Compás
capacitación e investigación

Cálculo Integral: Teoría y Problemas Resueltos

Edwin Fernando Palacios Meléndez
Karla Erenia Jácome Guerrero
Robert Andrés Vega Zambrano
Pablo José Palacios Chafla
Efrén André Herrera Baños
Luis Efrén Herrera Baños
Efrén Vinicio Herrera Muentes

www.grupocompas.com

© Edwin Fernando Palacios Meléndez
Karla Erenia Jácome Guerrero
Robert Andrés Vega Zambrano
Pablo José Palacios Chafla
Efrén André Herrera Baños
Luis Efrén Herrera Baños
Efrén Vinicio Herrera Muentes

© Editorial Grupo Compás, 2025
Guayaqui, Ecuador
www.grupocompas.com
http://repositorio.grupocompas.com

Primera edición, 2025

ISBN: 978-9942-53-140-7
Distribución online
Acceso abierto

Cita
Palacios, E., et, Al (2025) Cálculo Integral: Teoría y Problemas Resueltos. Editorial Grupo Compás

Índice

Dedicatoria

Este libro de Cálculo Integral: Teoría y Problemas Resueltos está dedicado a Dios, a mis padres José Palacios Llerena y Marcia Meléndez Castro (†), a mis hijos Pablo José (tú formación como Ingeniero en Telecomunicaciones me inspiro a esto), Jaime Moisés, María Fernanda y Romina Giovanna Palacios Chafla, y no pueden faltar mis dos grandes maestros Ing. Jaime Monteverde Nimbriotis (†) y Miguel Ángel Torres Almeida.

En honor a toda la promoción de mi hijo Pablito en las carreras de Telecomunicaciones, Electricidad, Electrónica y Automatización (TEEA), presento este libro como una contribución al conocimiento y al crecimiento profesional de todos quienes transitan este exigente y apasionante camino.

Sé que alcanzar la graduación requiere esfuerzo, constancia y entrega, y que el Cálculo Integral representa uno de los desafíos más importantes dentro de su formación.

Este libro ha sido concebido para ayudar a comprender los conceptos fundamentales del cálculo integral y su aplicación en situaciones reales. Espero que encuentren en estas páginas una herramienta que les brinde confianza, fortalezca su conocimiento y los prepare para enfrentar con éxito los retos de su carrera profesional.

Gracias por permitirme ser parte de esta aventura matemática.

Edwin Fernando Palacios Meléndez

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la publicación de este libro de Cálculo Integral:

Primero, agradezco a Dios y a mi familia por su amor, apoyo y paciencia mientras trabajaba en este proyecto. Sus palabras de aliento y motivación fueron fundamentales para mi éxito.

Al equipo editorial, gracias por su profesionalismo, dedicación y habilidad para convertir mis ideas en un libro bien estructurado y atractivo. Agradezco especialmente a mis dos grandes maestros y mentores: Ingenieros Jaime Moisés Monteverde Nimbriotis y Miguel Ángel Torres Almeida, quienes en mi formación de ingeniero me brindaron su confianza desde el principio y me guiaron a lo largo del proceso para después de muchos años lograr la publicación del libro de Cálculo Integral con sabiduría y experiencia.

También agradezco a mis colegas y amigos que ofrecieron su ayuda y comentarios valiosos durante la elaboración del libro. Sus críticas constructivas y sugerencias nos ayudaron a mejorar este libro.

Sin su ayuda y apoyo, este libro no habría sido posible. Muchas gracias a todos.

Edwin Fernando Palacios Meléndez

Prólogo

Es un placer para mí presentar este libro sobre Cálculo Integral, especialmente por Edwin Fernando Palacios Meléndez. Como matemático y profesor con amplia experiencia en la enseñanza del Cálculo Integral, el autor ha creado una obra que es rigurosa, clara y práctica. El cálculo integral es una herramienta matemática fundamental en la resolución de problemas de diversas disciplinas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales. Con este libro, el lector aprenderá los conceptos básicos de cálculo integral, desde la definición de integrales hasta la aplicación de técnicas de integración. El libro ofrece un enfoque claro y conciso para la comprensión de los conceptos de Cálculo Integral, con una gran cantidad de ejemplos resueltos para ayudar al lector a practicar y consolidar su conocimiento. Además, el autor hace uso de gráficos y diagramas para ilustrar los conceptos matemáticos, lo que ayuda a los lectores a visualizar mejor las ideas y a entenderlas de manera más clara. Este libro es adecuado para estudiantes de diferentes niveles, desde aquellos que se inician en el estudio del Cálculo Integral hasta aquellos con un nivel avanzado de conocimiento en este tema. El autor ha diseñado el libro para guiar al lector desde los conceptos básicos hasta los temas más avanzados del Cálculo Integral. En resumen, este libro es una excelente herramienta para aquellos que buscan aprender y aplicar el Cálculo Integral. Espero que los lectores encuentren este libro útil y práctico en su estudio del Cálculo Integral.

Ing. Néstor Armando Zamora Cedeño, M. Sc.

Docente Investigador UCSG

Capítulo 1: Integrales indefinidas y definidas

1.1. Integrales indefinidas de funciones algebraicas y trigonométricas.

En cálculo diferencial nos han dado una función, f(x), y nos han preguntado cuál era la derivada de esta función. A partir de esta sección se dará la vuelta a las cosas.

Definición: Dada una función, $f(x)$, una antiderivada de f(x) es cualquier función F(x) tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Si $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ entonces la antiderivada más general de $f(x)$ se llama integral indefinida y se denota como,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde, C es una constante arbitraria.

En esta definición el $\int$ se denomina símbolo de la integral, $f(x)$ se denomina el integrando, x se denomina variable de integración y el valor " c " se denomina la constante de integración.

En ocasiones, se dirá simplemente "integral" en lugar de "integral indefinida" (o "integral definida", cuando se trate del tema). A partir del contexto del problema es evidente que se trata de una integral indefinida (o una integral definida).

El proceso de encontrar la integral indefinida se llama integración o integración de f(x). En caso de necesitar especificar la variable de integración, se dirá que se está integrando f(x) con respecto a x. A continuación, se denotan los teoremas de las integrales indefinidas:

Teorema 1.1:

$$\int dv = v + C$$

Teorema 1.2:

$$\int adv = a\int dv = av + C$$

Teorema 1.3: Si f_1 y f_2 están definidas en el mismo intervalo entonces,

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

Teorema 1.4: Si n es un número racional,

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{n+1} v^{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1$$

En los siguientes ejercicios, se aplica el Teorema 1.3 para descomponer cada integral en la suma o diferencia de integrales individuales, lo que permite abordar cada término por separado. Posteriormente, se utilizan los teoremas 1.4 y 1.2 para evaluar las integrales indefinidas de manera inmediata. Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (x^2 - 3)dx$

Solución:

$$\int (x^2 - 3)dx = \int x^2 dx - 3\int dx \boxed{= \frac{1}{3}x^3 - 3x + C}$$

2. $\int (3x^5 - 2x^3)dx$

Solución:

$$\int (3x^5 - 2x^3)dx = 3\int x^5 dx - 2\int x^3 dx = 3 \cdot \frac{1}{6}x^6 - 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + C}$$

3. $\int (4x^3 - 3x^2 + 2x)dx$

Solución:

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 2x)dx = 4\int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 2\int x dx$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C \boxed{= x^4 - x^3 + x^2 + C}$$

4. $\int \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t\right) dt$

Solución:

$$\int\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{4}t^3-t\right)dt=\frac{1}{2}\int t^4dt+\frac{1}{4}\int t^3dt-\int tdt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+C\boxed{=\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{2}t^2+C}$$

5. $\displaystyle\int(5t^3-10t^{-6}+4)dt$

Solución:

$$\int(5t^3-10t^{-6}+4)dt=5\int t^3dt-10\int t^{-6}dt+4\int dt$$

$$=5\cdot\frac{1}{4}t^4-10\cdot\frac{1}{-5}t^{-5}+4t+C\boxed{=\frac{5}{4}t^4+2t^{-5}+4t+C}$$

6. $\displaystyle\int(1+6w^2-10w^4)dw$

Solución:

$$\int(1+6w^2-10w^4)dw=\int dw+6\int w^2dw-10\int w^4dw$$

$$=w+6\cdot\frac{1}{3}w^3-10\cdot\frac{1}{5}w^5+C\boxed{=w+2w^3-2w^5+C}$$

7. $\displaystyle\int\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

Solución:

$$\int\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int(x^{3/2}+x^{2/3})dx=\int x^{3/2}dx+\int x^{2/3}dx$$

$$\boxed{=\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{3}{5}x^{5/3}+C}$$

8. $\displaystyle\int\left(x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x-2\right)dx$

Solución:

$$\int\left(x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x-2\right)dx=\int x^4dx-\frac{1}{2}\int x^3dx+\frac{1}{4}\int xdx-2\int dx$$

$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{8}x^2-2x+C}$$

9. $\int(y^3+1.8y^2-2.4y)dy$

Solución:

$$\int(y^3+1.8y^2-2.4y)dy=\int y^3dy+1.8\int y^2dy-2.4\int ydy$$

$$=\frac{1}{4}y^4+1.8\cdot\frac{1}{3}y^3-2.4\cdot\frac{1}{2}y^2+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{4}y^4+0.6y^3-1.2y^2+C}$$

10. $\int(u+4)(2u+1)du$

Solución:

$$\int(u+4)(2u+1)du=\int(2u^2+9u+4)du=2\int u^2du+9\int udu+4\int du$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}u^3+9\cdot\frac{1}{2}u^2+4u+C\boxed{=\frac{2}{3}u^3+\frac{9}{2}u^2+4u+C}$$

11. $\int\left(\frac{4+6u}{\sqrt{u}}\right)du$

Solución:

$$\int\left(\frac{4+6u}{\sqrt{u}}\right)du=\int\left(\frac{4}{u^{1/2}}+\frac{6u}{u^{1/2}}\right)du=4\int u^{-1/2}du+6\int uu^{-1/2}du$$

$$=4\int u^{-1/2}du+6\int u^{1/2}du=4\cdot 2u^{1/2}+6\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$\int \left(\frac{4+6u}{\sqrt{u}}\right) du \boxed{= 8u^{1/2} + 4u^{3/2} + C = 8\sqrt{x} + 4\sqrt{u^3} + C}$$

12. $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}}\right) dx$

Solución:

$$\int \left(3\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(3x^{3/4} + 7x^{-5} + \frac{1}{6}x^{-1/2}\right) dx$$

$$= 3\int x^{3/4}dx + 7\int x^{-5}dx + \frac{1}{6}\int x^{-1/2}dx$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{7}x^{7/4} + 7 \cdot \frac{1}{-4}x^{-4} + \frac{1}{6} \cdot 2x^{1/2} + C$$

$$\boxed{= \frac{12}{7}x^{7/4} - \frac{7}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{1/2} + C}$$

13. $\int x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})dx$

Solución:

$$\int x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})dx = \int x(x^{1/3} + x^{1/4})dx = \int xx^{1/3}dx + \int xx^{1/4}dx$$

$$= \int x^{4/3}dx + \int x^{5/4}dx \boxed{= \frac{3}{7}x^{7/3} + \frac{4}{9}x^{9/4} + C}$$

14. $\int (u + \sqrt[3]{u})(4 - u^2)du$

Solución:

$$\int (u + \sqrt[3]{u})(4 - u^2)du = \int (u + u^{1/3})(4 - u^2)du$$

$$= \int (4u - u^3 + 4u^{1/3} - u^{7/3})du$$

$$= 4\int udu - \int u^3du + 4\int u^{1/3}du - \int u^{7/3}du$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 + 4 \cdot \frac{3}{4}u^{4/3} - \frac{3}{10}u^{10/3} + C$$

$$\int (u + \sqrt[3]{u})(4 - u^2)du \boxed{= 2u^2 - \frac{1}{4}u^4 + 3\sqrt[3]{u^4} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{u^{10}} + C}$$

15. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}} dt$

Solución:

$$\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}} dt = \int \left(\frac{27t^3}{t^{1/3}} - \frac{1}{t^{1/3}}\right) dt = 27 \int t^3 t^{-1/3} dt - \int t^{-1/3} dt$$

$$= 27 \int t^{8/3} dt - \int t^{-1/3} dt = 27 \cdot \frac{3}{11} t^{11/3} - \frac{3}{2} t^{2/3} + C$$

$$\boxed{= \frac{81}{11} t^{11/3} - \frac{3}{2} t^{2/3} + C}$$

16. $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} dx$

Solución:

$$\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} dx = \int \left(\frac{x^3}{x} - \frac{2x^{1/2}}{x}\right) dx = \int (x^2 - 2x^{-1/2}) dx$$

$$= \int x^2 dx - 2 \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot 2x^{1/2} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3} x^3 - 4\sqrt{x} + C}$$

En los ejercicios resueltos (1 al 16) se aplicaron de manera inmediata los teoremas 1.1 a 1.4 de integrales indefinidas sin utilizar algún método o técnica de integración. Más adelante se analiza el método de cambio de variable, y en el capítulo 2 se estudian las técnicas de integración. A continuación, se presentan ejercicios de aplicación básica de la antiderivada para calcular la ecuación de una curva en cualquier punto.

17. En el punto $(3, 2)$ está ubicado en una curva y en cualquier punto (x, y) en la curva, la tangente tiene una pendiente igual a $2x - 3$. Determine la ecuación de la curva.

Solución:

Recordemos que en cálculo diferencial la tangente a una curva en cualquier punto (x, y) representa a la derivada en ese punto, por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3 \qquad \Rightarrow \qquad dy = (2x - 3)dx$$

Esta última expresión se denomina ecuación diferencial (en el capítulo 4 profundizaremos en las ecuaciones diferenciales de primer orden). A continuación, integramos ambas partes como integrales indefinidas; por lo tanto:

$$\int dy = \int (2x - 3)dx$$

$$y = 2\int xdx - 3\int dx = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

$$y = x^2 - 3x + C$$

En esta última expresión se sustituye el punto $(3, 2)$ que está ubicada en la curva, en consecuencia, calculamos la constante C,

$$2 = 3^2 - 3(3) + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 2$$

Finalmente, la ecuación de la curva queda definida como,

$$\boxed{y = x^2 - 3x + 2}$$

18. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $3\sqrt{x}$. Si el punto $(9, 4)$ esta en la curva, obtenga una ecuación de dicha curva.

Solución:

Sabemos que la tangente a una curva en cualquier punto (x, y) representa a la derivada en ese punto, por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad \int dy = 3\int x^{1/2}dx$$

$$y = 3 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$y = 2\sqrt{x^3} + C$$

Dado que la curva pasa por el punto (9, 4), sustituimos estas coordenadas en la expresión anterior:

$$4 = 2\left(\sqrt{9}\right)^3 + C \qquad \Rightarrow \qquad 4 = 2(3)^3 + C$$

$$C = -50$$

Finalmente, la ecuación de la curva queda definida como,

$$\boxed{y = 2\sqrt{x^3} - 50}$$

19. Los puntos $(-1, 3)$ y $(0, 2)$ están en una curva y en cualquier punto (x, y) en la curva $y'' = 2 - 4x$. Determine la ecuación de la curva.

Solución:

Se sabe que la curva en cualquier punto (x, y) representa a la segunda derivada en ese punto, por tanto,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2 - 4x$$

$$\frac{dy'}{dx} = 2 - 4x$$

Despejando,

$$dy' = (2 - 4x)dx$$

Aplicamos integración en ambas expresiones para obtener la tangente a la curva (primera derivada de y), en consecuencia:

$$\int dy' = \int (2 - 4x)dx \qquad \Rightarrow \qquad y' = 2x - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y' = 2x - 2x^2 + C$$

Nuevamente, aplicamos integración en ambas expresiones para calcular la ecuación de la curva, por tanto:

$$\int dy = \int (2x - 2x^2 + C)dx \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + Cx + C_1$$

$$y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + Cx + C_1$$

Ahora procedemos a evaluar los puntos $(-1,3)$ y $(0,2)$ que forman parte de una curva. Primero evaluamos el punto $(-1,3)$ y sustituimos en la curva "y" para determinar el valor de las constantes C y C_1,

$$3 = (-1)^2 - \frac{2}{3}(-1)^3 + C(-1) + C_1$$

$$3 - 1 - \frac{2}{3} = -C + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad -C + C_1 = \frac{4}{3} \qquad (1)$$

Ahora, evaluamos el punto $(0,2)$

$$3 = (0)^2 - \frac{2}{3}(0)^3 + C(0) + C_1$$

$$3 = C_1$$

Sustituyendo el valor de la constante C_1 en la ecuación (1), queda:

$$-C + 3 = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{5}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la curva queda definida como:

$$\boxed{y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 3}$$

20. Después de t años la población de cierta ciudad crece al ritmo de $500 + 600\sqrt{t}$ por año. La población actual es de 120,000 personas. Determine la población dentro de 4 años.

Solución:

Se sabe que el crecimiento poblacional con relación al tiempo se define como, $P'(t)$ y según el dato del problema es $500 + \sqrt{t}$. Como condición inicial se tiene que $P(0)$ es la población actual de 120,000 personas. Por lo tanto:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 500 + 600\sqrt{t}$$

$$P(t) = \int (500 + 600\sqrt{t})dt = 500\int dt + 600\int t^{1/2}\ dt$$

$$P(t) = 500t + 600 \cdot \frac{2}{3}t^{3/2} + C = 500t + 400t^{3/2} + C$$

Si $P(0) = 120000$, se obtiene el valor de la constante C,

$$120000 = C$$

En consecuencia, la expresión general que describe la población en función del tiempo, para distintos intervalos, es:

$P(t) = 500t + 400t^{3/2} + 120000$

Finalmente, la población dentro de 4 años es:

$P(4) = 500(4) + 400(4)^{3/2} + 120000$

$P(4) = 2000 + 3200 + 120000$

$\boxed{P(4) = 125200}$

Los teoremas 1.5 a 1.10 permiten evaluar las integrales indefinidas de funciones trigonométricas y las que dan como resultado funciones trigonométricas inversas. Estos teoremas son consecuencia directa de los teoremas de derivación.

Teorema 1.5:

$$\int \sin av\, dv = -\frac{1}{a}\cos av + C$$

Teorema 1.6:

$$\int \cos av\, dv = \frac{1}{a}\sin av + C$$

Teorema 1.7:

$$\int \sec^2 av\, dv = \frac{1}{a}\tan av + C$$

Teorema 1.8:

$$\int \csc^2 av\, dv = -\frac{1}{a}\cot av + C$$

Teorema 1.9:

$$\int \sec av \tan av\, dv = \frac{1}{a}\sec av + C$$

Teorema 1.10:

$$\int \csc av \cot av\, dv = -\frac{1}{a}\csc av + C$$

Teorema 1.11:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \sin^{-1}\frac{v}{a} + C$$

Teorema 1.12:

$$\int \frac{dv}{a^2+v^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{v}{a} + C$$

Teorema 1.13:

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{v}{a} + C$$

Para evaluar las integrales indefinidas a veces es necesario el uso de identidades trigonométricas, tales como,

$\csc x \sin x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\sec x \cos x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cot x \tan x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}; \quad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x\,; \quad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x\,; \quad \dfrac{1}{2}\sin x = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

En los siguientes ejercicios se utilizan los teoremas 1.5 a 1.10 de la integración indefinida de funciones trigonométricas.

