y más probable.

Para utilizar este método necesitaremos considerar las siguientes condiciones:

Al igual que en la técnica CPM, primero se define el problema, se elabora el listado de actividades que se desea controlar en el proyecto y se describe las relaciones de precedencia, para luego elaborar la RED PERT.

1. establecer el proyecto con todas sus actividades.

2. Especificar cuál debe comenzar antes y cuál debe seguir después.

3. Graficar estas condiciones.

Montréal 1976

Organización de los Juegos Olímpicos de Montreal 1976

Contexto:

Los Juegos Olímpicos de Montreal requirieron la construcción de instalaciones deportivas, infraestructura de transporte y alojamiento en un plazo ajustado.

Aplicación del PERT:

PERT se utilizó para planificar las actividades críticas relacionadas con la construcción de estadios y la logística del evento.

Ayudó a gestionar las incertidumbres asociadas con los plazos ajustados y los recursos limitados.

Aunque el proyecto enfrentó desafíos financieros, el uso de PERT permitió completar las instalaciones a tiempo para los Juegos.

4. Establecer costos y tiempo estimado para cada actividad. Para cada actividad se cuenta con un tiempo pesimista (**Tp**), el más largo, el tiempo optimista (**To**), el más corto, y el tiempo normal (**Tm**), y a partir de los mismos se estima el tiempo esperado (te) para cada actividad.

5. Identificar la trayectoria más larga del proyecto, que determinará la duración del

proyecto (Ruta Crítica).

5. El grafico ayudara a planear, supervisar y controlar el proyecto.

11.3.-EJEMPLO PROTOTÍPICO ACABADOS SARANGO

Acabados Sarango, instala tumbados en locales comerciales. Luis Sarango esta intranquilo por el tiempo que les ha tomado entregar actuales proyectos, ya que algunos de sus obreros son recién contratados. Por lo que para este nuevo proyecto se ha preparado pidiéndoles estimen sus tiempos de terminación más optimista, probable y pesimista en días. Indicados en la tabla 11.1.

Tabla 11.1.

Actividades

ACTIVIDAD	To	Tm	Tp	PRECEDENTES INMEDIATOS
A	3	6	8	------
B	2	4	4	------
C	1	2	3	------
D	6	7	8	C
E	2	4	6	B,D
F	6	10	14	A,E

Proyecto del submarino nuclear Nautilus

Contexto:

El desarrollo del primer submarino nuclear, el USS Nautilus, fue un proyecto pionero en la década de 1950 que enfrentó desafíos tecnológicos y de ingeniería sin precedentes.

Aplicación del PERT:

PERT se utilizó para planificar las actividades relacionadas con el diseño del reactor nuclear, la construcción del submarino y las pruebas iniciales.

Permitió identificar las áreas de mayor incertidumbre y optimizar la asignación de recursos para minimizar los riesgos.

El submarino fue lanzado en 1954, marcando un hito en la historia de la tecnología naval.

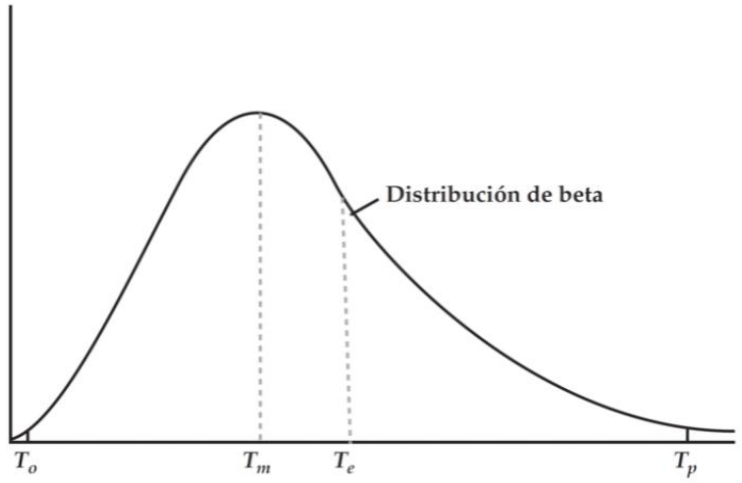
G	1	2	4	A,E
H	3	6	9	F
I	10	11	12	G
J	14	16	20	C
K	2	8	10	H,I

Cada actividad de la tabla 11.1. Se estima como una variable aleatoria, que tiene forma de distribución beta sesgada a la derecha, como en la Gráfico 11.1.

Gráfico 11.1.

Distribución de Beta

Para el análisis estadístico del método PERT, se considera el tiempo de cada actividad como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad beta. Esta distribución se encuentra sesgada a la derecha de la siguiente forma:



Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Donde:

To= Tiempo optimista: Es el menor tiempo posible de las actividades de un proyecto sin que Sucedan situaciones que los posterguen.

Tm=Tiempo más probable: Es el tiempo que se necesita normalmente para desarrollar una Actividad.

Tp =Tiempo pesimista: Es el tiempo más prolongado en que las actividades de un Proyecto Finalizan en las situaciones más adversas.

Desarrollo del Boeing 747

Contexto:

El Boeing 747, conocido como el "Jumbo Jet", fue el primer avión de fuselaje ancho y un proyecto revolucionario en la industria de la aviación durante la década de 1960.

Aplicación del PERT:

El desarrollo del 747 involucró miles de tareas interdependientes, desde el diseño del motor hasta la construcción de una nueva planta de ensamblaje.

PERT ayudó a gestionar las incertidumbres en las actividades de diseño e ingeniería, asegurando que el proyecto se completara dentro del cronograma.

El primer vuelo del 747 en 1969 marcó el inicio de una nueva era en los viajes aéreos comerciales.

Para poder transformar el proyecto en una red de tiempo discreto, aplicamos la fórmula de tiempo esperado **Te** para la distribución Beta Unimodal

Te=Tiempo esperado para una actividad: Es el tiempo obtenido en el PERT usando el

promedio con la ecuación:

$$T_e = \frac{(T_o + 4T_m + T_p)}{6}$$

Tabla 11.2.

Tiempos esperados

ACTIVIDAD	**To**	**Tm**	**Tp**	**Tiempo Esperado (Te)**
A	3	6	8	5.83
B	2	4	4	3.67
C	1	2	3	2.00
D	6	7	8	7.00
E	2	4	6	4.00
F	6	10	14	10.00
G	1	2	4	2.17
H	3	6	9	6.00

I	10	11	12	11.00
J	14	16	20	16.33
K	2	8	10	7.33

Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Programa Apolo (NASA)

Contexto:

El programa Apolo, desarrollado en la década de 1960, tenía como objetivo llevar al hombre a la Luna y devolverlo a salvo a la Tierra.

Aplicación del CPM:

Aunque PERT fue el método predominante, el CPM se utilizó en la planificación de actividades críticas específicas, como el diseño y construcción de los cohetes Saturno V y los módulos espaciales.

Permitió optimizar los recursos y minimizar riesgos en un proyecto de altísima complejidad técnica y logística.

Con estos tiempos esperados, aplicando el algoritmo de ruta crítica obtenemos el siguiente diagrama de red (Gráfico 11.2.), con su respectiva ruta critica. Arrojando un tiempo esperado de terminacion del proyecto de **36.33 dias.**