21. $\int (3\sin t - 2\cos t)dt$

Solución:

$$\int (3\sin t - 2\cos t)dt = 3\int \sin t\, dt - 2\int \cos t\, dt \boxed{= -3\cos t - 2\sin t + C}$$

22. $\int (5\cos x - \sin x)dx$

Solución:

$$\int (5\cos x - \sin x)dx = 5\int \cos x\, dx - \int \sin x\, dx \boxed{= -5\sin x - \cos x + C}$$

23. $\int (4 \csc x \cot x + 2 \sec^2 x) dx$

Solución:

$$\int (4 \csc x \cot x + 2 \sec^2 x) dx = 4 \int \csc x \cot x \, dx + 2 \int \sec^2 x \, dx$$

$$\boxed{= -4 \csc x + 2 \tan x + C}$$

24. $\int (3 \csc^2 x - 5 \sec x \tan x) dx$

Solución:

$$\int (3 \csc^2 x - 5 \sec x \tan x) dx = 3 \int \csc^2 x \, dx - 5 \int \sec x \tan x \, dx$$

$$\boxed{= -3 \cot x - 5 \sec x + C}$$

25. $\int (2 \cot^2 \theta - 3 \tan^2 \theta) d\theta$

Solución:

De acuerdo con los teoremas 1.5 a 1.10 no tenemos integrales inmediatas de las funciones trigonométricas $\cot^2 \theta$ y $\tan^2 \theta$, para lo cual serán sustituidas con las siguientes identidades trigonométricas: $\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1$ y $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$. Por lo tanto,

$$\int (2 \cot^2 \theta - 3 \tan^2 \theta) d\theta = 2 \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta \, - 3 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= 2 \int \csc^2 \theta \, d\theta \, - 2 \int d\theta \, - 3 \int \sec^2 \theta \, d\theta + 3 \int d\theta$$

$$= -2 \cot \theta - 2\theta - 3 \tan \theta + 3\theta + C$$

$$\boxed{= -2 \cot \theta - 3 \tan \theta + \theta + C}$$

26. $\int \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$

Solución:

En este ejercicio observamos que no existe una forma inmediata de evaluar la integral, para lo cual utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

Por lo tanto,

$$\int \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\int \sin\theta\, d\theta \boxed{= -\frac{1}{2}\cos\theta + C}$$

27. $\int [12 + \csc\theta\,(\sin\theta + \csc\theta)]d\theta$

Solución:

$$\int [12 + \csc\theta\,(\sin\theta + \csc\theta)]d\theta = \int [12 + (\csc\theta\sin\theta + \csc^2\theta)]d\theta$$

De acuerdo con la identidad trigonométrica $\csc\theta\sin\theta = 1$, sustituimos y evaluamos,

$$\int [12 + \csc\theta\,(\sin\theta + \csc\theta)]d\theta = \int [12 + (1 + \csc^2\theta)]d\theta = \int (13 + \csc^2\theta)d\theta$$

$$= 13\int d\theta + \int \csc^2\theta\, d\theta \boxed{= 13\theta - \cot\theta + C}$$

28. $\int (2\cos t - \sec t\tan t)dt$

Solución:

$$\int (2\cos t - \sec t\tan t)dt = 2\int \cos t\, dt - \int \sec t\tan t\, dt$$

$$\boxed{= 2\sin t - \sec t + C}$$

29. $\int (\sec^2 u + 7\sec u\tan u)du$

Solución:

$$\int (\sec^2 u + 7\sec u\tan u)du = \int \sec^2 u\, du + 7\int \sec u\tan u\, du$$

$$\boxed{= \tan u + 7\sec u + C}$$

30. $\int (\csc^2 \omega - \sec^2 \omega) d\omega$

Solución:

$$\int (\csc^2 \omega - \sec^2 \omega) d\omega = \int \csc^2 \omega \, d\omega - \int \sec^2 \omega \, d\omega \boxed{= -\cot \omega - \tan \omega + C}$$

31. $\int (8 \cos x - 3 \csc x \cot x) dx$

Solución:

$$\int (8 \cos x - 3 \csc x \cot x) dx = 8 \int \cos x \, dx - 3 \int \csc x \cot x \, dx$$

$$\boxed{= 8 \sin x + 3 \csc x + C}$$

32. $\int \tan x (\cot x - \cos x) dx$

Solución:

$$\int \tan x (\cot x - \cos x) dx = \int \tan x \cot x \, dx - \int \tan x \cos x \, dx$$

Para la primera y segunda integral utilizamos las identidades trigonométricas, $\tan x \cot x = 1$ y $\tan x = \sin x / \cos x$, por lo tanto, sustituimos y evaluamos,

$$\int \tan x (\cot x - \cos x) dx = \int dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x \, dx = \int dx - \int \sin x \, dx$$

$$\boxed{= x + \cos x + C}$$

33. $\int \frac{\cos^3 v + \sin v}{\cos^2 v} dv$

Solución:

Aplicamos la división término por término y simplificamos según corresponda, en consecuencia,

$$\int \frac{\cos^3 v + \sin v}{\cos^2 v} dv = \int \left(\frac{\cos^3 v}{\cos^2 v} + \frac{\sin v}{\cos^2 v} \right) dv = \int \left(\cos v + \frac{\sin v}{\cos v} \cdot \frac{1}{\cos v} \right) dv$$

Pero, recordemos que $\tan v = \sin v / \cos v$ y $\sec v = 1/\cos v$, por lo tanto, sustituimos y evaluamos,

$$\int \frac{\cos^3 v + \sin v}{\cos^2 v} dv = \int (\cos v + \tan v \sec v) dv = \int \cos v \, dv + \int \tan v \sec v \, dv$$

$$\boxed{= \sin v + \sec v + C}$$

34. $\int \frac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$

Solución:

Nuevamente, dividimos término a término y simplificamos,

$$\int \frac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta = \int \left(\frac{3 \tan \theta}{\cos \theta} - \frac{4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta$$

$$= 3 \int \tan \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} d\theta - 4 \int \cos \theta \, d\theta$$

Pero, $\sec \theta = 1/\cos \theta$, por lo tanto, sustituimos y evaluamos,

$$\int \frac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta = 3 \int \tan \theta \sec \theta \, d\theta - 4 \sin \theta + C$$

$$\boxed{= 3 \sec \theta - 4 \sin \theta + C}$$

En los siguientes ejercicios de integración se emplean los teoremas 1.11 a 1.13 que dan como resultados funciones trigonométricas inversas.

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

Solución:

Utilizando el teorema 1.11, deducimos que $a = 2$ y $v = x$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \boxed{= \sin^{-1} \frac{x}{2} + C}$$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$

Solución:

Utilizamos el teorema 1.11, para lo cual $a = \sqrt{5}$ y $v = x$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \boxed{\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + C}$$

37. $\int \frac{dx}{x^2 + 25}$

Solución:

Se utiliza el teorema 1.12, donde $a = 5$ y $v = x$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 25} \boxed{= \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{x}{5} + C}$$

38. $\int \frac{dx}{x^2 + 11}$

Solución:

Utilizamos el teorema 1.12, donde $a = \sqrt{11}$ y $v = x$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 11} \boxed{= \frac{1}{\sqrt{11}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{11}} + C}$$

39. $\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2 - 16}}$

Solución:

Utilizamos el teorema 1.13, donde $a = 4$ y $v = x$

$$\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \sec^{-1} \frac{x}{4} + C \boxed{= \frac{1}{16} \sec^{-1} \frac{x}{4} + C}$$

40. $\int \frac{dx}{5x\sqrt{x^2 - 21}}$

Solución:

Se utiliza el teorema 1.13, donde $a = \sqrt{21}$ y $v = x$

$$\int \frac{dx}{5x\sqrt{x^2-21}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-21}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}\sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{21}} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{5\sqrt{21}}\sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{21}} + C}$$

41. $\int \frac{\sqrt{7}dx}{x\sqrt{x^2-7}}$

Solución:

Se utiliza el teorema 1.13, donde $a = \sqrt{7}$ y $v = x$

$$\int \frac{\sqrt{7}dx}{x\sqrt{x^2-7}} = \sqrt{7}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-7}} = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{7}} + C \boxed{= \sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{7}} + C}$$

42. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1+x^2}dx$

Solución:

Se utiliza la división larga o sintética que consiste en dividir una función polinómica por un binomio.

$\mathbf{2x^3 - x^2 + 2x + 4}$	$\mathbf{x^2 + 1}$
$\mathbf{-2x^3 \qquad - 2x}$	$2x - 1$
$\mathbf{-x^2 \quad // \quad +4}$	
$\mathbf{x^2 \qquad +1}$	
$\mathbf{// \qquad 5}$	

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1+x^2}dx = \int \left(2x - 1 + \frac{5}{1+x^2}\right)dx$$

$$= 2\int xdx - \int dx + 5\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + 5\tan^{-1}x + C \boxed{= x^2 - x + 5\tan^{-1}x + C}$$

43. $\int \frac{x^6}{1+x^2}dx$

Solución:

Se utiliza la división sintética según lo desarrollado en el ejercicio 42.

$\boldsymbol{x^6}$	$\boldsymbol{x^2+1}$
$\boldsymbol{-x^6-x^4}$	x^4-x^2+1
$//\quad \boldsymbol{x^4+x^2}$	
$//\quad \boldsymbol{x^2}$	
$\boldsymbol{-x^2-1}$	
$//\ \boldsymbol{-1}$	

$$\int \frac{x^6}{1+x^2}dx = \int \left(x^4-x^2+1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int x^4dx - \int x^2dx + \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x - \tan^{-1}x + C}$$

1.2. Integrales indefinidas por el método de sustitución o cambio de variable.

La integración por sustitución (conocida como sustitución en u) es una técnica para resolver algunas funciones compuestas. El método se basa en cambiar la variable de la integración para obtener una integral indefinida simple. El siguiente teorema muestra cómo funciona la técnica de sustitución o cambio de variable.

Teorema 1.14:

Sea g una función diferenciable en un intervalo I donde la derivada es continua. Sea f continua en el intervalo J que contiene el rango de la función g. Si F es una antiderivada de la función F en J, entonces:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C,\ \ x \in I$$

Pasos de la integración por sustitución:

Paso 1: elegir una nueva variable u.

Paso 2: determinar el valor de du.

Paso 3: efectuar la sustitución, es decir, eliminar todas las apariciones de x (o de cualquiera otra variable) en la integral, de modo que ésta quede expresada únicamente en términos de u.

Paso 4: evaluar la nueva integral.

Paso 5: devolver la evaluación a la variable inicial x (o cualquier otra variable inicial).

En los siguientes ejercicios se evalúan las integrales indefinidas mediante los pasos del método básico de cambio de variable.

1. $\int v(v^2+2)^2 dv$

Solución:

Método 1: utilizamos los pasos de integración del cambio de variable.

$$u = v^2 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2vdv \qquad \Rightarrow \qquad vdv = \frac{1}{2}du$$

$$\int v(v^2+2)^2 dv = \int (v^2+2)^2 vdv = \int u^2\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}(v^2+2)^3 + C}$$

Método 2: desarrollo algebraico

$$\int v(v^2+2)^2 dv = \int v(v^4 + 2(v^2)(2) + 4)dv = \int (v^5 + 4v^3 + 4v)dv$$

$$= \int v^5 dv + 4\int v^3 dv + 4\int vdv$$

$$= \frac{1}{6}v^6 + 4\cdot\frac{1}{4}v^4 + 4\cdot\frac{1}{2}v^2 + C \boxed{= \frac{1}{6}v^6 + v^4 + 2v^2 + C}$$

En este ejercicio, aunque resulta fácil evaluar la expresión $(v^2+2)^2$, se recomienda aplicar el método del cambio de variable.

2. $\int (x+1)^4 dx$

Solución:

Aplicamos los pasos de integración del cambio de variable.

$$u = x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$\int (x+1)^4 dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C \boxed{= \frac{1}{5}(x+1)^4 + C}$$

3. $\int (t+1)^{10} dt$

Solución:

Para la solución de este ejercicio utilizamos los pasos del cambio de variable.

$u = t + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = dt$

$$\int (t+1)^{10} dt = \int u^{10} du = \frac{1}{11} u^{11} + C \boxed{= \frac{1}{11}(t+1)^{11} + C}$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-10)^7}$

Solución:

Se emplea el método de sustitución de variable para realizar la integración.

$u = x - 10 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$\int \frac{dx}{(x-10)^7} = \int \frac{du}{u^7} = \int u^{-7} du = \frac{1}{-6} u^{-6} + C = -\frac{1}{6u^6} + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{6(x-10)^6} + C}$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{2x-5}dx$

Solución:

Se utiliza los pasos de integración del cambio de variable.

$u = 2x - 5 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2} du$

$$\int \sqrt{2x-5}dx = \int (u)^{1/2} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + C}$$

6. $\displaystyle\int (9t+11)^5 dt$

Solución:

Se aplican los procedimientos de integración por sustitución de variable.

$$u = 9t + 11 \quad \Rightarrow \quad du = 9dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{9}du$$

$$\int (9t+11)^5 dt = \int u^5 \left(\frac{1}{9}du\right) = \frac{1}{9}\int u^5 du = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{54}(9t+11)^6 + C}$$

7. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

Solución:

Se aplica el método de integración del cambio de variable.

$$u = 1 + \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{t^2}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t^2}dt = -du$$

$$\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{t^2}\right) dt = \int (u)^3(-du) = -\int u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 + C}$$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

Se lleva a cabo la integración utilizando el cambio de variable.

$$u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \cos u\,(2du) = 2\int \cos u\, du = 2\sin u + C$$

$$\boxed{= 2\sin\sqrt{x} + C}$$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\theta^2}\cos\left(\frac{1}{\theta}\right) d\theta$

Solución:

Se realiza la integración siguiendo los pasos del cambio de variable.

$$u = \frac{1}{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad du = -\frac{1}{\theta^2}d\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\theta^2}d\theta = -du$$

$$\int \frac{1}{\theta^2}\cos\left(\frac{1}{\theta}\right)d\theta = \int \cos\left(\frac{u}{u}\right)(-du) = -\int \cos u\, du = -\sin u + C$$

$$\boxed{= -\sin\left(\frac{1}{t}\right) + C}$$

10. $\int \sin 2x \cos 2x\, dx$

Solución:

Se emplea el método de sustitución de variable para realizar la integración.

$$u = \sin 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = 2\cos 2x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}du$$

$$\int \sin 2x \cos 2x\, dx = \int u\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int udu = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2 + C \boxed{= \frac{1}{4}\sin^2 2x + C}$$

11. $\int x \sin x^2\, dx$

Solución:

Se aplican los pasos del cambio de variable para realizar la integración.

$$u = x^2dx \qquad \Rightarrow \qquad du = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}du$$

$$\int x\sin x^2\, dx = \int \sin u\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}\cos x^2 + C}$$

12. $\int \sqrt[3]{\tan x}\sec^2 x\, dx$

Solución:

Se utiliza los pasos de integración de cambio de variable.

$$u = \tan x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

$$\int \sqrt[3]{\tan x} \sec^2 x \, dx = \int \sqrt[3]{u} du = \int u^{1/3} du = \frac{3}{4} u^{4/3} + C$$

$$\boxed{= \frac{3}{4} (\tan x)^{4/3} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\tan^4 x} + C}$$

13. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x} dx$

Solución:

Se siguen los pasos de integración de cambio de variable.

$u = \cot x \, dx \qquad \Rightarrow \qquad du = -\csc^2 x \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \csc^2 x \, dx = -du$

$$\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x} dx = \int \frac{-du}{(u)^3} = -\int u^{-3} du = -\frac{1}{-2} u^{-2} + C = \frac{1}{2u^2} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2 \cot^2 x} + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C}$$

14. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

Solución:

Se utiliza los pasos de integración de cambio de variable.

$u = \cos x \, dx \qquad \Rightarrow \qquad du = -\sin x \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \sin x \, dx = -du$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{-du}{(u)^3} = -\int u^{-3} du = -\frac{1}{-2} u^{-2} + C = \frac{1}{2u^2} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2 \cos^2 x} + C = \frac{1}{2} \sec^2 x + C}$$

15. $\int x\sqrt{x+6} dx$

Solución:

Presentamos dos métodos de cambio de variable que conllevan a la misma solución.

Método 1: se utiliza los pasos de integración de cambio de variable considerando solamente el radicando.

$u = x + 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = u - 6 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$\int x\sqrt{x+6}dx = \int (u-6)u^{1/2}du = \int uu^{1/2}du - 6\int u^{1/2}du$$

$$= \int u^{3/2}du - 6\int u^{1/2}du = \frac{2}{5}u^{5/2} - 6\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{2}{5}(x+6)^{5/2} - 4(x+6)^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+6}\right)^5 - 4\left(\sqrt{x+6}\right)^3 + C \end{aligned}}$$

Método 2: se utiliza los pasos de integración de cambio de variable considerando la raíz cuadrada.

$$u = \sqrt{x+6} \quad \Rightarrow \quad u^2 = x+6 \quad \Rightarrow \quad x = u^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad dx = 2udu$$

$$\int x\sqrt{x+6}dx = \int (u^2-6)u(2udu) = 2\int u^2(u^2-6)du = 2\int (u^4 - 6u^2)du$$

$$= 2\int u^4du - 12\int u^2du = 2\cdot\frac{1}{5}u^5 - 12\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\boxed{= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+6}\right)^5 - 4\left(\sqrt{x+6}\right)^3 + C}$$

16. $\int x\sqrt{3x-4}dx$

Solución:

Método 1: se utiliza los pasos de integración de cambio de variable considerando solamente el radicando.

$$u = 3x - 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}(u+4) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int x\sqrt{3x-4}dx = \int \frac{1}{3}(u+4)u^{1/2}\frac{1}{3}du = \frac{1}{9}\int (uu^{1/2} + 4u^{1/2})du$$

$$= \frac{1}{9}\int u^{3/2}du + \frac{4}{9}\int u^{1/2}du = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{2}{45}(3x-4)^{5/2} + \frac{8}{27}(3x-4)^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{45}\left(\sqrt{3x-4}\right)^5 + \frac{8}{27}\left(\sqrt{3x-4}\right)^3 + C \end{aligned}}$$

Método 2: se utiliza los pasos de integración de cambio de variable considerando solamente la raíz.

$$u=\sqrt{3x-4} \quad \Rightarrow \quad u^2=3x-4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{3}(u^2+4) \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{2}{3}udu$$

$$\int x\sqrt{3x-4}dx=\int\frac{1}{3}(u^2+4)u\left(\frac{2}{3}udu\right)=\frac{2}{9}\int u^2(u^2+4)du$$

$$=\frac{2}{9}\int(u^4+4u^2)du=\frac{2}{9}\int u^4du+\frac{8}{9}\int u^2du$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{5}u^5+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{3}u^3+C$$

$$\boxed{=\frac{2}{45}\left(\sqrt{3x-4}\right)^5+\frac{8}{27}\left(\sqrt{3x-4}\right)^3+C}$$

17. $\int x^2\sqrt{1-x}dx$

Solución:

Método 1: se utiliza los pasos de integración de cambio de variable considerando solamente el radicando.

$$u=1-x \quad \Rightarrow \quad x=1-u \quad \Rightarrow \quad dx=-du$$

$$\int x^2\sqrt{1-x}dx=\int(1-u)^2u^{1/2}(-du)=-\int(1-2u+u^2)u^{1/2}du$$

$$=-\int u^{1/2}du+2\int u\cdot u^{1/2}du-\int u^2\cdot u^{1/2}du$$

$$=-\int u^{1/2}du+2\int u^{3/2}du-\int u^{5/2}du$$

$$=-\frac{2}{3}u^{3/2}+2\cdot\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{2}{7}u^{7/2}+C$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+\frac{4}{5}(1-x)^{5/2}-\frac{2}{7}(1-x)^{7/2}+C\\&=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\sqrt{1-x}\right)^5-\frac{2}{7}\left(\sqrt{1-x}\right)^7+C\end{aligned}}$$

Método 2: se utiliza los pasos de integración de cambio de variable considerando solamente la raíz.

$$u=\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad u^2=1-x \quad \Rightarrow \quad x=1-u^2 \quad \Rightarrow \quad dx=-2udu$$

$$\int x^2\sqrt{1-x}dx = \int (1-u^2)^2 u(-2udu) = -2\int u^2(1-u^2)^2 du$$

$$= -2\int u^2(1-2u^2+u^4)du = -2\int (u^2-2u^4+u^6)du$$

$$= -2\int u^2 du + 4\int u^4 du - 2\int u^6 du$$

$$= -2\cdot\frac{1}{3}u^3 + 4\cdot\frac{1}{5}u^5 - 2\cdot\frac{1}{7}u^7 + C$$

$$\boxed{= -\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(\sqrt{1-x}\right)^5 - \frac{2}{7}\left(\sqrt{1-x}\right)^7 + C}$$

18. $\int (x+1)\sqrt{2-x}dx$

Solución:

Método 1: aplicamos cambio de variable considerando solamente el radicando.

$u = 2-x \quad \Rightarrow \quad x = 2-u \quad \Rightarrow \quad dx = -du$

$$\int (x+1)\sqrt{2-x}dx = \int (2-u+1)u^{1/2}(-du) = -\int (3-u)u^{1/2}du$$

$$= -\int 3u^{1/2}du + \int u\cdot u^{1/2}du = -3\int u^{1/2}du + \int u^{3/2}du$$

$$= -3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= -2(2-x)^{3/2} + \frac{2}{5}(2-x)^{5/2} + C \\ &= -2\left(\sqrt{2-x}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{2-x}\right)^5 + C \end{aligned}}$$

Método 2: aplicamos cambio de variable considerando solamente la raíz.

$u = \sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad u^2 = 2-x \quad \Rightarrow \quad x = 2-u^2 \quad \Rightarrow \quad dx = -2udu$

$$\int (x+1)\sqrt{2-x}dx = \int (2-u^2+1)u(-2udu) = -2\int u^2(3-u^2)du$$

$$= -2\int (3u^2-u^4)du = -6\int u^2 du + 2\int u^4 du$$

$$= -6\cdot\frac{u^3}{3} + 2\cdot\frac{u^5}{5} + C \boxed{= -2\left(\sqrt{2-x}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{2-x}\right)^5 + C}$$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

Solución:

Se utiliza los pasos de integración del cambio de variable.

$$u=\sqrt{2x-1} \quad \Rightarrow \quad u^2=2x-1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}(u^2+1) \quad \Rightarrow \quad dx=udu$$

$$\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx=\int \frac{[1/2(u^2+1)]^2-1}{u}udu=\int \left[\frac{1}{4}(u^2+1)^2-1\right]du$$

$$=\int \left[\frac{1}{4}(u^4+2u^2+1)-1\right]du=\int \left(\frac{u^4+2u^2+1-4}{4}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}\int u^4du+\frac{1}{2}\int u^2du-\frac{3}{4}\int du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{3}{4}u+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{20}\left(\sqrt{2x-1}\right)^5+\frac{1}{6}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3-\frac{3}{4}\sqrt{2x-1}+C}$$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

Solución:

Aplicamos los pasos del cambio de variable y teorema 1.11 (donde $a=1$ y $v=u$).

$$u=2x \quad \Rightarrow \quad du=2dx \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}u+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\sin^{-1}2x+C}$$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

Solución:

Aplicamos los pasos del cambio de variable y teorema 1.11 (donde $a=3$ y $v=u$).

$$u=4x \quad \Rightarrow \quad du=4dx \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(4x)^2}} = \int \frac{1/4du}{\sqrt{3^2-u^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}} = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{u}{3} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + C}$$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+25x^2}$

Solución:

Aplicamos los pasos del cambio de variable y teorema 1.11 (donde $a = 1$ y $v = u$).

$$u = 5x \qquad \Rightarrow \qquad du = 5dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{5}du$$

$$\int \frac{dx}{1+25x^2} = \int \frac{dx}{1^2+(5x)^2} = \int \frac{1/5du}{1^2+u^2} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{1^2+u^2} = \frac{1}{5}\tan^{-1}u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}\tan^{-1}5x + C}$$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+9x^2}$

Solución:

Aplicamos cambio de variable y usamos el teorema 1.11 (donde $a = \sqrt{2}$ y $v = u$).

$$u = 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = 3dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int \frac{dx}{2+9x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2+(3x)^2} = \int \frac{1/3du}{\left(\sqrt{2}\right)^2+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(\sqrt{2}\right)^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}} + C \boxed{= \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{3x}{\sqrt{2}} + C}$$

24. $\displaystyle\int \frac{e^x}{5+e^{2x}}dx$

Solución:

Aplicamos cambio de variable y utilizamos el teorema 1.11 (donde $a = \sqrt{5}$ y $v = u$).

$u = e^x \qquad \Rightarrow \qquad du = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{5+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2 + (e^x)^2} = \int \frac{du}{\left(\sqrt{5}\right)^2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{5}} + C}$$

25. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución:

Dividimos término a término, quedándonos dos integrales. La primera integral aplicamos cambio de variable y la segunda integral usamos el teorema 1.11 (donde $a = 1$ y $v = x$).

$u = 1 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad du = -2dx \qquad \Rightarrow \qquad 2dx = -du$

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{1^2-x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{u}} - 3\sin^{-1}x + C$$

$$= -\int u^{-\frac{1}{2}}du - 3\sin^{-1}x + C = -\frac{1}{1/2}u^{1/2} - 3\sin^{-1}x + C$$

$$\boxed{= -2\sqrt{1-x^2} - 3\sin^{-1}x + C}$$

26. $\int \frac{x-8}{x^2+2}dx$

Solución:

Dividimos término a término, quedándonos dos integrales. La primera integral aplicamos cambio de variable y la segunda integral se emplea el teorema 1.12 (donde $a = \sqrt{2}$ y $v = x$).

$u = x^2 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{x-8}{x^2+2}dx = \int \frac{xdx}{x^2+2} - 8\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} - 8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{v}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln u - 4\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$\int \frac{x-8}{x^2+2}dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - 4\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C}$$

27. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$

Solución:

Utilizamos la técnica de sustitución de variable.

$$u = \tan^{-1}x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx = \int \tan^{-1}x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C \boxed{= \frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2 + C}$$

28. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sin^{-1}x}{1-x^2}}dx$

Solución:

Aplicamos el método del cambio de variable.

$$u = \sin^{-1}x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \sqrt{\frac{\sin^{-1}x}{1-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (\sin^{-1}x)^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C \boxed{= \frac{2}{3}(\sin^{-1}x)^{3/2} + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\sin^{-1}x}\right)^3 + C}$$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$

Solución:

Completamos cuadrados a la expresión del denominador $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right]$. Después, utilizamos cambio de variable y el teorema 1.12.

$$u = x - \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{dx}{\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + C \boxed{= \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + C}$$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$

Solución:

Primero completamos cuadrados a la expresión del denominador $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\right]$. Después, aplicamos cambio de variable y utilizamos el teorema 1.12.

$$u = x - \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 3x + 2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 2 - \frac{9}{4}\right]}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (u)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{\frac{1}{2}}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\frac{2x-3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C \boxed{= \sin^{-1}(2x - 3) + C}$$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$

Solución:

Completamos cuadrados a la expresión del denominador $\left[\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = 1\right]$. Después, se utiliza los pasos de integración de cambio de variable y aplicar el teorema 1.12.

$u = x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2x - 15)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x^2 - 2x + 1) - 15 - 1]}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-1)^2 - 16]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x-1)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{(4)^2 - (u)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{4}\right) + C \boxed{= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{4}\right) + C}$$

32. $\displaystyle\int \frac{2dx}{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$

Solución:

Completamos cuadrados a la expresión del denominador $\left[\left(-\frac{6}{2}\right)^2 = 9\right]$. Después, se utiliza los pasos de integración de cambio de variable y aplicar el teorema 1.12.

$u = x - 3 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$\int \frac{2dx}{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = 2\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 5 - 9}}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x-3)^2 - 2^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 2^2}} = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C}$$

1.3. Integrales indefinidas de funciones logarítmica natural y exponencial.

A continuación, se presentan los teoremas de las integrales indefinidas de funciones exponenciales y logarítmicas naturales.

Teorema 1.14:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln v + C$$

Teorema 1.15:

$$a. \int e^v dv = e^v + C$$

$$b. \int e^{\pm av} dv = \pm \frac{1}{a} e^{\pm av} + C$$

Teorema 1.16:

$$a. \int b^v dv = \frac{b^v}{\ln b} + C$$

$$b. \int b^{\pm av} dv = \pm \frac{1}{a} \frac{b^{\pm av}}{\ln b} + C$$

En los siguientes ejercicios se utilizan los teoremas 1.14 a 1.16 de la integración indefinida de funciones exponenciales y logarítmicas, así como también se pueden encontrar integrales de los teoremas 1.1 a 1.13.

1. $\int \frac{dx}{7x}$

Solución:

Toda constante fuera de la integral, y utilizamos el teorema 1.14, en consecuencia,

$$\int \frac{dx}{7x} = \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x} \boxed{= \frac{1}{7} \ln|x| + C}$$

2. $\int 7e^{x/7}\, dx$

Solución:

Llevamos la constante fuera de la integral, y utilizamos el teorema 1.15 (b),

$$\int 7e^{x/7}\, dx = 7 \cdot \frac{1}{1/7} e^{x/7} + C \boxed{= 49e^{x/7} + C}$$

3. $\int (e^{2x} + e^{-2x}) dx$

Solución:

Esta integral indefinida es una expresión de 2 términos, es decir, que para cada termino una integral e inmediatamente aplicamos el teorema 1.15 (b).

$$\int (e^{2x} + e^{-2x})dx = \int e^{2x}dx + \int e^{-2x}dx \boxed{= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C}$$

4. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

Solución:

Primero trabajamos el binomio que produce un trinomio cuadrado perfecto. Después, tenemos tres integrales indefinidas e inmediatamente aplicamos los teoremas 1.15 (b) y 1.2, respectivamente. Por lo tanto,

$$\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x})dx$$

$$= \int e^{2x}dx + 2\int dx + \int e^{-2x}dx \boxed{= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C}$$

5. $\int \frac{\sqrt{y} - y}{y^2} dy$

Solución:

Dividimos término a término, y aplicamos los teoremas 1.4 y 1.14. Por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{y} - y}{y^2} dy = \int \left(\frac{y^{1/2}}{y^2} - \frac{y}{y^2}\right) dy = \int y^{-3/2} dy - \int \frac{dy}{y}$$

$$\boxed{= -2y^{-1/2} - \ln y + C = -\frac{2}{\sqrt{y}} - \ln y + C}$$

6. $\int \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx$

Solución:

La integral se descompone en dos integrales que son resueltas de manera inmediata aplicando los teoremas 1.4 y 1.14.

$$\int \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\int x dx - 2\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 - 2\ln x + C \boxed{= \frac{1}{4}x^2 - 2\ln x + C}$$

7. $\int \frac{dx}{x-5}$

Solución:

Esta integral no puede evaluarse de manera inmediata ni por la división larga, en consecuencia, aplicamos el método del cambio de variable.

$$u = x - 5 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C \boxed{= \ln(x-5) + C}$$

8. $\int \frac{dx}{2x+5}$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = 2x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{dx}{2x+5} = \int \frac{1/2du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + C \boxed{= \frac{1}{2}\ln(2x+5) + C}$$

9. $\int \frac{9dx}{5-4x}$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = 5 - 4x \qquad \Rightarrow \qquad du = -4dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = -\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{9dx}{5-4x} = 9\int \frac{-1/4du}{u} = -\frac{9}{4}\int \frac{du}{u} = -\frac{9}{4}\ln u + C \boxed{= -\frac{9}{4}\ln(5-4x) + C}$$

10. $\int \frac{x^2}{5-x^3}dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = 5 - x^3 \qquad \Rightarrow \qquad du = -3x^2 dx \qquad \Rightarrow \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du$$

$$\int \frac{x^2}{5 - x^3} dx = \int \frac{-1/3 du}{u} = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3} \ln u + C \boxed{= -\frac{1}{3} \ln(5 - x^3) + C}$$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = x^3 - 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad du = (3x^2 - 6x) dx \qquad \Rightarrow \qquad (x^2 - 2x) dx = \frac{1}{3} du$$

$$\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx = \int \frac{1/3 du}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln u + C \boxed{= \frac{1}{3} \ln(x^3 - 3x^2) + C}$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 6x^2 + 5} dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = x^3 + 6x^2 + 5 \qquad \Rightarrow \qquad du = (3x^2 + 12x) dx \qquad \Rightarrow \qquad (x^2 + 4x) dx = \frac{1}{3} du$$

$$\int \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 6x^2 + 5} dx = \int \frac{1/3 du}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln u + C \boxed{= \frac{1}{3} \ln(x^3 + 6x^2 + 5) + C}$$

13. $\displaystyle\int e^{1-3x} dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.15a,

$$u = 1 - 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = -3dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = -\frac{1}{3} du$$

$$\int e^{1-3x} dx = \int e^u \left(-\frac{1}{3} du\right) = -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u + C \boxed{= -\frac{1}{3} e^{1-3x} + C}$$

14. $\int e^x(e^x+1)^2dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.4,

$$u = e^x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = e^x dx$$

$$\int e^x(e^x+1)^2dx = \int (u)^2du = \frac{1}{3}u^3 + C \boxed{= \frac{1}{3}(e^x+1)^3 + C}$$

15. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.15a,

$$u = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2du$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^u(2du) = 2\int e^u du = 2e^u + C \boxed{= 2e^{\sqrt{x}} + C}$$

16. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = 1 + e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad du = -e^{-x}dx \qquad \Rightarrow \qquad e^{-x}dx = -du$$

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C \boxed{= -\ln(1+e^{-x}) + C}$$

17. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.14,

$$u = e^x - e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad du = (e^x + e^{-x})dx$$

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C \boxed{= \ln(e^x - e^{-x}) + C}$$

18. $\displaystyle\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el cambio de variable y utilizamos el teorema 1.4,

$$u = e^x + e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad du = (e^x - e^{-x})dx$$

$$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx = 2\int \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} dx = 2\int \frac{du}{u^2} = 2\int u^{-2}du = -2u^{-1} + C$$

$$= -\frac{2}{u} + C \boxed{= -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + C}$$

19. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2} dx$

Solución:

Primero aplicamos la división larga, y después evaluamos la integral.

$\mathbf{2x^2 + 7x - 3}$	x-2
$\mathbf{-2x^2 + 4x}$	2x+11
$//\quad \mathbf{11x - 3}$	
$\mathbf{-11x + 22}$	
$//\quad \mathbf{19}$	

$$\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2} dx = \int \left(2x + 11 + \frac{19}{x - 2}\right) dx$$

$$= 2\int xdx + 11\int dx + 19\int \frac{dx}{x - 2}$$

Evaluamos las dos primeras integrales de manera inmediata con los teoremas 1.4 y 1.2. La última integral aplicamos el método del cambio de variable,

$u = x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 11x + 19 \int \frac{du}{u} = x^2 + 11x + 19 \ln u + C$$

$$\boxed{= x^2 + 11x + 19 \ln(x - 2) + C}$$

20. $\int \frac{x^3 - 6x - 20}{x + 5} dx$

Solución:

Primero aplicamos la división larga, y después evaluamos la integral.

$\boldsymbol{x^3 - 6x - 20}$	$\boldsymbol{x + 5}$
$\boldsymbol{-x^3 - 5x^2}$	$x^2 - 5x + 19$
$//\quad \boldsymbol{-5x^2 - 6x}$	
$\boldsymbol{5x^2 + 25x}$	
$//\quad \boldsymbol{19x - 20}$	
$\boldsymbol{-19x - 95}$	
$//\ \boldsymbol{-115}$	

$$\int \frac{x^3 - 6x - 20}{x + 5} dx = \int \left(x^2 - 5x + 19 - \frac{115}{x + 5} \right) dx$$

$$= \int x^2 dx - 5 \int x dx + 19 \int dx - 115 \int \frac{dx}{x + 5}$$

Evaluamos las tres primeras integrales de manera inmediata con los teoremas 1.4 y 1.2. La última integral aplicamos el método del cambio de variable,

$u = x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$\int \frac{x^3 - 6x - 20}{x + 5} dx = \frac{1}{3} x^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 19x - 115 \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 19x - 115 \ln u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 19x - 115 \ln(x + 5) + C}$$

21. $\int \frac{x^3-4x^2-4x+20}{x^2-5}dx$

Solución:

Primero aplicamos la división larga, y después evaluamos la integral.