La Ruta Critica seria: C-D-E-F-H-K

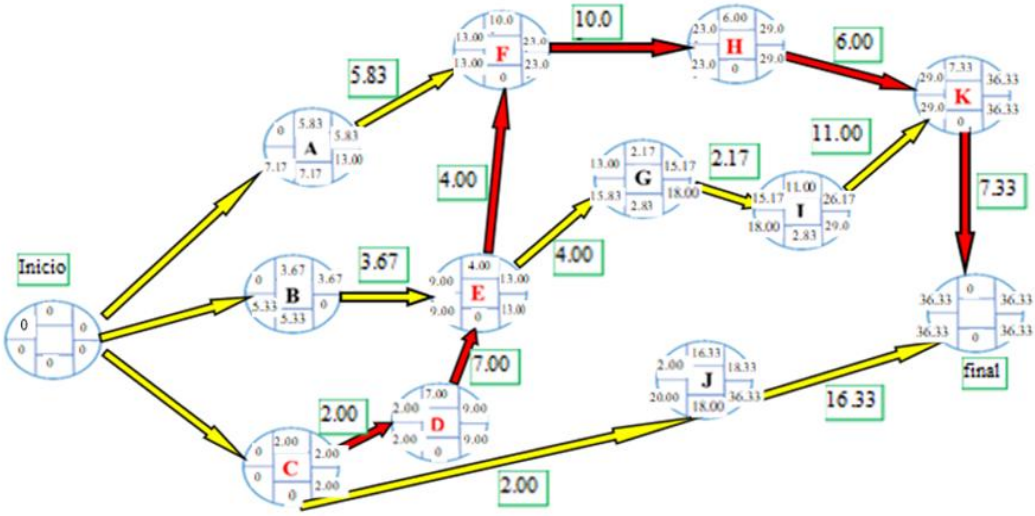


Gráfico 11.2.

Ruta critica

Nota: Diagrama según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Este tiempo total estimado en la Ruta Crítica, sigue siendo incierto, por lo que calcularemos la varianza total del proyecto,

con la finalidad de tomar en cuenta estos aspectos probabilísticos.

La fórmula de la varianza para la distribución Beta unimodal es:

$$Var_i = \left(\frac{T_p - T_o}{6}\right)^2$$

$$Var(T) = \sum_{\text{ruta critica}} Var_i$$

Desarrollo de la Central Nuclear de Shippingport

Contexto:

La Central Nuclear de Shippingport, inaugurada en 1958, fue la primera planta de energía nuclear comercial en los Estados Unidos.

Aplicación del PERT:

PERT se utilizó para planificar las actividades críticas relacionadas con el diseño, construcción y puesta en marcha de la planta.

El método permitió gestionar las incertidumbres asociadas con la implementación de una tecnología completamente nueva.

La planta fue terminada a tiempo y demostró la viabilidad de la energía nuclear como fuente comercial de electricidad.

Tabla 11.3.

Varianzas

ACTIVIDAD	To	Tm	Tp	VARIANZA (Vari)
A	3	6	8	0.69
B	2	4	4	0.11
C	1	2	3	0.11
D	6	7	8	0.11
E	2	4	6	0.44
F	6	10	14	1.78
G	1	2	4	0.25
H	3	6	9	1.00
I	10	11	12	0.11
J	14	16	20	1.00
K	2	8	10	1.78

Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

Calculamos la varianza del proyecto ACABADOS SARANGO, sumando las varianzas de las actividades de la ruta crítica:

Var(T)=0.11+0.11+0.44+1.78+1.00+1.78=5.22

En esta dirección, en lugar de establecer el contrato de SARANGO con la base de duración del tiempo esperado de 36.33 semanas, será necesario proyectar la estimación de la duración respecto a la varianza encontrada, hallando su respectivo límite inferior (LI) y límite superior (LS).

También se puede dar el caso en el que la parte contratista, pregunte por tiempos específicos de terminación del proyecto. En este caso se pregunta cuál sería la probabilidad de terminar el contrato a los 30 días o a los 40 días. Para responder a esto, normalizamos la curva beta a una curva estándar normalizada, a través de las siguientes ecuaciones:

$$P(t < T) = P(z < Z)$$

Z= variable z normalizada de la distribución normal, con media y varianza (0, 1).

$$Z = \frac{T - T_e}{Var}$$

T=Fecha a ser evaluada

Te=Tiempo esperado

Los valores obtenidos de Z, son utilizados en las tablas normalizadas (Tabla 4), para hallar los porcentajes

Para 30 días:

Z= (30-36.66) / (5.22) = -1.276

De la tabla normalizada la probabilidad es: 10,38%

Construcción del Puente de la Bahía de Chesapeake

Contexto:

El Puente de la Bahía de Chesapeake, inaugurado en 1952, fue uno de los puentes colgantes más largos de su época.

Aplicación del PERT:

PERT se utilizó para planificar las actividades críticas relacionadas con la fabricación de componentes, el transporte de materiales y la construcción del puente.