$\boldsymbol{x^3-4x^2-4x+20}$	$\boldsymbol{x^2-5}$
$\boldsymbol{-x^3 \qquad +5x}$	$x-4$
$\boldsymbol{// \; -4x^2 + \; x \; +20}$	
$\boldsymbol{4x^2 \qquad -20}$	
$\boldsymbol{// \quad x \quad //}$	

$$\int \frac{x^3-6x-20}{x+5}dx = \int \left(x-4+\frac{x}{x^2-5}\right)dx = \int xdx - 4\int dx + \int \frac{xdx}{x^2-5}$$

Evaluamos las dos primeras integrales de manera inmediata con los teoremas 1.4 y 1.2. La última integral aplicamos el método del cambio de variable,

$$u = x^2-5 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{x^3-6x-20}{x+5}dx = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + C = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{2}\ln u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{2}\ln(x^2-5) + C}$$

22. $\int \frac{\ln^2 3x}{x}dx$

Solución:

Utilizamos el método de integración del cambio de variable.

$$u = \ln 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{1}{3x}(3)dx = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\ln^2 3x}{x}dx = \int (\ln 3x)^2 \frac{dx}{x} = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C \boxed{= \frac{1}{3}(\ln 3x)^3 + C}$$

23. $\displaystyle\int \frac{2+\ln^2 x}{x(1-\ln x)}dx$

Solución:

Evaluamos la integral indefinida mediante el método del cambio de variable, por lo tanto,

$$u = 1-\ln x \qquad \Rightarrow \qquad \ln x = 1-u \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = -du$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2+\ln^2 x}{x(1-\ln x)}dx &= \int \frac{2+(\ln x)^2}{(1-\ln x)}\frac{dx}{x} = -\int \frac{2+(1-u)^2}{u}du \\
&= -\int \frac{2+1-2u+u^2}{u}du = -\int \frac{3-2u+u^2}{u}du \\
&= -3\int \frac{du}{u} + 2\int \frac{u}{u}du - \int \frac{u^2}{u}du \\
&= -3\int \frac{du}{u} + 2\int du - \int udu
\end{aligned}$$

Para evaluar cada integral utilizamos los teoremas 1.14, 1.1 y 1.4, respectivamente, y sustituimos el cambio de variable de u, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2+\ln^2 x}{x(1-\ln x)}dx &= -3\ln u + 2u - \frac{1}{2}u^2 + C \\
&= -3\ln|1-\ln x| + 2(1-\ln|x|) - \frac{1}{2}(1-\ln|x|)^2 + C \\
&= -3\ln|1-\ln x| + 2 - 2\ln|x| \ - \frac{1}{2}(1-2\ln|x| + \ln^2|x|) + C \\
&= -3\ln|1-\ln x| + 2 - 2\ln|x| - \frac{1}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2|x| + C \\
&= -3\ln|1-\ln x| - \ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2|x| + \frac{3}{2} + C \\
&\boxed{= -3\ln|1-\ln x| - \ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_1}
\end{aligned}$$

24. $\displaystyle\int \frac{2\ln x + 1}{x[(\ln x)^2 + \ln x]}dx$

Solución:

Evaluamos la integral utilizando el método del cambio de variable, por lo tanto,

$$u = (\ln x)^2 + \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$du = \left(\frac{2\ln x + 1}{x}\right) dx$$

$$\int \frac{2\ln x + 1}{x[(\ln x)^2 + \ln x]} dx = \int \frac{1}{[(\ln x)^2 + \ln x]} \frac{2\ln x + 1}{x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C$$

$$\boxed{= \ln[(\ln x)^2 + \ln x] + C}$$

25. $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + 1} dx$

Solución:

Primero aplicamos la división larga, y después evaluamos la integral.

$\boldsymbol{x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}$	$\boldsymbol{x^3 + 1}$
$\boldsymbol{-x^5 \qquad -x^2}$	$x^2 - 2$
$//\quad \boldsymbol{-2x^3 + 4x^2 - 2}$	
$\boldsymbol{2x^3 \qquad +2}$	
$// \quad \boldsymbol{4x^2} \quad //$	

$$\int \frac{x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + 1} dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{4x^2}{x^3 + 1}\right) dx$$

$$= \int x^2 dx - 2\int dx + 4\int \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

Para evaluar las dos primeras integrales utilizamos los teoremas 1.4 y 1.1, respectivamente, y en la última integral aplicamos el método de integración por cambio de variable, por lo tanto,

$$u = x^3 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = 3x^2 dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3} du = x^2 dx$$

$$\int \frac{x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4\int \frac{\frac{1}{3}du}{u} = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{4}{3}\ln u + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{4}{3}\ln(x^3 + 1) + C}$$

26. $\int a^t e^t dt$

Solución:

Se utiliza el teorema de integración 1.16.

$$\int a^t e^t dt = \int (ae)^t dt = \frac{(ae)^t}{\ln(ae)} + C$$

En el denominador aplicamos propiedad de logaritmo natural de un producto, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, en consecuencia,

$$\int a^t e^t dt = \frac{(ae)^t}{\ln a + \ln e} + C \boxed{= \frac{(ae)^t}{\ln a + 1} + C}$$

27. $\int 5^{x^4+2x}(2x^3+1)dx$

Solución:

Primero realizamos el cambio de variable, y después evaluamos la integral utilizando el teorema 1.16 (a).

$$u = x^4 + 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = (4x^3+2)dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}du = (2x^3+1)dx$$

$$\int 5^{x^4+2x}(2x^3+1)dx = \int 5^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int 5^u du = \frac{1}{2}\frac{5^u}{\ln 5} + C \boxed{= \frac{5^{x^4+2x}}{2\ln 5} + C}$$

28. $\int 2^{\sin x}\cos x\, dx$

Solución:

Realizamos un cambio de variable, y después utilizamos el teorema 1.16a.

$$v = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$\int 2^{\sin x}\cos x\, dx = \int 2^v dv = \frac{2^u}{\ln 2} + C \boxed{= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C}$$

29. $\int e^y 2^{e^y} 3^{e^y} dy$

Solución:

Aplicamos el método del cambio de variable y después empleamos el teorema 1.16.

$u = e^y \qquad \Rightarrow \qquad du = e^y dy$

$$\int e^y 2^{e^y} 3^{e^y} dy = \int e^y (2\cdot 3)^{e^y} dy = \int 6^{e^y}(e^y dy) = \int 6^u du = \frac{6^u}{\ln 6} + C$$

$$\boxed{= \frac{6^{e^y}}{\ln 6} + C}$$

30. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

Solución:

Aplicamos artificio matemático en el numerador tal que se tenga un factor lineal idéntico al del denominador, en consecuencia,

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{2e^x - e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{2e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} dx$$

$$= \int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx - \int \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx = 2\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \int dx$$

La primera integral es evaluada mediante el método del cambio de variable y aplicamos el teorema 1.14, mientras que la segunda integral usamos el teorema 1.1, por lo tanto,

$v = e^x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = e^x dx$

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 2\int \frac{dv}{v} - x + C = 2\ln v - x + C \boxed{= 2\ln(e^x + 1) - x + C}$$

31. $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$

Solución:

Este problema es conveniente pensar en aplicar en el denominador el método del cambio de variable. Debemos recordar que la identidad trigonométrica de tangente está dada por,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Utilizamos cambio de variable, tal que,

$$v = \ln(\cos x) \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{\sin x}{\cos x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x}dx = -dv$$

$$\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x \ln(\cos x)}dx = \int \frac{1}{\ln(\cos x)}\frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{dv}{v}$$

$$= -\ln|v| + C \boxed{= -\ln|\ln(\cos x)| + C}$$

32. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$

Solución:

Aplicamos cambio de variable,

$$v = 1-\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 1 - v \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -dv \quad \Rightarrow \quad dx = -2(1-v)dv$$

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{v}[-2(1-v)dv] = -2\int \frac{1-v}{v}dv = -2\int \frac{1}{v}dv + 2\int \frac{v}{v}dv$$

$$= -2\int \frac{dv}{v} + 2\int dv = -2\ln v + 2v + C$$

$$= -2\ln\left|1-\sqrt{x}\right| + 2\left(1-\sqrt{x}\right) + C$$

$$= -2\ln\left|1-\sqrt{x}\right| + 2 - 2\sqrt{x} + C \boxed{= -2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}-1\right) + C}$$

33. $\int \frac{2x}{x^2+6x+13}dx$

Solución:

Aplicamos artificio matemático en el numerador y descomponemos la fracción para evaluar la integral indefinida mediante algún teorema y/o cambio de variable,

$$\int \frac{2x}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{2x+6-6}{x^2+6x+13}dx$$

$$= \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx - \int \frac{6}{x^2+6x+13}dx$$

La primera integral evaluamos mediante el método del cambio de variable y aplicamos el teorema 1.14, mientras que la segunda integral (completamos cuadrados) utilizamos el teorema 1.12 $(u = x + 3, du = dx, a = 2)$, por lo tanto,

$$v = x^2 + 6x + 13 \qquad \Rightarrow \qquad dv = (2x + 6)dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2 + 6x + 13}dx = \int \frac{du}{u} - \int \frac{6}{(x^2 + 6x + 9) + 4}dx$$

$$= \ln|u| - 6\int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4}$$

$$= \ln|x^2 + 6x + 13| - 6 \cdot \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 3}{2}\right) + C$$

$$\boxed{= \ln|x^2 + 6x + 13| - 3\tan^{-1}\left(\frac{x + 3}{2}\right) + C}$$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6 + x}$

Solución:

La fracción de la integral se divide para x^6, por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x^6 + x} = \int \frac{\frac{dx}{x^6}}{\frac{x^6}{x^6} + \frac{x}{x^6}} = \int \frac{\frac{dx}{x^6}}{1 + \frac{1}{x^5}}$$

realizamos cambio de variable para la expresión del denominador, en consecuencia,

$$v = 1 + \frac{1}{x^5} \qquad \Rightarrow \qquad dv = -\frac{5}{x^6}dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{x^6} = -\frac{1}{5}dv$$

$$\int \frac{dx}{x^6 + x} = \int \frac{-\frac{1}{5}dv}{v} = -\frac{1}{5}\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{5}\ln|v| + C \boxed{= -\frac{1}{5}\ln\left|1 + \frac{1}{x^5}\right| + C}$$

35. $\displaystyle\int (7 - 9\sin 9x)5^{7x + \cos 9x}dx$

Solución:

Evaluamos la integral mediante el método del cambio de variable y aplicamos el teorema 1.16, por lo tanto,

$$v = 7x + \cos 9x \qquad \Rightarrow \qquad dv = (7 - 9\sin 9x)dx$$

$$\int (7 - 9\sin 9x)5^{7x+\cos 9x}dx = \int 5^v dv = \frac{5^v}{\ln 5} + C = \frac{5^{7x+\cos 9x}}{\ln 5} + C$$

36. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2}dx$

Solución:

Completamos cuadrados en el denominador, por lo tanto,

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2}dx = \int \frac{x+1}{(x^2 - 2x + 1) + 1}dx = \int \frac{x+1}{(x-1)^2 + 1}dx$$

Aplicamos cambio de variable en el denominador,

$$v = x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = v + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = dv$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2}dx = \int \frac{v+1+1}{v^2+1}dv = \int \frac{v+2}{v^2+1}dv$$

$$= \int \frac{v}{v^2+1}dv + \int \frac{2}{v^2+1}dv$$

En la primera integral nuevamente aplicamos cambio de variable (usamos después teorema 1.14) y la segunda integral empleamos el teorema 1.12, en consecuencia,

$$u = v^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2vdv \qquad \Rightarrow \qquad vdv = \frac{1}{2}dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 2\tan^{-1}(v) + C = \frac{1}{2}\ln|u| + 2\tan^{-1}(x-1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|v^2 + 1| + 2\tan^{-1}(x-1) + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\ln|(x-1)^2 + 1| + 2\tan^{-1}(x-1) + C}$$

1.4. Integrales definidas.

En las secciones 1.1 a 1.3 se estudiaron las integrales indefinidas, ya que estas proporcionan la relación inversa entre las integrales y derivadas. En esta sección seguiremos evaluando las integrales, pero como definidas, de acuerdo con el siguiente teorema,

Teorema 1.17:

Sea una función f continua e integrable en el intervalo [a, b], y sea F cualquier antiderivada de f en el mismo intervalo [a, b], entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A continuación, se desarrollan ejercicios de integración definida utilizando los teoremas 1.1 a 1.16 que fueron estudiados en las secciones 1.1 a 1.3, y posteriormente evaluamos el resultado obtenido según el teorema 1.17.

1. $\int_1^2 (4x^3 + 7)dx$

Solución:

$$\int_1^2 (4x^3 + 7)dx = 4\int_1^2 x^3dx + 7\int_1^2 dx = \left|4 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 7x\right|_1^2$$
$$= [2^4 + 7(2)] - [1^4 + 7(1)] = 16 + 14 - 1 - 7 \boxed{= 22}$$

2. $\int_0^\pi (4\sin x - 3\cos x)dx$

Solución:

$$\int_0^\pi (4\sin x - 3\cos x)dx = 4\int_0^\pi \sin x\, dx - 3\int_0^\pi \cos x\, dx = [-4\cos x - 3\sin x]_0^\pi$$
$$= (-4\cos\pi - 3\sin\pi) - (-4\cos 0 - 3\sin 0)$$
$$= -4(-1) - 3(0) + 4(1) - 3(0) = 4 + 4 \boxed{= 8}$$

`

3. $\int_0^{3\pi/2} |\sin x|dx$

Solución:

Para evaluar esta integral definida, debemos considerar el comportamiento del valor absoluto de la función $\sin x$ dentro del intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$. La función $\sin x$ es positiva en $[0, \pi]$ y negativa en $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, , por lo tanto, el valor absoluto se define por partes como:

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & si\ 0 \le x \le \pi \\ -\sin x & si\ \pi \le x \le 3\pi/2 \end{cases}$$

Con base en esta definición por tramos, la integral se descompone en dos partes:

$$\int_0^{3\pi/2} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\sin x) dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x\, dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{3\pi/2}$$

$$= [(-\cos \pi) - (-\cos 0)\ ] + \left[\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right) - ((-\cos \pi))\right]$$

$$= -(-1) - (-1) + (0) - (-1)$$

$$\boxed{= 3}$$

4. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\sin 2x| dx$

Solución:

Al igual que en el ejercicio anterior, esta integral se resuelve considerando la definición por tramos del valor absoluto de la función involucrada. En este caso, analizamos el comportamiento de:

$$|\sin 2x| = \begin{cases} -\sin 2x & \text{para } -\pi/3 \le x \le 0 \\ \sin 2x & \text{para } \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

En consecuencia, Con base en esta regla de correspondencia, descomponemos la integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\sin 2x| dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\sin 2x\, dx + \int_0^{\pi} \sin 2x\, dx$$

$$= \left| -\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + \left| -\frac{1}{2}\cos 2x \right|_0^{\pi}$$

$$= \left|\frac{1}{2}\cos 2x\right|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} - \left|\frac{1}{2}\cos 2x\right|_0^{\pi}$$

$$= \left\{\left[\frac{1}{2}\cos 0\right] - \left[\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]\right\} - \left\{\left[\frac{1}{2}\cos 2\pi\right] - \left[\frac{1}{2}\cos 0\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(1)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \boxed{= \frac{3}{4}}$$

5. $\int_{-1}^{2}(x-2|x|)dx$

Solución:

Para resolver esta integral definida, primero debemos considerar la definición por tramos de la función valor absoluto. Sabemos que:

$$|x| = \begin{cases} -x & si -1 \leq x \leq 0 \\ x & si\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Con base en esta definición, descomponemos la integral en dos partes, dividiendo el intervalo en los puntos donde la función cambia de forma:

$$\int_{-1}^{2}(x-2|x|)dx = \int_{-1}^{0}[x-2(-x)]dx + \int_{0}^{2}[x-2(x)]dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x+2x)dx + \int_{0}^{2}(x-2x)dx = 3\int_{-1}^{0}xdx - \int_{0}^{2}xdx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2} = \left[\frac{3}{2}(0)^2 - \frac{3}{2}(-1)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(0)^0\right]$$

$$= -\frac{3}{2} - 2 \boxed{= -\frac{7}{2}}$$

6. $\int_{-1}^{1}|x^2-x|dx$

Solución:

Para resolver esta integral definida, debemos identificar primero cómo se comporta la función dentro del valor absoluto. Observamos que:

$$x^2 - x = x(x-1)$$

Esta expresión cambia de signo dentro del intervalo $[-1, 1]$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, por lo que es necesario definir $|x^2 - x|$ por tramos:

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & si -1 \leq x \leq 0 \\ -(x^2 - x) & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral definida se puede evaluar,

$$\int_{-1}^{1}|x^2-x|dx = \int_{-1}^{0}(x^2-x)dx + \int_{0}^{1}-(x^2-x)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$= \left\{0-\left[\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2\right]\right\} - \left\{\left[\frac{1}{3}(1)^3-\frac{1}{2}(1)^2\right]-0\right\}$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\boxed{=1}$$

7. $\int_{0}^{16}\left|3\sqrt{x}-6\right|dx$

Solución:

Para resolver esta integral definida, es necesario analizar la función dentro del valor absoluto. Consideramos:

$$f(x) = 3\sqrt{x}-6$$

La expresión cambia de signo cuando $3\sqrt{x}-6=0$, es decir, cuando:

$$\sqrt{x}=2 \quad \Rightarrow \quad x=4$$

Por lo tanto, la función $\left|3\sqrt{x}-6\right|$ se define por tramos de la siguiente manera:

$$\left|3\sqrt{x}-6\right| = \begin{cases} -\left(3\sqrt{x}-6\right) & si\ \ 0\le x\le 4 \\ 3\sqrt{x}-6 & si\ \ 4\le x\le 16 \end{cases}$$

Con base en esto, descomponemos la integral original:

$$\int_{0}^{16}\left|3\sqrt{x}-6\right|dx = -\int_{0}^{4}\left(3\sqrt{x}-6\right)dx + \int_{0}^{16}\left(3\sqrt{x}-6\right)dx$$
$$= -\int_{0}^{4}\left(3x^{1/2}-6\right)dx + \int_{0}^{16}\left(3x^{1/2}-6\right)dx$$
$$= -\left[3\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-6x\right]_{0}^{4} + \left[3\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-6x\right]_{4}^{16}$$
$$= -\left[2\left(\sqrt{x}\right)^3-6x\right]_{0}^{4} + \left[2\left(\sqrt{x}\right)^3-6x\right]_{4}^{16}$$
$$= -\{[2(2)^3-6\cdot 4]-0\} + \{[2(4)^3-6\cdot 16]-[2(2)^3-6\cdot 4]\}$$
$$= -16+24+128-96-16+24\boxed{=48}$$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta + \sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

Solución:

Para simplificar esta integral, primero identificamos factores comunes en el numerador y luego aplicamos una identidad trigonométrica fundamental, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. Por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta + \sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta\,(1+\tan^2\theta)}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - [-\cos(0)]$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 \boxed{= \frac{1}{2}}$$

9. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{5-x^2}\,dx$

Solución:

Para resolver esta integral definida, aplicamos un cambio de variable que permita simplificar la expresión compuesta por una función cuadrática dentro de una raíz multiplicada por x. Sean:

$$v = 5 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad dv = -2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = -\frac{1}{2}dv$$

Sustituyendo, se obtiene,

$$\int_1^2 x\sqrt{5-x^2}\,dx = \int_1^2 (5-x^2)^{1/2}xdx = \int_1^2 v^{1/2}\left(-\frac{1}{2}dv\right) = -\frac{1}{2}\int_1^2 v^{1/2}dv$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}v^{3/2}\right|_1^2 = -\frac{1}{3}\left|\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3\right|_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{5-2^2}\right)^3 - \left(\sqrt{5-1^2}\right)^3\right] = -\frac{1}{3}[1-8] \boxed{= \frac{7}{3}}$$

10. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+5}{x-3}\,dx$

Solución:

Para simplificar la expresión del integrando, aplicamos un artificio algebraico en el numerador, evitando así recurrir a la división larga. La idea es escribir el numerador de forma que incluya un término igual al denominador. Observamos que:

$$\frac{x+5}{x-3} = \frac{x-3+8}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{8}{x-3} = 1 + \frac{8}{x-3}$$

Sustituimos en la integral y evaluamos la misma aplicando el teorema 1.1 para la primera integral y en la segunda el método del cambio de variable,

$$u = x-3 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$\int_0^2 \frac{x+5}{x-3}dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{8}{x-3}\right)dx = \int_0^2 dx + 8\int_0^2 \frac{dx}{x-3} = \left[x + 8\int \frac{du}{u}\right]_0^2$$

$$= [x + 8\ln|u|]_0^2 = [x + 8\ln|x-3|]_0^2$$

$$= [2 + 8\ln|2-3|] - [0 + 8\ln|0-3|] = 2 + 8\ln 1 - 8\ln 3$$

$$\boxed{= 2 - 8\ln 3}$$

11. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Solución:

En esta integral definida, aplicamos un cambio de variable que permita simplificar la expresión del integrando, es decir,

$$v = e^x \qquad \Rightarrow \qquad dv = e^x dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{dv}{e^x} = \frac{dv}{v}$$

Sustituyendo, se obtiene,

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_0^2 \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = \int_0^2 \frac{v}{1+v^2}\frac{dv}{v} = \int_0^2 \frac{dv}{1+v^2} = |\tan^{-1} v|_0^2$$

$$= |\tan^{-1} e^x|_0^2 = \tan^{-1} e^2 - \tan^{-1} e^0 = \tan^{-1} 7.389 - \tan^{-1} 1$$

$$\boxed{= 0.651\, rad}$$

12. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2}{(x-2)^2}dx$

Solución:

Para simplificar esta integral definida, aplicamos un cambio de variable que nos permita expresar todo el integrando en términos de una sola variable:

$v = x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = v + 2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = dv$

Sustituyendo, se obtiene,

$$\int_3^4 \frac{x^2}{(x-2)^2}dx = \int_3^4 \frac{(v+2)^2}{v^2}dv = \int_3^4 \frac{v^2+4v+4}{v^2}dv$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{v^2}{v^2}+\frac{4v}{v^2}+\frac{4}{v^2}\right)dv = \int_3^4 dv + 4\int_3^4 \frac{dv}{v} + 4\int_3^4 v^{-2}dv$$

$$= \left| v + 4\ln v - \frac{4}{v}\right|_3^4 = \left|(x-2) + 4\ln(x-2) - \frac{4}{x-2}\right|_3^4$$

$$= \left[(2) + 4\ln(2) - \frac{4}{2}\right] - \left[(1) + 4\ln(1) - \frac{4}{1}\right]$$

$$= 2 + 4\ln 2 - 2 - 1 + 4 \boxed{= 4\ln 2 + 3}$$

13. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x^4-1}}{x}dx$

Solución:

Antes de resolver esta integral definida, simplificamos el radicando factorizando la expresión,

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x^4-1}}{x}dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}{x}dx$$

Para avanzar, aplicamos un cambio de variable. Sea:

$x^2 = v \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{v} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}dv$

Sustituyendo en la integral, se obtiene,

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x^4-1}}{x}dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{(v-1)(v+1)}}{\sqrt{v}}\frac{1}{2\sqrt{v}}dv = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\sqrt{v^2-1}}{v}dv$$

Ahora aplicamos un segundo cambio de variable:

$$u = \sqrt{v^2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{2vdv}{2\sqrt{v^2 - 1}} \qquad \Rightarrow \qquad dv = \frac{u}{v}du$$

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{u}{v}\frac{u}{v}du = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{u^2}{v^2}du$$

Pero, $\quad u = \sqrt{v^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad u^2 = v^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad v^2 = u^2 + 1.$ Ahora aplicamos un artificio algebraico en el numerador para simplificar, tal que, tengamos un factor cuadrático idéntico al del denominador, es decir,

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{(u^2 + 1) - 1}{u^2 + 1}du = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{u^2 + 1}{u^2 + 1}du - \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^2 + 1}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 du - \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^2 + 1}du = \left|\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\tan^{-1}(u)\right|_1^3$$

$$= \left|\frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 1} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{v^2 - 1}\right)\right|_1^3$$

$$= \left|\frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 1} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{x^4 - 1}\right)\right|_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sqrt{80} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(\sqrt{80})\right] - \left[0 - \frac{1}{2}\tan^{-1}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 \cdot 5} - \tan^{-1}(\sqrt{16 \cdot 5}) \boxed{= 2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(4\sqrt{5})}$$

14. $\displaystyle\int_0^9 \frac{x}{\sqrt{x} + 1}dx$

Solución:

Para simplificar esta integral definida, aplicamos un cambio de variable que permita eliminar la raíz cuadrada. Sea:

$$v = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad dv = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\sqrt{x}dv = 2vdv$$

Sustituyendo, se obtiene,

$$\int_0^9 \frac{x}{\sqrt{x} + 1}dx = \int_0^9 \frac{v^2}{v + 1}(2vdv) = 2\int_0^9 \frac{v^3}{v + 1}dv$$

Para resolver esta integral, se usa un artificio algebraico que permita simplificar el cociente. Aplicamos división polinómica para expresar:

$$\frac{v^3}{v+1} = \frac{v^3 + v^2 - v^2 - v + v + 1 - 1}{v+1} = \frac{v^2(v+1) - v(v+1) + (v+1) - 1}{v+1}$$

$$\frac{v^3}{v+1} = \frac{v^2(v+1)}{v+1} - \frac{v(v+1)}{v+1} + \frac{(v+1)}{v+1} - \frac{1}{v+1} = v^2 - v + 1 - \frac{1}{v+1}$$

Sustituyendo, se obtiene,

$$\int_0^9 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx = 2\int_0^9 \left(v^2 - v + 1 - \frac{1}{v+1}\right) dv$$

$$= 2\left[\int_0^9 v^2 dv - \int_0^9 v dv + \int_0^9 dv - \int_0^9 \frac{dv}{v+1}\right]$$

Las primeras tres integrales son de solución inmediata (véase teoremas 1.1 a 1.4), y la última integral evaluamos mediante cambio de variable, por lo tanto,

$$u = v + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = dv$$

$$\int_0^9 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx = 2\left|\frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{2}v^2 + v - \int \frac{du}{u}\right|_0^9 = 2\left|\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \ln u\right|_0^9$$

$$= 2\left|\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \ln(v+1)\right|_0^9$$

$$= 2\left|\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right|_0^9$$

$$= 2\left\{\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{9}\right)^3 - \frac{1}{2}(9) + \sqrt{9} - \ln\left(\sqrt{9}+1\right)\right] - [-\ln(1)]\right\}$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{9}{2} + 3 - \ln(3+1)\right] - [0] \boxed{= 15 - 2\ln 4}$$

15. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}} dx$

Solución:

Aplicando propiedades de potenciación $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, se obtiene,

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}} dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}} dx$$

Evaluamos la integral aplicando el método del cambio de variable,

$$v=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad dv=\frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left[1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]dx$$

$$dv=\frac{dx}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right] \Rightarrow \quad dv=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}dx=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{v}}dv=\int_0^2 v^{-\frac{1}{2}}dv=\left|2\sqrt{v}\right|_0^2=\left|2\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\right|_0^2$$

$$=\left[2\sqrt{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}\right]-\left[2\sqrt{\ln\left(0+\sqrt{1}\right)}\right]\boxed{=2\sqrt{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}$$

16. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Solución:

Dado que ambos términos del numerador comparten el mismo denominador, descomponemos la integral en dos partes:

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx+\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Ahora, resolvemos la primera integral mediante cambio de variable, y la segunda usando el Teorema 1.11, que corresponde a una forma estándar de integral:

$$v=4-x^2 \qquad \Rightarrow \qquad dv=-2xdx \qquad \Rightarrow \qquad 2xdx=-dv$$

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^2 \frac{-dv}{\sqrt{v}}+3\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=-\int_0^2 v^{-1/2}dv+3\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left|-\frac{v^{1/2}}{1/2}+3\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|_0^2=\left|-2\sqrt{4-x^2}+3\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|_0^2$$

$$=\left[-2\sqrt{0}+3\sin(1)\right]-\left[-2\sqrt{4}+3\sin(0)\right]=3\left(\frac{\pi}{2}\right)+4$$

$$\boxed{=\frac{3}{2}\pi+4}$$

17. $\int_{-\pi}^{-\pi/2} [\cos x - (\cos x)^2]^2 \sin x \, dx$

Solución:

Resolvemos la integral aplicando un cambio de variable que simplifica la expresión. Sea:

$$v = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad dv = -\sin x \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \sin x \, dx = -dv$$

Después, se ajustan los límites de integración. Cuando $x = -\pi$, entonces $v = \cos(-\pi) = -1$ y cuando $x = -\frac{\pi}{2}$, se tiene $v = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} [\cos x - (\cos x)^2]^2 \sin x \, dx = \int_{-1}^{0} (v - v^2)^2 (-dv) = -\int_{-1}^{0} (v - v^2)^2 dv$$

$$= -\int_{-1}^{0} (v^2 - 2v^3 + v^4) dv = \left| -\frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}v^4 - \frac{1}{5}v^5 \right|_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^4 - \frac{1}{5}(-1)^5 \right] = -\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right]$$

$$\boxed{= -\frac{31}{30}}$$

18. $\int_{1}^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$

Solución:

Evaluamos la integral definida aplicando el cambio de variable,

$$v = \sqrt[6]{x} \qquad \Rightarrow \qquad v^6 = x \qquad \Rightarrow \qquad dx = 6v^5 dv$$

$$\int_{1}^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int_{1}^{64} \frac{(x)^{1/6}}{(x)^{1/2} - (x)^{1/3}} dx = \int_{1}^{64} \frac{(v^6)^{1/6}}{(v^6)^{1/2} - (v^6)^{1/3}} dx$$

$$= \int_{1}^{64} \frac{v}{v^3 - v^2} (6v^5 dv) = 6 \int_{1}^{64} \frac{v^6}{v^2(v-1)} dv$$

$$= 6 \int_{1}^{64} \frac{v^4}{v-1} dv$$

Aplicamos división larga,

$$\int_1^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = 6\int_1^{64}\left(v^3+v^2+v+1+\frac{1}{v-1}\right)dv$$

$$= \left|\frac{3}{2}v^4+2v^3+3v^2+6v+6\ln(v-1)\right|_1^{64}$$

$$= \left|\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x}\right)^4+2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right|_1^{64}$$

$$= \left|\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right|_1^{64}$$

$$= \left\{\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64}\right)^2+2\sqrt{64}+3\sqrt[3]{64}+6\sqrt[6]{64}+6\ln\left(\sqrt[6]{64}-1\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+2\sqrt{1}+3\sqrt[3]{1}+6\sqrt[6]{1}+6\ln\left(\sqrt[6]{1}-1\right)\right]\right\}$$

$$= \left\{[24+16+12+12+6\ln(1)]-\left[\frac{3}{2}+2+3+6+6\ln(0)\right]\right\}$$

$$= [64]-\left[\frac{25}{2}+\infty\right]\boxed{=\infty \quad \text{diverge}}$$

19. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$

Solución:

Observamos que la integral no puede resolverse directamente. Por tanto, aplicamos un cambio de variable para simplificar la expresión.

$$v=\sin x \qquad \Rightarrow \qquad dv=\cos x\, dx$$

Sustituyendo, se obtiene,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{dv}{v^2\sqrt{1+v^2}}$$

Aunque la técnica de sustitución trigonométrica constituye una posible vía de resolución (no se aborda en el presente capítulo), se opta por un procedimiento alternativo basado en un cambio de variable que permite simplificar la integral.

$$u=\frac{1}{v} \qquad \Rightarrow \qquad v=\frac{1}{u} \qquad \Rightarrow \qquad dv=-\frac{1}{u^2}du$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\left(-\frac{1}{u^2}du\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\left(\frac{1}{u^2}\right)}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}du$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2+1}{u^2}}} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{du}{\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}du$$

Nuevamente aplicamos un cambio de variable,

$$t = u^2+1 \qquad \Rightarrow \qquad dt = 2udu \qquad \Rightarrow \qquad udu = \frac{1}{2}dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} t^{-1/2}dt = \left|t^{1/2}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}$$

Finalmente, sustituimos las variables y evaluamos la integral definida,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \left|-\sqrt{u^2+1}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} = \left|-\sqrt{\left(\frac{1}{v}\right)^2+1}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} = \left|-\sqrt{\frac{1+v^2}{v^2}}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= \left|-\frac{\sqrt{1+v^2}}{v}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} = \left|-\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sin x}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left[\left(\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+\left(\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\boxed{=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}$$

20. $\int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Solución:

Descomponemos la integral en dos términos, utilizando la linealidad de la integral:

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx + \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Para resolver la primera integral aplicamos un cambio de variable, y para la segunda usamos el teorema 1.11, en consecuencia,

$$v = 4 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad dv = -2xdx \qquad \Rightarrow \qquad 2xdx = -dv$$

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^2 \frac{-dv}{\sqrt{v}} + 3\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = -\int_0^2 v^{-1/2}dv + 3\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \left| -\frac{v^{1/2}}{1/2} + 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|_0^2 = \left| -2\sqrt{4-x^2} + 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|_0^2$$

$$= \left[-2\sqrt{0} + 3\sin(1)\right] - \left[-2\sqrt{4} + 3\sin(0)\right] = 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4$$

$$\boxed{= \frac{3}{2}\pi + 4}$$

Capítulo 2: Técnicas de integración

2.1. Integración por partes.

En esta sección se inicia con un par de integrales que ya están en capacidad de resolver. Primero evaluamos lo siguiente.

$$\int e^{-x}dx = -e^{x} + C$$

Esto fue bastante simple. A continuación, vamos a examinar,

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Para hacer esta integral se utilizó los pasos de la integración por cambio de variable. De nuevo, bastante simple de hacer siempre que recuerdes cómo hacer cambio o sustitución de variable. Por cierto, hay que asegurarse de que pueden realizar este tipo de sustituciones de manera rápida y sencilla. A partir de ahora se sugiere realizar este tipo de sustituciones mentalmente. Si tienes que detenerte a escribirlas en cada problema, verás que te llevará mucho más tiempo resolverlos, aunque si realizan los pasos no debe afectar la respuesta al ejercicio.

Suponga que la integral a evaluar es,

$$\int x^2e^{3x}dx$$

Es obvio que este tipo de integral no se puede evaluar mediante los pasos de la integración por cambio de variable. En consecuencia, para este tipo de problemas se debe utilizar la técnica de integración por partes. Dicha técnica se basa en la derivada del producto de dos funciones, definida por:

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Aplicando integrales en ambos extremos de la ecuación, se tiene que;

$$\int f(x)g'(x)dx = \int D_x[f(x)g(x)]dx - \int g(x)f'(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)$$

Otra manera sencilla de entender la integración por partes es realizando unos cambios de variables elementales,

$u = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad du = f'(x)dx$

$dv = g'(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad v = g(x)$

Finalmente, la ecuación de integración por partes se define como,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2.1)$$

En los siguientes ejercicios resueltos se aplica la técnica de integración por partes, e inclusive se utilizan los teoremas tratados en el capítulo 1.

1. $\int x\sqrt{x+3}dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = x \qquad dv = \sqrt{x+3}dx$

Procedemos a derivar u e integrar dv (se realiza cambio de variable $z = x + 3$ y $dz = dx$)

$$du = dx \qquad v = \int \sqrt{x+3}dx = \int z^{1/2}dz = \frac{2}{3}z^{3/2} = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2}$$

$$\int x\sqrt{x+3}dx = uv - \int vdu = x \cdot \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+3)^{3/2}dx$$

$$= \frac{2}{3}x\left(\sqrt{x+3}\right)^3 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left(\sqrt{x+3}\right)^5 + C$$

$$\boxed{= \frac{2}{3}x\left(\sqrt{x+3}\right)^3 - \frac{4}{15}\left(\sqrt{x+3}\right)^5 + C}$$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}}dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = x \qquad dv = \frac{dx}{\sqrt{2x-5}}$

Se procede a derivar u e integrar dv (se realiza cambio de variable $z = 2x - 5$ y $dz = 2dx$, por lo que $dx = \frac{1}{2}dz$)

$$du = dx \qquad v = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{2}\int z^{-1/2} = \frac{1}{2}\cdot 2z^{1/2} = (2x-5)^{1/2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}}dx = uv - \int vdu = x(2x-5)^{1/2} - \int (2x-5)^{1/2}dx$$

$$= x\sqrt{2x-5} - \frac{1}{2}\int z^{-1/2} = x\sqrt{2x-5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z^{1/2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= x\sqrt{2x-5} - \frac{1}{3}\,(2x-5)^{3/2} + C \\ &= x\sqrt{2x-5} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x-5}\right)^3 + C \end{aligned}}$$

3. $\int \ln 4x\, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$$u = \ln 4x \qquad dv = dx$$

Se procede a derivar u e integrar dv

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \int dx = x$$

$$\int \ln 4x\, dx = uv - \int vdu = x\ln 4x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln 4x - \int dx$$

$$\boxed{= x\ln 4x - x + C}$$

4. $\int xe^{3x}dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$$u = x \qquad dv = e^{3x}dx$$

Se procede a derivar u e integrar dv

$$du = dx \qquad\qquad v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$\int x e^{3x} dx = uv - \int v du = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C}$$

5. $\int x \sin x \, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$$u = x \qquad\qquad dv = \sin x \, dx$$

Se procede a derivar u e integrar dv

$$du = dx \qquad\qquad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int x \sin x \, dx = uv - \int v du = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \, dx$$

$$\boxed{= -x \cos x + \sin x + C}$$

6. $\int x \cos 4x \, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$$u = x \qquad\qquad dv = \cos 4x \, dx$$

Se procede a derivar u e integrar dv

$$du = dx \qquad\qquad v = \int \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int x \cos 4x \, dx = uv - \int v du = x \cdot \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x \sin 4x - \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4} \cos 4x + C \boxed{= \frac{1}{4} x \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C}$$

Existe otro método interesante en la técnica de integración por partes conocido como tabular. Este método se utiliza para integraciones por partes sucesivas, es decir, integrar por partes varias veces consecutivas. Los tipos de integrales deben ser de los siguientes tipos:

$$\int p(x)\sin kx\,dx, \quad \int p(x)\cos kx\,dx \quad y \quad \int p(x)e^{kx}dx$$

Donde, $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$. Al tratarse de una integración por partes debemos escoger adecuadamente los valores de u y dv. Esto quiere decir que u deber derivada n veces hasta que su última derivada sea 0, mientras que las integraciones sucesivas se terminan justo aquí. Por ejemplo, los ejercicios 4, 5 y 6 de esta sección también era válido aplicar el método de integración por partes tabular, pero, a partir del ejercicio 7 serán resueltos mediante este tipo de integraciones sucesivas, siempre que se cumpla con cualquiera de los tipos de integrales que contienen un polinomio y una expresión trigonométrica (seno y coseno) o expresión exponencial.