Permitió gestionar las incertidumbres asociadas con las condiciones climáticas y los desafíos logísticos.

El puente se completó dentro del cronograma, mejorando significativamente la conectividad en la región.

Para 40 días:

Z= (40-36.66) / (5.22) = 0.639

De la tabla normalizada la probabilidad es: 73.57%

Tabla 11.4.

Tablas Normalizadas para hallar porcentajes

El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

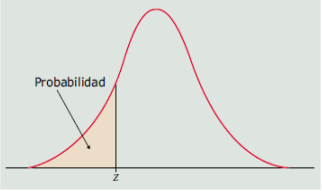


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

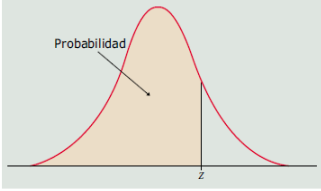


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Nota: Tabla según: https://www.plandemejora.com/como-calcular-la-ruta-critica/

11.4.-CONCLUSIONES

El problema solucionado con PERT, nos da una pequeña introducción, a la aplicación de las probabilidades a los temas que manejan situaciones discretas, agregándole la incertidumbre propia de la mayoría de las situaciones

prácticas. El método PERT ha demostrado ser una herramienta valiosa en la gestión de proyectos de gran escala y alta complejidad. Su capacidad para manejar incertidumbres y planificar actividades críticas ha permitido completar proyectos innovadores en los campos de la ingeniería, la tecnología y la exploración espacial.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS PARTE 3.

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (2009). *Network flows: Theory, algorithms, and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011). *Linear programming and network flows* (4ª ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (2004). *Introduction to linear optimization*. Belmont, MA: Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). *Programas de computación para formular alimentos*. Madrid, España: Avicultura profesional.

Cohen, M. A., & Murdock, J. (2012). *Operations research: A practical introduction*. Hoboken, NJ: Wiley.

Daniel Izquierdo Granja, & Ruiz Ruiz, J. J. (2006). PHPSIMPLEX Versión 0.81 [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm

Dantzig, G. B., & Thapa, M. (2003). *Linear programming: Foundations and extensions* (2ª ed.). New York, NY: Springer.

Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (1993). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. México D.F., México: Prentice Hall.

Gallagher, H., & Watson, J. (1990). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración*. México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Gass, S. I. (1990). *An illustrated guide to linear programming*. New York, NY: Dover Publications.

García Sabater, J. P. (2011). *Métodos cuantitativos de organización industrial*. Valencia, España: Universitat Politècnica de València. https://jpgarcia.webs.upv.es/?page_id=1932

González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A. (2015). *Manual práctico de investigación de operaciones I* (4.ª ed.). Barranquilla, Colombia: Editorial Universidad del Norte.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research* (10ª ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Kall, P., & Mayer, S. (2005). *Stochastic optimization: Methods and applications*. New York, NY: Springer.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming* (3ª ed.). New York, NY: Springer.

Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa* (5ª ed.). México D.F., México: Prentice Hall.

Murty, K. G., & Katta, S. (1983). *Linear programming*. New York, NY: Wiley.

Peñafiel, L. (1976). *Programación lineal*. México D.F., México: Trillas S.A.

Prawda Witenberg, J. (1977). *Métodos y modelos de investigación de operaciones: Volumen 1* (1977.a ed.). México D.F., México: Limusa.

Rardin, R. L. (2016). *Optimization in operations research* (2ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Rincón Abril, L. A. (2001). *Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Sasieni, M. W., & Cohen, R. (2007). *Operations research: A practical guide to the use of OR techniques*. Hoboken, NJ: Wiley.

Shamblin, J., & Stevens, G. T. (1988). *Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental*. México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Taha, H. A. (2017). *Operations research: An introduction* (10ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Varela, J. E. (1991). *Introducción a la investigación de operaciones*. México D.F., México: Fondo Editorial Interamericana.

Winston, W. L. (2004). *Operations research: Applications and algorithms* (4ª ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole.

ISBN: 978-9942-53-119-3

Compás
capacitación e investigación