7. $\int x^2 \sin 4x\,dx$

Solución:

Se definen los valores de $u = x^2$ y $dv = \sin 4x$ para derivar e integrar de manera sucesiva hasta que la derivada de u sea 0, entonces:

Signos	u y sus derivadas	dv y sus integrales
$+$	x^2	$\sin 4x$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$	2	$-\frac{1}{16}\sin 4x$
$-$	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Finalmente, se obtiene la solución:

$$\int x^2 \sin 4x\,dx = x^2\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - 2x\left(-\frac{1}{16}\sin 4x\right) + 2\left(\frac{1}{64}\cos 4x\right) + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C}$$

8. $\int x^3 \cos 3x \, dx$

Solución:

Se definen los valores de $u = x^3$ y $dv = \cos 3x$ para derivar e integrar de manera sucesiva hasta que la derivada de u sea 0, entonces:

Signos	u y sus derivadas	dv y sus integrales
$+$	x^3	$\cos 3x$
$-$	$3x^2$	$\frac{1}{3}\sin 3x$
$+$	$6x$	$-\frac{1}{9}\cos 3x$
$-$	6	$-\frac{1}{27}\sin 3x$
$+$	0	$\frac{1}{81}\cos 3x$

Finalmente, se obtiene la solución:

$$\int x^3 \cos 3x \, dx = x^3\left(\frac{\sin 3x}{3}\right) + 3x^2\left(\frac{\cos 3x}{9}\right) - 6x\left(\frac{\sin 3x}{27}\right) - 6\left(\frac{\cos 3x}{81}\right) + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{1}{3}x^3 \sin 3x + \frac{1}{3}x^2 \cos 3x - \frac{2}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x + C \\ &= \frac{1}{9}(3x^3 - 2x)\sin 3x + \frac{1}{27}(9x^2 - 2)\cos 3x + C \end{aligned}}$$

9. $\int x^3 \sin x \, dx$

Solución:

De manera similar a los ejercicios 7 y 8 se definen los valores de $u = x^3$ y $dv = \sin x$ para derivar e integrar de manera sucesiva hasta que la derivada de u sea 0, entonces:

Signos	u y sus derivadas	dv y sus integrales
$+$	x^3	$\sin x$
$-$	$3x^2$	$-\cos x$
$+$	$6x$	$-\sin x$
$-$	6	$\cos x$
$+$	0	$\sin x$

Finalmente, se obtiene la solución:

$$\int x^3 \sin x \, dx = x^3(-\cos x) + 3x^2(\sin x) + 6x(\cos x) - 6\sin x + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C \\ &= (6x - x^3)\cos x + (3x^2 - 6)\sin 3x + C \end{aligned}}$$

10. $\int x^3 e^x dx$

Solución:

Se definen los valores de $u = x^3$ y $dv = e^x$ para derivar e integrar de manera sucesiva hasta que la derivada de u sea 0, entonces:

Signos	u y sus derivadas	dv y sus integrales
$+$	x^3	e^x
$-$	$3x^2$	e^x
$+$	$6x$	e^x
$-$	6	e^x
$+$	0	e^x

Finalmente, se obtiene la solución:

$$\int x^3e^x dx = x^3(e^x) - 3x^2(e^x) + 6x(e^x) - 6(e^x) + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \end{aligned}}$$

11. $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2} dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$$u = xe^{2x} \qquad\qquad dv = \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

Se procede a derivar u (derivada del producto de dos funciones) e integrar dv (se realiza cambio de variable $z = 2x + 1$ y $dx = \frac{1}{2}dz$)

$$du = (2xe^{2x} + e^{2x})dx \qquad\qquad v = \int \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\int z^{-2}dz = -\frac{1}{2(2x+1)}$$

$$\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx = uv - \int vdu = xe^{2x} \cdot \left[-\frac{1}{2(2x+1)}\right] - \int -\frac{(2xe^{2x} + e^{2x})dx}{2(2x+1)}$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \int \frac{e^{2x}(2x+1)dx}{2(2x+1)} = -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C \boxed{= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

12. $\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$

Solución:

Antes de aplicar la integración por partes se debe realizar el proceso del cambio de variable:

$$z = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad dz = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}dz$$

$$\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x^2e^{x^2}xdx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{ze^z\left(\frac{1}{2}dz\right)}{(z+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{ze^z}{(z+1)^2}dz$$

Se utiliza la técnica de integración por partes, y se definen los valores de u y dv:

$u = ze^z \qquad\qquad dv = \dfrac{dz}{(z+1)^2}$

Se procede a derivar u (derivada del producto de dos funciones) e integrar dv (se realiza cambio de variable $w = z + 1$ y $dw = dz$)

$du = (ze^z + e^z)dz \qquad\qquad v = \displaystyle\int \frac{dz}{(z+1)^2} = \int w^{-2}dw = -\frac{1}{(z+1)}$

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{ze^z}{(z+1)^2}dz = \frac{1}{2}\left[uv - \int vdu\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ze^z\left[-\frac{1}{(z+1)}\right] - \int -\frac{(ze^z+e^z)dz}{(z+1)}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{ze^z}{(z+1)} + \int \frac{e^z(z+1)dz}{(z+1)}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{ze^z}{(z+1)} + \int e^z dz\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{ze^z}{(z+1)} + e^z + C\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-ze^z + e^z(z+1)}{z+1}\right] + \frac{1}{2}C$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-ze^z + ze^z + e^z}{z+1}\right] + C_1 = \frac{1}{2}\frac{e^z}{z+1} + C_1 \boxed{= \frac{1}{2}\frac{e^{x^2}}{x^2+1} + C}$$

13. $\displaystyle\int x2^x dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = x \qquad\qquad dv = 2^x dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = dx \qquad\qquad v = \displaystyle\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$

$$\int x2^x dx = uv - \int vdu = x\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx$$
$$= \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C \boxed{= \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + C}$$

14. $\displaystyle\int x^5 e^{x^2} dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = x^4$ $\qquad$ $dv = xe^{x^2}dx$

Se procede a derivar u e integrar dv (se realiza cambio de variable z= x^2 y derivando se obtiene $xdx = \frac{1}{2}dz$):

$$du = 4x^3dx \qquad v = \int e^z\left(\frac{1}{2}dz\right) = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int x^5e^{x^2}dx = uv - \int vdu = x^4 \cdot \frac{1}{2}e^{x^2} - \int \frac{1}{2}e^{x^2}(4x^3dx)$$

$$= \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - \int 2x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - \int x^2 \cdot 2xe^{x^2}dx$$

Nuevamente (segunda integración por partes) se definen los valores de u y dv:

$u = x^2$ $\qquad$ $dv = 2xe^{x^2}dx$

Se procede a derivar u e integrar dv (se repite lo realizado en la primera integración por partes, pero $dz = 2xdx$):

$$du = 2xdx \qquad v = \int e^z dz = e^z = e^{x^2}$$

$$\int x^5e^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - \int x^2 \cdot 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - \left(uv - \int vdu\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - \left(x^2e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2xdx\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - x^2e^{x^2} + e^{x^2} + C}$$

15. $\int \ln^2 x \, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = (\ln x)^2$ $\qquad$ $dv = dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$$du = \frac{2\ln x}{x}dx \qquad v = \int dx = x$$

$$\int \ln^2 x\,dx = uv - \int vdu = x\cdot(\ln x)^2 - \int x\cdot\frac{2\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$$

Nuevamente (segunda integración por partes) se definen los valores de u y dv:

$u = \ln x \qquad\qquad dv = dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = \frac{1}{x}dx \qquad\qquad v = \int dx = x$

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx = x\ln^2 x - 2\left(uv - \int vdu\right)$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int dx$$

$$\boxed{= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C}$$

16. $\int e^{\theta}\sin 4\theta\,d\theta$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = e^{\theta} \qquad\qquad dv = \sin 4\theta\,d\theta$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = e^{\theta}d\theta \qquad\qquad v = \int \sin 4\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\cos 4\theta$

$$\int e^{\theta}\sin 4\theta\,d\theta = uv - \int vdu = e^{\theta}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 4\theta\right) - \int -\frac{1}{4}\cos 4\theta\cdot e^{\theta}d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\int e^{\theta}\cos 4\theta\,d\theta$$

Nuevamente (segunda integración por partes) se definen los valores de u y dv:

$u = e^{\theta} \qquad\qquad dv = \cos 4\theta\,d\theta$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = e^{\theta}d\theta \qquad\qquad v = \int \cos 4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\sin 4\theta$

$$\int e^{\theta}\sin 4\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\int e^{\theta}\cos 4\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\left(uv - \int vdu\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\left(e^{\theta}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\theta - \int \frac{1}{4}\sin 4\theta\cdot e^{\theta}d\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{16}e^{\theta}\sin 4\theta - \frac{1}{16}\int e^{\theta}\sin 4\theta\, dx$$

Como se puede observar, la última integral es semejante a la integral original, por lo tanto:

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)\int e^{\theta}\sin 4\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{16}e^{\theta}\sin 4\theta + C$$

Finalmente,

$$\int e^{\theta}\sin 4\theta\, d\theta = \frac{16}{17}\left(-\frac{1}{4}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{16}e^{\theta}\sin 4\theta + C\right)$$

$$= -\frac{4}{17}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{17}e^{\theta}\sin 4\theta + \frac{16}{17}C$$

$$\boxed{= -\frac{4}{17}e^{\theta}\cos 4\theta + \frac{1}{17}e^{\theta}\sin 4\theta + C_1}$$

17. $\int \sin(\ln x)\, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = \sin(\ln x)$ $\qquad\qquad$ $dv = dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$ $\qquad\qquad$ $v = \int dx = x$

$$\int \sin(\ln x)\, dx = uv - \int vdu = \sin(\ln x)\cdot x - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx$$

Nuevamente (segunda integración por partes) se definen los valores de u y dv:

$u = \cos(\ln x) \qquad\qquad\qquad dv = dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \qquad\qquad v = \int dx = x$

$$\int \sin(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - \left(uv - \int vdu\right)$$

$$= x\sin(\ln x) - \left[\cos(\ln x) \cdot x - \int x\left(-\frac{\sin(\ln x)}{x}\right) dx\right]$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

Observemos que la última integral es semejante a la integral original, por lo tanto:

$$(1+1)\int \sin(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + C$$

Finalmente,

$$\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}[x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + C]$$

$$= \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C_1}$$

18. $\int \sin x \cos 2x\, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = \sin x \qquad\qquad dv = \cos 2x\, dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = \cos x\, dx \qquad\qquad v = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int \sin x \cos 2x\, dx = uv - \int vdu = \sin x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \cos x\, dx$$

Nuevamente (segunda integración por partes) se definen los valores de u y dv:

$u = \cos x \qquad\qquad dv = \sin 2x\, dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = -\sin x\, dx \qquad\qquad v = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int \sin x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin x \sin 2x - \frac{1}{2}\left(uv - \int vdu\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \sin 2x - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos x \cos 2x - \int \frac{1}{2}\sin x \cos 2x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos x \cos 2x + \frac{1}{4}\int \sin x \cos 2x\, dx$$

Como se puede observar, la última integral es semejante a la integral original, por lo tanto:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\int \sin x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos x \cos 2x + C$$

Finalmente,

$$\int \sin x \cos 2x\, dx = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\sin x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos x \cos 2x + C\right]$$

$$= \frac{2}{3}\sin x \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \cos 2x + \frac{4}{3}C$$

$$\boxed{= \frac{2}{3}\sin x \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \cos 2x + C_1}$$

19. $\int \tan^{-1} x\, dx$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = \tan^{-1} x \qquad\qquad dv = dx$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = \frac{dx}{x^2 + 1} \qquad\qquad v = \int dx = x$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = uv - \int vdu = x \cdot \tan^{-1} x - \int x \frac{dx}{x^2 + 1} = x \tan^{-1} x - \int \frac{xdx}{x^2 + 1}$$

En la última integral se aplica cambio de variable:

$$w = x^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dw = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}dw$$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{\frac{1}{2}dw}{w} = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w}$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln w + C \boxed{= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C}$$

20. $\int e^{4\theta} \cos 2\theta\, d\theta$

Solución:

Se definen los valores de u y dv:

$u = e^{4\theta} \qquad\qquad dv = \cos 2\theta\, d\theta$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$$du = 4e^{4\theta}d\theta \qquad\qquad v = \int \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\int e^{4\theta} \cos 2\theta\, d\theta = uv - \int vdu = e^{4\theta} \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) - \int \frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot 4e^{4\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}e^{4\theta}\sin 2\theta - 2\int e^{4\theta}\sin 2\theta\, d\theta$$

Nuevamente (segunda integración por partes) se definen los valores de u y dv:

$u = e^{4\theta} \qquad\qquad dv = \sin 2\theta\, d\theta$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$$du = 4e^{4\theta}d\theta \qquad\qquad v = \int \sin 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\int e^{4\theta} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}e^{4\theta}\sin 2\theta - 2\left(uv - \int vdu\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{4\theta}\sin 2\theta - 2\left(-\frac{1}{2}e^{4\theta}\cos 2\theta + 2\int e^{4\theta}\cos 2\theta\, d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{4\theta}\sin 2\theta + e^{4\theta}\cos 2\theta - 4\int e^{4\theta}\cos 2\theta\, dx$$

Como se puede observar, la última integral es semejante a la integral original, por lo tanto:

$$(1+4)\int e^{4\theta}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}e^{4\theta}\sin 2\theta + e^{4\theta}\cos 2\theta + C$$

Finalmente,

$$\int e^{\theta}\sin 4\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e^{4\theta}\sin 2\theta + e^{4\theta}\cos 2\theta + C\right)$$

$$= \frac{1}{10}e^{4\theta}\sin 2\theta + \frac{1}{5}e^{4\theta}\cos 2\theta + \frac{1}{5}C$$

$$\boxed{= \frac{1}{10}e^{4\theta}\sin 2\theta + \frac{1}{5}e^{4\theta}\cos 2\theta + C_1}$$

2.2. Integración de potencias de funciones trigonométricas.

En esta sección se analizan y resuelven ejercicios de integración de potencias superiores de $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\tan x$, y de productos de potencias. A continuación, se describen los casos de integración de potencias de funciones trigonométricas.

Caso 1: Integrales de potencias impares de seno y coseno

$(i)\int \sin^{\mathrm{n}} x\, dx\ \ o\ (ii)\int \cos^{\mathrm{n}} x\, dx$, donde n es un número entero positivo impar

(i) Factor:

$$\sin^{\mathrm{n}} x\, dx = (\sin^{\mathrm{n}-1} x)\sin x\, dx = (\sin^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}}\sin x\, dx$$

$$= (1-\cos^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}}\sin x\, dx$$

(ii) Factor:

$$\cos^{\mathrm{n}} x\, dx = (\cos^{\mathrm{n}-1} x)\cos x\, dx = (\cos^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}}\cos x\, dx$$

$$= (1-\sin^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}}\cos x\, dx$$

Caso 2: Integrales de productos de potencias de seno y coseno

$\int \sin^{\mathrm{n}} x \cos^{\mathrm{m}} x\, dx$, en la que m o n es un número entero positivo impar y para

la solución de este caso se debe aplicar el método explicado en el caso 1.

(i) Si n es impar, entonces:

$$\begin{aligned}\sin^{\mathrm{n}} x \cos^m x\, dx &= (\sin^{\mathrm{n}-1} x) \cos^m x \sin x\, dx \\ &= (\sin^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}} \cos^m x \sin x\, dx \\ &= (1-\cos^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}} \cos^m x \sin x\, dx\end{aligned}$$

(ii) Si m es impar, entonces:

$$\begin{aligned}\sin^{\mathrm{n}} x \cos^m x\, dx &= \sin^{\mathrm{n}} x\, (\cos^{\mathrm{m}-1} x) \cos x\, dx \\ &= \sin^{\mathrm{n}} x\, (\cos^2 x)^{\frac{(m-1)}{2}} \cos x\, dx \\ &= \sin^{\mathrm{n}} x\, (1-\sin^2 x)^{\frac{(m-1)}{2}} \cos x\, dx\end{aligned}$$

Cuando las integrales de potencias de seno y coseno no son impares es imposible aplicar los casos 1 y 2, para lo cual se debe emplear las siguientes dos identidades trigonométricas:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Caso 3: Integrales de potencias pares y productos de potencias de seno y coseno

$(i) \int \sin^{\mathrm{n}} x\, dx\, , (ii) \int \cos^{\mathrm{n}} x\, dx \;\; o \; (iii) \int \sin^{\mathrm{n}} x \cos^{\mathrm{m}} x\, dx$ donde m y n son números enteros positivos pares

(i) Factor:

$$\sin^{\mathrm{n}} x\, dx = (\sin^2 x)^{n/2} dx = \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^{\frac{n}{2}} dx$$

(ii) Factor:

$$\cos^{\mathrm{n}} x\, dx = (\cos^2 x)^{n/2} dx = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^{\frac{n}{2}} dx$$

(iii) Factor:

$$\begin{aligned}\sin^{\mathrm{n}} x \cos^{\mathrm{m}} x\, dx &= (\sin^2 x)^{n/2} (\cos^2 x)^{m/2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^{\frac{n}{2}} \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^{\frac{m}{2}} dx\end{aligned}$$

Caso 4: Integrales de potencias de tangente y cotangente

$(i)\int \tan^{\mathrm{n}} x\,dx\;\; o\;(ii)\int \cot^{\mathrm{n}} x\,dx$, donde n es un número entero positivo

(i) Factor:

$\tan^{\mathrm{n}} x\,dx = (\tan^{\mathrm{n}-2} x)\tan^2 x\,dx = (\tan^{\mathrm{n}-2} x)(\sec^2 x - 1)dx$

(ii) Factor:

$\cot^{\mathrm{n}} x\,dx = (\cot^{\mathrm{n}-2} x)\cot^2 x\,dx = (\cot^{\mathrm{n}-2} x)(\csc^2 x - 1)dx$

Caso 5: Integrales de potencias pares de secante y cosecante

$(i)\int \sec^{\mathrm{n}} x\,dx\;\; o\;(ii)\int \csc^{\mathrm{n}} x\,dx$, donde n es un número entero positivo par

(i) Factor:

$$\begin{aligned}\sec^{\mathrm{n}} x\,dx &= (\sec^{\mathrm{n}-2} x)\sec^2 x\,dx = (\sec^2 x)^{\frac{(n-2)}{2}}(\sec^2 x)dx\\ &= (\tan^2 x + 1)^{\frac{(n-2)}{2}}(\sec^2 x)dx\end{aligned}$$

(ii) Factor:

$$\begin{aligned}\csc^{\mathrm{n}} x\,dx &= (\csc^{\mathrm{n}-2} x)\csc^2 x\,dx = (\csc^2 x)^{\frac{(n-2)}{2}}(\csc^2 x)dx\\ &= (\cot^2 x + 1)^{\frac{(n-2)}{2}}(\csc^2 x)dx\end{aligned}$$

Caso 6: Integrales de productos de potencias pares de tangente, secante, cotangente y cosecante.

$(i)\int \tan^{\mathrm{n}} x\sec^{\mathrm{m}} x\,dx\;\; o\;(ii)\int \cot^{\mathrm{n}} x\csc^{m} x\,dx$, donde n es un número entero

positivo par

(i) Factor:

$$\begin{aligned}\tan^{n} x\sec^{m} x\,dx &= \tan^{\mathrm{n}} x\,(\sec^{\mathrm{m}-2} x)\sec^2 x\,dx\\ &= \tan^{\mathrm{n}} x\,(\sec^2 x)^{\frac{(m-2)}{2}}(\sec^2 x)dx\\ &= \tan^{\mathrm{n}} x\,(\tan^2 x + 1)^{\frac{(m-2)}{2}}(\sec^2 x)dx\end{aligned}$$

(ii) Factor:

$$\cot^n x \csc^m x\,dx = \cot^{\mathrm{n}} x\,(\csc^{\mathrm{m}-2} x) \csc^2 x\,dx = \cot^{\mathrm{n}} x\,(\csc^2 x)^{\frac{(m-2)}{2}}(\csc^2 x)dx$$
$$= \cot^{\mathrm{n}} x\,(\cot^2 x + 1)^{\frac{(m-2)}{2}}(\csc^2 x)dx$$

Caso 7: Integrales de productos de potencias impares de tangente, secante, cotangente y cosecante.

$(i)\int \tan^{\mathrm{n}} x \sec^{\mathrm{m}} x\,dx\ \ o\ (ii)\int \cot^{\mathrm{n}} x \csc^{m} x\,dx$, donde n es un número entero positivo impar

(i) Factor:

$$\tan^n x \sec^m x\,dx = \tan^{\mathrm{n}-1} x\,(\sec^{\mathrm{m}-1} x) \sec x \tan x\,dx$$
$$= (\tan^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(\sec^{\mathrm{m}-1} x) \sec x \tan x\,dx$$
$$= (\sec^2 x - 1)^{\frac{n-1}{2}}(\sec^{\mathrm{m}-1} x) \sec x \tan x\,dx$$

(ii) Factor:

$$\cot^n x \csc^m x\,dx = \cot^{\mathrm{n}-1} x\,(\csc^{\mathrm{m}-1} x) \csc x \cot x\,dx$$
$$= (\cot^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(\csc^{\mathrm{m}-1} x) \csc x \cot x\,dx$$
$$= (\csc^2 x - 1)^{\frac{n-1}{2}}(\csc^{\mathrm{m}-1} x) \csc x \cot x\,dx$$

Caso 8: Integrales de potencias pares de secante y cosecante

$(i)\int \sec^{\mathrm{n}} x\,dx\ \ o\ (ii)\int \csc^{\mathrm{n}} x\,dx$, donde n es un número entero positivo impar

Aplicar la técnica de integración por partes:

(i) Considere $u = \sec^{\mathrm{n}-2} x$ y $dv = \sec^2 x\,dx$

(ii) Considere $u = \csc^{\mathrm{n}-2} x$ y $dv = \csc^2 x\,dx$

Caso 9: Integrales de productos de potencias pares e impares de tangente, secante, cotangente y cosecante.

$(i)\int \tan^{\mathrm{n}} x \sec^{\mathrm{m}} x\,dx \;\; o\;(ii)\int \cot^{\mathrm{n}} x \csc^{m} x\,dx$, donde n es un número entero positivo par y m es un número entero positivo impar. Se debe expresar el integrando en potencias impares de secante o cosecante y después aplicar la técnica de integración por partes.

(i) Factor:

$$\tan^{n} x \sec^{m} x\,dx = (\tan^2 x)^{\frac{n}{2}} \sec^{\mathrm{m}} x\,dx = (\sec^2 x - 1)^{\frac{n}{2}} \sec^{\mathrm{m}} x\,dx$$

(ii) Factor:

$$\cot^{n} x \csc^{m} x\,dx = (\cot^2 x)^{\frac{n}{2}} \csc^{\mathrm{m}} x\,dx = (\csc^2 x - 1)^{\frac{n}{2}} \csc^{\mathrm{m}} x\,dx$$

A continuación, se desarrollan ejercicios de integración de potencias de funciones trigonométricas en las que se utilizan los 8 casos descritos en esta sección.

1. $\displaystyle\int \sin^3 4x\,dx$

Solución:

Este problema se emplea el caso 1 de integral de potencia impar de seno

$$\begin{aligned}\int \sin^3 4x\,dx &= \int \sin^2 4x \sin 4x\,dx = \int (1-\cos^2 4x\,)\sin 4x\,dx\\ &= \int \sin 4x\,dx - \int \cos^2 4x \sin 4x\,dx\\ &= -\frac{1}{4}\cos 4x - \int (\cos 4x)^2 \sin 4x\,dx\end{aligned}$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \cos 4x \qquad \Rightarrow \qquad du = -4\sin 4x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \sin x\,dx = -\frac{1}{4}du$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 4x\,dx &= -\frac{1}{4}\cos 4x - \int u^2\left(-\frac{1}{4}du\right) = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\int u^2 du\\ &= -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C \boxed{= \frac{1}{12}\cos^3 4x - \frac{1}{4}\cos 4x + C}\end{aligned}$$

2. $\int \cos^5 x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el caso 1 de integral de potencia impar de coseno

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x\,)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x\; + \sin^4 x) \cos x\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - 2\int \sin^2 x \cos x\, dx + \int \sin^4 x \cos x\, dx$$

$$= \sin x - 2\int (\sin x)^2 \cos x\, dx + \int (\sin x)^4 \cos x\, dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad du = \cos x\, dx$

Por lo tanto,

$$\int \cos^5 x\, dx = \sin x - 2\int u^2 du + \int u^4 du = \sin x - 2 \cdot \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C}$$

3. $\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx$

Solución:

Este problema se procede a eliminar los valores absolutos, y se observa que se trata del caso 1 de integral de potencia impar de coseno

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos^3 x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \cos x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad du = \cos x\, dx$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1-u^2)du - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-u^2)du = \left|u - \frac{1}{3}u^3\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left|u - \frac{1}{3}u^3\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left|\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left|\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left[\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin 0 - \frac{1}{3}\sin^3 0\right)\right]$$

$$- \left[\left(\sin\pi - \frac{1}{3}\sin^3\pi\right) - \left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0\right] - \left[0 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

4. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el caso 2 de integral de productos de potencia de seno y coseno. Se puede usar cualquiera de los dos factores que se proponen, pero se va a utilizar el factor (ii).

$$\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^3 x \cos x \cos^2 x\, dx = \int \sin^3 x \cos x\,(1 - \sin^2 x\,)dx$$

$$= \int \sin^3 x \cos x\, dx - \int \sin^5 x \cos x\, dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad du = \cos x\, dx$

Por lo tanto,

$$\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int u^3 du - \int u^5 du = \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C}$$

5. $\int \sin^5 2x \cos^2 2x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el caso 2 de integral de productos de potencia de seno y coseno. Se puede usar cualquiera de los dos factores que se proponen, pero se va a utilizar el factor (i).

$$\int \sin^5 2x \cos^2 2x \, dx = \int \sin 2x \, (\sin^2 2x)^2 \cos^2 2x \, dx$$

$$= \int \sin 2x \, (1 - \cos^2 2x)^2 \cos^2 2x \, dx$$

$$= \int \sin 2x \, (1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x) \cos^2 2x \, dx$$

$$= \int \cos^2 2x \sin 2x \, dx - 2\int \cos^4 2x \sin 2x \, dx$$

$$+ \int \cos^6 2x \sin 2x \, dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \cos 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = -2\sin 2x \, dx \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} du$$

Por lo tanto,

$$\int \sin^5 2x \cos^2 2x \, dx = \int u^2 \left(-\frac{1}{2} du\right) - 2\int u^4 \left(-\frac{1}{2} du\right) + \int u^6 \left(-\frac{1}{2} du\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^2 du + \int u^4 du - \frac{1}{2}\int u^6 du$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} u^7 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{6}\cos^3 2x + \frac{1}{5}\cos^5 2x - \frac{1}{14}\cos^7 2x + C}$$

6. $\displaystyle\int \sin^4 3x \, dx$

Solución:

Este problema se emplea el caso 3 de integral de potencia de seno y coseno. Se emplea el factor (i).

$$\int \sin^4 3x \, dx = \int (\sin^2 3x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 6x)\right]^2 dx = \int \frac{1}{4}(1 - \cos 6x)^2 dx$$

$$\int \sin^4 3x\,dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 6x\,dx$$

En la última integral se aplica el caso 3 de integral de potencia de seno y coseno. Se emplea el factor (ii). Por lo tanto,

$$\int \sin^4 3x\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 12x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}\sin 12x + C$$

$$\boxed{= \frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C}$$

7. $\displaystyle\int \cos^6 2\theta\,d\theta$

Solución:

Este problema se emplea el caso 3 de integral de potencia de seno y coseno. Se emplea el factor (ii).

$$\int \cos^6 2\theta\,d\theta = \int (\cos^2 2\theta)^3 d\theta = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right]^3 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 4\theta + 3\cos^2 4\theta + \cos^3 4\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int d\theta + \frac{3}{8}\int \cos 4\theta\,d\theta + \frac{3}{8}\int \cos^2 4\theta\,d\theta + \frac{1}{8}\int \cos^3 4\theta\,d\theta$$

En la penúltima integral se aplica nuevamente el caso 3 con el factor (ii), y la última integral se utiliza el caso 1 con el factor (i). Por lo tanto,

$$\int \cos^6 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\theta + \frac{3}{8}\frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{3}{8}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta)d\theta + \frac{1}{8}\int \cos^2 4\theta \cos 4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\theta + \frac{3}{32}\sin 4\theta + \frac{3}{16}\int d\theta + \frac{3}{16}\int \cos 8\theta\,d\theta$$

$$+ \frac{1}{8}\int (1 - \sin^2 4\theta)\cos 4\theta\,d\theta$$

$$\int \cos^6 2\theta\, d\theta = \frac{1}{8}\theta + \frac{3}{32}\sin 4\theta + \frac{3}{16}\theta + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{8}\sin 8\theta + \frac{1}{8}\int \cos 4\theta\, d\theta$$

$$-\frac{1}{8}\int \sin^2 4\theta \cos 4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{5}{16}\theta + \frac{3}{32}\sin 4\theta + \frac{3}{128}\sin 8\theta + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\theta$$

$$-\frac{1}{8}\int (\sin 4\theta)^2 \cos 4\theta\, d\theta$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \sin 4\theta \qquad \Rightarrow \qquad du = 4\cos 4\theta\, d\theta \qquad \Rightarrow \qquad \cos 4\theta\, d\theta = \frac{1}{4}du$$

Por lo tanto,

$$\int \cos^6 2\theta\, d\theta = \frac{5}{16}\theta + \frac{3}{32}\sin 4\theta + \frac{3}{128}\sin 8\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta - \frac{1}{8}\int u^2\left(\frac{1}{4}du\right)$$

$$= \frac{5}{16}\theta + \frac{3}{32}\sin 4\theta + \frac{3}{128}\sin 8\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta - \frac{1}{32}\int u^2 du$$

$$= \frac{5}{16}\theta + \frac{4}{32}\sin 4\theta + \frac{3}{128}\sin 8\theta - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\boxed{= \frac{5}{16}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{3}{128}\sin 8\theta - \frac{1}{96}\sin^3 4\theta + C}$$

8. $\int \tan^4 x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (i) del caso 4 de integral de potencia de tangente

$$\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x\,(\sec^2 x\ - 1)dx$$

$$= \int (\tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x)dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \tan x \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec^2 x\, dx$

Por lo tanto,

$$\int \tan^4 x\, dx = \int u^2 du - \int \sec^2 x\, dx + \int dx = \frac{1}{3}u^3 - \tan x + x + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C}$$

9. $\int \cot^4 3x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (ii) del caso 4 de integral de potencia de tangente

$$\int \cot^4 3x\, dx = \int \cot^2 3x \cot^2 3x\, dx = \int \cot^2 3x\,(\csc^2 3x\ - 1)dx$$

$$= \int (\cot^2 3x \csc^2 3x - \cot^2 3x)dx$$

$$= \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx - \int \cot^2 3x\, dx$$

$$= \int (\cot 3x)^2 \csc^2 3x\, dx - \int (\csc^2 3x - 1)dx$$

A la primera integral se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \cot 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = -3 \csc^2 3x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \csc^2 3x\, dx = -\frac{1}{3}du$

Por lo tanto,

$$\int \cot^4 3x\, dx = \int u^2\left(-\frac{1}{3}du\right) - \int \csc^2 3x\, dx + \int dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int u^2 du + \frac{1}{3}\cot 3x + \int dx = -\frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{3}\cot 3x + x + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{9}\cot^3 3x + \frac{1}{3}\cot 3x + x + C}$$

10. $\int \tan^5 2x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (i) del caso 4 de integral de potencia de tangente

$$\int \tan^5 2x\,dx = \int \tan^3 2x \tan^2 2x\,dx = \int \tan^3 2x\,(\sec^2 2x\ - 1)dx$$

$$= \int (\tan^3 2x \sec^2 2x - \tan^3 2x)dx$$

$$= \int \tan^3 2x \sec^2 2x\,dx - \int \tan^3 2x\,dx$$

$$= \int (\tan 2x)^3 \sec^2 2x\,dx - \int \tan 2x\,(\sec^2 2x - 1)dx$$

A la primera integral se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \tan 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = 2\sec^2 2x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}du$$

Para la segunda integral se utiliza el proceso del ejercicio 7, por lo tanto,

$$\int \tan^5 2x\,dx = \int u^3\left(\frac{1}{2}du\right) - \int (\tan 2x \sec^2 2x - \tan 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^3 du - \int \tan 2x \sec^2 2x\,dx + \int \tan 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 - \int u\left(\frac{1}{2}du\right) + \frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + C$$

$$= \frac{1}{8}\tan^4 2x - \frac{1}{2}\int udu + \frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + C$$

$$= \frac{1}{8}\tan^4 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{8}\tan^4 2x - \frac{1}{4}\tan^2 2x + \frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + C}$$

11. $\int \tan^6 2x\,dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (i) del caso 4 de integral de potencia de tangente

$$\int \tan^6 2x\,dx = \int \tan^4 2x \tan^2 2x\,dx = \int \tan^4 2x\,(\sec^2 2x\ - 1)dx$$

$$= \int (\tan^4 2x \sec^2 2x - \tan^4 2x)dx$$

$$= \int \tan^4 2x \sec^2 2x\,dx - \int \tan^4 2x\,dx$$

$$\int \tan^6 2x\,dx = \int (\tan 2x)^4 \sec^2 2x\,dx - \int \tan^2 2x\,(\sec^2 2x - 1)dx$$

A la primera integral se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \tan 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = 2\sec^2 2x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}du$$

Para la segunda integral se utiliza el proceso del ejercicio 7, por lo tanto,

$$\int \tan^6 2x\,dx = \int u^4\left(\frac{1}{2}du\right) - \int (\tan^2 2x \sec^2 2x - \tan^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^4 du - \int \tan^2 2x \sec^2 2x\,dx + \int \tan^2 2x\,dx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}u^5$$

$$- \int (\tan 2x)^2 \sec^2 2x\,dx + \int (\sec^2 2x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{10}\tan^5 2x - \int u^2\left(\frac{1}{2}du\right) + \int \sec^2 2x\,dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{10}\tan^5 2x - \frac{1}{2}\int u^2 du + \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$$

$$= \frac{1}{10}\tan^5 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{10}\tan^5 2x - \frac{1}{6}\tan^3 2x + \frac{1}{2}\tan 2x - x + C}$$

12. $\int \sec^4 x\,dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (i) del caso 5 de integral de potencia par de secante

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\,dx = \int (\tan^2 x + 1)\sec^2 x\,dx$$

$$= \int (\tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x)dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx + \int \sec^2 x\,dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x\,dx + \tan x + C$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \tan x \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

Por lo tanto,

$$\int \sec^4 x\, dx = \int u^2 du + \tan x + C = \frac{1}{3}u^3 + \tan x + C \boxed{= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C}$$

13. $\int \csc^4 3x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (ii) del caso 5 de integral de potencia de cosecante

$$\int \csc^4 3x\, dx = \int \csc^2 3x \csc^2 3x\, dx = \int (\cot^2 3x\ + 1) \csc^2 3x\, dx$$

$$= \int (\cot^2 3x \csc^2 3x + \csc^2 3x) dx$$

$$= \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx + \int \csc^2 3x\, dx$$

$$= \int (\cot 3x)^2 \csc^2 3x\, dx + \left(-\frac{1}{3}\cot 3x\right) + C$$

A la integral se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \cot 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = -3\csc^2 3x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \csc^2 3x\, dx = -\frac{1}{3}du$$

Por lo tanto,

$$\int \csc^4 3x\, dx = \int u^2 \left(-\frac{1}{3}du\right) - \frac{1}{3}\cot 3x + C = -\frac{1}{3}\int u^2 du - \frac{1}{3}\cot 3x + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{3}\cot 3x + C \boxed{= -\frac{1}{9}\cot^3 3x - \frac{1}{3}\cot 3x + C}$$

14. $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (i) del caso 6 (m es un numero entero positivo par) de integral de productos de potencia de tangente y secante. Por lo tanto,

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x\, (\sec^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x\,(\tan^2 x + 1)\sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan^8 x \sec^2 x + \tan^6 x \sec^2 x)dx$$

$$= \int \tan^8 x \sec^2 x\, dx + \int \tan^6 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^8 \sec^2 x\, dx + \int (\tan x)^6 \sec^2 x\, dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \tan x \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

Por lo tanto,

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int u^8 du + \int u^6 du = \frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C}$$

15. $\int \cot^2 3x \csc^4 3x\, dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (ii) del caso 6 (m es un numero entero positivo par) de integral de productos de potencia de cotangente y cosecante. Por lo tanto,

$$\int \cot^2 3x \csc^4 3x\, dx = \int \cot^2 3x\,(\csc^2 3x)\csc^2 3x\, dx$$

$$= \int \cot^2 3x\,(\cot^2 3x + 1)\csc^2 3x\, dx$$

$$= \int (\cot^4 3x \csc^2 3x + \cot^2 3x \csc^2 3x)dx$$

$$= \int \cot^4 3x \csc^2 3x\, dx + \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx$$

$$= \int (\cot 3x)^4 \csc^2 3x\, dx + \int (\cot 3x)^2 \csc^2 3x\, dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \cot 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = -3\csc^2 3x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \csc^2 3x\, dx = -\frac{1}{3}du$$

Por lo tanto,

$$\int \cot^2 3x \csc^4 3x\,dx = \int u^4\left(-\frac{1}{3}du\right) + \int u^2\left(-\frac{1}{3}du\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\int u^4 du - \frac{1}{3}\int u^2 du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{15}\cot^5 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C}$$

16. $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx$

Solución:

Este problema se emplea el factor (i) del caso 7 (en la que n es un numero entero positivo impar) de integral de productos de potencia de tangente y secante. Por lo tanto,

$$\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx = \int (\tan^2 x)^2(\sec^2 x)\sec x \tan x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x\,dx$$

$$= \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\sec^2 x \sec x \tan x\,dx$$

$$= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x)\sec x \tan x\,dx$$

$$= \int (\sec x)^4 \sec x \tan x\,dx - 2\int (\sec x)^4 \sec x \tan x\,dx$$

$$+ \int (\sec x)^2 \sec x \tan x\,dx$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \sec x \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec x \tan x\,dx$

Por lo tanto,

$$\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx = \int u^6 du - 2\int u^4 du + \int u^2 du = \frac{1}{7}u^7 - 2\cdot\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C}$$

17. $\int \cot^7 z \csc^4 z \, dz$

Solución:

Este problema se emplea el factor (ii) del caso 7 de integral de productos de potencia de cotangente y cosecante. Por lo tanto,

$$\int \cot^7 z \csc^4 z \, dz = \int (\cot^2 z)^3 (\csc^3 z) \csc z \cot z \, dz$$

$$= \int (\csc^2 z - 1)^3 \csc^3 z \csc z \cot z \, dz$$

$$= \int (\csc^6 z - 3\csc^4 z + 3\csc^2 z - 1) \csc^3 z \csc z \cot z \, dz$$

$$= \int (\csc^9 z - 3\csc^7 z + 3\csc^5 z - \csc^3 z) \csc z \cot z \, dz$$

$$= \int (\csc z)^9 \csc z \cot z \, dz - 3\int (\csc z)^7 \csc z \cot z \, dz$$

$$+ 3\int (\csc z)^5 \csc z \cot z \, dz - \int (\csc z)^3 \csc z \cot z \, dz$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \csc z \quad \Rightarrow \quad du = -\csc z \cot z \, dz \quad \Rightarrow \quad \csc z \cot z \, dz = -du$$

Por lo tanto,

$$\int \cot^7 z \csc^4 z \, dz = \int u^9(-du) - 3\int u^7(-du) + 3\int u^5(-du) - \int u^3(-du)$$

$$= -\int u^9 du + 3\int u^7 du - 3\int u^5 du + \int u^3 du$$

$$= -\frac{1}{10}u^{10} + 3\cdot\frac{1}{8}u^8 - 3\cdot\frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{10}\csc^{10} z + \frac{3}{8}\csc^8 z - \frac{1}{2}\csc^6 z + \frac{1}{4}\csc^4 z + C}$$

18. $\int \sec^3 \theta \, d\theta$

Solución:

Este problema corresponde al caso 8 y utilizamos la integración por partes, para lo cual debemos considerar los valores de $u = \sec^{\mathrm{n}-2} \theta$ y $dv = \sec^2 \theta \, d\theta$, es decir,

$u = \sec\theta \qquad\qquad dv = \sec^2\theta\, d\theta$

$du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta \qquad v = \int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta$

Por lo tanto,

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \int \sec\theta\sec^2\theta\, d\theta = uv - \int vdu$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta\,(\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

Se puede observar la semejanza de la integral de $\sec^3\theta$, en consecuencia:

$$\int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

Por lo tanto,

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}[\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C]$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C_1}$$

19. $\int \csc^5\theta\, d\theta$

Solución:

Este problema corresponde al caso 8 para potencias impares de cosecante y se debe emplear la técnica de integración por partes, para lo cual se debe considerar los valores de $u = \csc^{\mathrm{n}-2}\theta$ y $dv = \csc^2\theta\, d\theta$, es decir:

$u = \csc^3\theta \qquad\qquad dv = \csc^2\theta\, d\theta$

$du = -3\csc^2\theta\csc\theta\cot\theta\, d\theta \qquad v = \int \csc^2\theta\, d\theta$

$du = -3\csc^3\theta\cot\theta\, d\theta \qquad v = -\cot\theta$

Por lo tanto,

$$\int \csc^5\theta\, d\theta = \int \csc^3\theta \csc^2\theta\, d\theta = uv - \int v du$$

$$= -\csc^3\theta \cot\theta - \int -\cot\theta\,(-3\csc^3\theta\cot\theta\, d\theta)$$

$$= -\csc^3\theta \cot\theta - 3\int \cot^2\theta \csc^3\theta\, d\theta$$

$$= -\csc^3\theta \cot\theta - 3\int (\csc^2\theta - 1)\csc^3\theta\, d\theta$$

$$= -\csc^3\theta \cot\theta - 3\int \csc^5\theta\, d\theta + 3\int \csc^3\theta\, d\theta$$

Se puede observar la semejanza de la integral de $\csc^5\theta$, en consecuencia:

$$\int \csc^5\theta\, d\theta + 3\int \csc^5\theta\, d\theta = -\csc^3\theta\cot\theta + 3\int \csc^3\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\csc^3\theta\cot\theta + \frac{3}{4}\int \csc^3\theta\, d\theta$$

Y en la integral de $\csc^3\theta$ se vuelve aplicar el caso 8, para lo cual se debe considerar los valores de $u = \csc^{\mathrm{n}-2}\theta$ y $dv = \csc^2\theta\, d\theta$, es decir:

$u = \csc\theta$ $\qquad dv = \csc^2\theta\, d\theta$

$du = -\csc\theta\cot\theta\, d\theta$ $\qquad v = \int \csc^2\theta\, d\theta = -\cot\theta$

Por lo tanto,

$$\int \csc^3\theta\, d\theta = uv - \int v du = \csc\theta\,(-\cot\theta) - \int -\cot\theta\,(-\csc\theta\cot\theta) d\theta$$

$$= -\csc\theta\cot\theta - \int \cot^2\theta\csc\theta\, d\theta$$

$$= -\csc\theta\cot\theta - \int (\csc^2\theta - 1)\csc\theta\, d\theta$$

$$= -\csc\theta\cot\theta - \int \csc^3\theta\, d\theta + \int \csc\theta\, d\theta$$

$$= -\csc\theta\cot\theta + \ln(\csc\theta - \cot\theta) - \int \csc^3\theta\, d\theta$$

Podemos observar que nuevamente se tienen semejanzas de términos de la integral $\csc^3\theta$, en consecuencia,

$$\int \csc^3\theta\, d\theta + \int \csc^3\theta\, d\theta = -\csc\theta\cot\theta + \ln(\csc\theta - \cot\theta)$$

$$\int \csc^3\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta + \frac{1}{2}\ln(\csc\theta - \cot\theta)$$

Finalmente,

$$\int \csc^5\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\csc^3\theta\cot\theta + \frac{3}{4}\int \csc^3\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\csc^3\theta\cot\theta + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\csc\theta\cot\theta + \frac{1}{2}\ln(\csc\theta - \cot\theta)\right]$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\csc^3\theta\cot\theta - \frac{3}{8}\csc\theta\cot\theta + \frac{3}{8}\ln(\csc\theta - \cot\theta) + C}$$

20. $\int \sec^5\theta\, d\theta$

Solución:

Este problema corresponde al caso 8 para potencias impares de secante y se debe emplear la técnica de integración por partes, para lo cual se debe considerar los valores de $u = \sec^{\mathrm{n}-2}\theta$ y $dv = \sec^2\theta\, d\theta$, es decir:

$u = \sec^3\theta$ $\quad$ $dv = \sec^2\theta\, d\theta$

Se procede a derivar u e integrar dv:

$du = 3\sec^2\theta\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ $\quad$ $v = \int \sec^2\theta\, d\theta$

$du = 3\sec^3\theta\tan\theta\, d\theta$ $\quad$ $v = \tan\theta$

Por lo tanto,

$$\int \sec^5\theta\, d\theta = \int \sec^3\theta\sec^2\theta\, d\theta = uv - \int v du$$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - \int \tan\theta\,(3\sec^3\theta\tan\theta\, d\theta)$$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - 3\int \tan^2\theta\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - 3\int (\sec^2\theta - 1)\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \sec^3\theta\tan\theta - 3\int \sec^5\theta\, d\theta + 3\int \sec^3\theta\, d\theta$$

Se puede observar la semejanza de la integral de $\sec^5\theta$, en consecuencia:

$$\int \sec^5\theta\, d\theta + 3\int \sec^5\theta\, d\theta = \sec^3\theta\tan\theta + 3\int \sec^3\theta\, d\theta$$

$$\int \sec^5\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta + \frac{3}{4}\int \sec^3\theta\, d\theta$$

Y en la integral de $\sec^3\theta$ se vuelve aplicar el caso 8, pero ya esa integral está resuelta en el ejercicio 18 de esta sección, por lo tanto,

$$\int \sec^5\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right] + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\sec\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\ln(\sec\theta+\tan\theta) + C}$$

21. $\int \tan^2\theta\sec^3\theta\, d\theta$

Solución:

Este problema corresponde al factor (i) del caso 9 de productos de potencias tangente y secante cuando la primera y segunda potencias son par e impar, respectivamente. Después, se debe emplear la técnica de integración por partes.

$$\int \tan^2\theta\sec^3\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\sec^3\theta\, d\theta = \int \sec^5\theta\, d\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta$$

Las integrales $\sec^5\theta$ y $\sec^3\theta$ fueron resueltas en los ejercicios 20 y 18,

$$\int \tan^2\theta\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\sec\theta\tan\theta + \frac{3}{8}\ln(\sec\theta+\tan\theta)$$

$$-\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\tan\theta) + C$$

$$\int \tan^2\theta\sec^3\theta\, d\theta \boxed{= \frac{1}{4}\sec^3\theta\tan\theta - \frac{1}{8}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{8}\ln(\sec\theta+\tan\theta) + C}$$

2.3. Integración por sustitución trigonométrica.

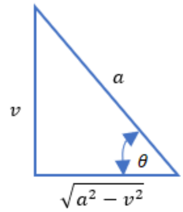
En esta sección aprenderemos integrales (tanto indefinidas como definidas) que requieren un cambio de variable mediante sustituciones trigonométricas y como pueden ser utilizadas en la simplificación de ciertas integrales. Existen tres formas de evaluar por sustitución trigonométrica, tales como: $\sqrt{a^2 - v^2}$, $\sqrt{a^2 + v^2}$ y $\sqrt{v^2 - a^2}$ en la que $a > 0$. A continuación, se describen los tres casos:

Caso 1: Integrales de expresiones que involucran $\sqrt{a^2 - v^2}$

Se establece la sustitución trigonométrica a partir de las relaciones del seno y coseno, es decir:

$$\sin\theta = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad v = a\sin\theta\,; \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 - v^2} = a\cos\theta$$



Además, que:

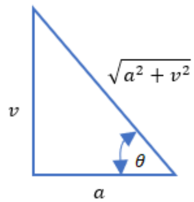
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)$$

Caso 2: Integrales de expresiones que involucran $\sqrt{a^2 + v^2}$

Se establece la sustitución trigonométrica a partir de las relaciones de tangente y secante, es decir:

$$\tan\theta = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad v = a\tan\theta\,; \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + v^2} = a\sec\theta$$



Además, que:

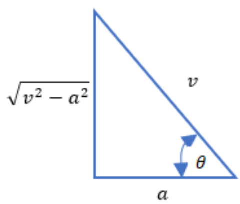
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)$$

Caso 3: Integrales de expresiones que involucran $\sqrt{v^2 - a^2}$

Se establece la sustitución trigonométrica a partir de las relaciones de secante y tangente, es decir:

$$\sec\theta = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad v = a\sec\theta\,; \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{v^2 - a^2} = a\tan\theta$$



Además, que:

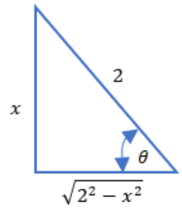
$$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)$$

A continuación, se desarrollan ejercicios de integración mediante el uso de los tres casos de integración por sustitución trigonométrica.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

Este problema corresponde al caso 1 de sustitución trigonométrica. La figura muestra el triángulo rectángulo del caso 1, en la que se identifica $v = x$ y $a = 2$. Por lo tanto,



$$x = 2\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

y,

$$\sqrt{2^2 - x^2} = 2\cos\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\sin\theta)^2(2\cos\theta)} = \int \frac{d\theta}{4\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}(-\cot\theta) + C = -\frac{1}{4}\cot\theta + C$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Finalmente,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \boxed{= -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C}$$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x}$

Solución:

Este problema es idéntico al ejercicio anterior y corresponde al caso 1 de sustitución trigonométrica. Se identifica $v = x$ y $a = 2$. Por lo tanto,

$x = 2\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\cos\theta\, d\theta$

Y,

$\sqrt{2^2 - x^2} = 2\cos\theta$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x} = \int \frac{2\cos\theta\, 2\cos\theta\, d\theta}{2\sin\theta} = 2\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta = 2\int \frac{(1-\sin^2\theta)}{\sin\theta}d\theta$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)d\theta = 2\int (\csc\theta - \sin\theta)d\theta$$

$$= 2\int \csc\theta\, d\theta - 2\int \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\ln(\csc\theta - \cot\theta) + 2\cos\theta + C$$

Del triángulo (ver figura) obtenemos las siguientes relaciones trigonométricas:

$\csc\theta = \dfrac{2}{x}$

$\cot\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x} = 2\ln\left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + 2\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

$$\boxed{= 2\ln\left(\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + \sqrt{4-x^2} + C}$$

3. $\int \sqrt{9-x^2}dx$

Solución:

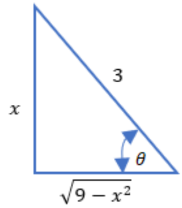
Este problema corresponde al caso 1 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo en la que se identifica $v = x$ y $a = 3$. Por lo tanto,

$x = 3\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta$

y,

$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$

Sustituyendo y simplificando, queda:



$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \int 3\cos\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta = 9\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 9\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int d\theta + \frac{9}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta + C$$

$$= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta + C$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ y del triángulo mostrado por la figura obtenemos,

$$\sin\theta = \frac{x}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \sin^{-1}\frac{x}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Finalmente,

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\cdot 2\sin\theta\cos\theta + C = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta + C$$

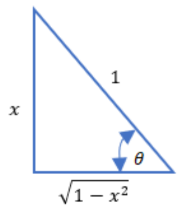
$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C$$

$$\boxed{= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C}$$

4. $\int (1-x^2)^{3/2}\, dx$

Solución:

Este problema corresponde al caso 1 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo en la que se identifica $v = x$ y $a = 1$. Por lo tanto,



$$x = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = \cos\theta\, d\theta$$

y,

$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int (1-x^2)^{3/2}\,dx = \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 dx = \int (\cos\theta)^3 \cdot \cos\theta\, d\theta = \int \cos^4\theta\, d\theta$$

Para la integración de $\cos^4\theta$ se utiliza el factor (ii) del caso 3 de integral de potencia par de coseno.

$$\begin{aligned}
\int (1-x^2)^{3/2}\,dx &= \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int d\theta + \frac{1}{4}\int 2\cos 2\theta\, d\theta + \frac{1}{4}\int \cos^2 2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{8}\int d\theta + \frac{1}{8}\int \cos 4\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{8}\theta + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\theta + C \\
&= \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta + C
\end{aligned}$$

Se utilizan las identidades trigonométricas de ángulos dobles $\sin 4\theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$, así como también, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ y del triángulo mostrado por la figura se obtienen las siguientes relaciones trigonométricas:

$\sin\theta = x \quad\quad \Rightarrow \quad\quad \theta = \sin^{-1}(x)$

$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int (1-x^2)^{3/2}dx &= \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta) + \frac{1}{32}(2\sin 2\theta\cos 2\theta) + C \\
&= \frac{3}{8}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}(x)\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\
&+ \frac{1}{16}[(2\sin\theta\cos\theta)(1-2\sin^2\theta] \\
&= \frac{3}{8}\sin^{-1}(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{8}[1-2(x)^2] + C
\end{aligned}$$

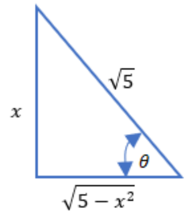
$$\int (1-x^2)^{3/2}dx = \frac{3}{8}\sin^{-1}(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{8} - \frac{2x^3\sqrt{1-x^2}}{8} + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{3}{8}\sin^{-1}(x) + \frac{5x\sqrt{1-x^2}}{8} - \frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4} + C \\ &= \frac{3}{8}\sin^{-1}(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{8}(5-2x^2) + C \end{aligned}}$$

5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{5-x^2}}$

Solución:

Este problema corresponde al caso 1 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo rectángulo que representa el caso 1, en la que se identifica $v = x$ y $a = \sqrt{5}$. Por lo tanto,



$$x = \sqrt{5}\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sqrt{5}\cos\theta\, d\theta$$

y,

$$\sqrt{5-x^2} = \sqrt{5}\cos\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{\left(\sqrt{5}\sin\theta\right)^3\sqrt{5}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5}\cos\theta} = 5\sqrt{5}\int \sin^3\theta\, d\theta$$

En la integración $\sin^3\theta$ se emplea el caso 1 de integral de potencia impar de seno (véase la solución del ejercicio 1 de la sección 2.2), en consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3dx}{\sqrt{5-x^2}} &= 5\sqrt{5}\int \sin^2\theta\sin\theta\, dx = 5\sqrt{5}\int (1-\cos^2\theta\,)\sin\theta\, d\theta \\ &= 5\sqrt{5}\int \sin\theta\, d\theta - 5\sqrt{5}\int \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \\ &= -5\sqrt{5}\cos\theta - 5\sqrt{5}\int (\cos\theta)^2\sin\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$$u = \cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad du = -\sin\theta\, d\theta$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{5-x^2}} = -5\sqrt{5}\cos\theta - 5\sqrt{5}\int (\cos\theta)^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= -5\sqrt{5}\cos\theta - 5\sqrt{5}\int u^2(-du) = -5\sqrt{5}\cos\theta + 5\sqrt{5}\int u^2 du$$

$$= -5\sqrt{5}\cos\theta + 5\sqrt{5}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C = \frac{5\sqrt{5}}{3}\cos^3\theta - 5\sqrt{5}\cos\theta + C$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}$$

Finalmente,

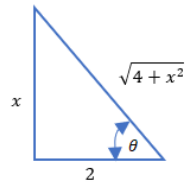
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}\left(\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}\right)^3 - 5\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$\boxed{= \frac{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3}{3} - 5\sqrt{5-x^2} + C}$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

Solución:

Este problema corresponde al caso 2 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo rectángulo que representa el caso 2, en la que se identifica $v = x$ y $a = 2$. Por lo tanto,



$$x = 2\tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\sec^2\theta \, d\theta$$

y,

$$\sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{(2\tan\theta)(2\sec\theta)} = \frac{1}{2}\int \sec\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int \sec\theta \cdot \cot\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int \csc\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\csc\theta - \cot\theta) + C$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtienen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{x}$$

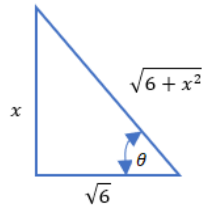
Finalmente,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} \boxed{= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} - \frac{2}{x}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}\right) + C}$$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{6+x^2}}\,dx$

Solución:

Este problema corresponde al caso 2 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo que representa el caso 2, en la que se identifica $v = x$ y $a = \sqrt{6}$. Por lo tanto,



$$x = \sqrt{6}\tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sqrt{6}\sec^2\theta\, d\theta$$

y,

$$\sqrt{6+x^2} = \sqrt{6}\sec\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6+x^2}}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{6}\tan\theta\right)^2}{\sqrt{6}\sec\theta}\sqrt{6}\sec^2\theta\, d\theta = 6\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

Aplicamos la identidad trigonométrica: $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, por lo que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6+x^2}}\,dx = 6\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = 6\int \sec^3\theta\, d\theta - 6\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= 6\int \sec^3\theta\, d\theta - 6\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

El desarrollo de $\int \sec^3\theta\, d\theta$ (véase el ejercicio 18 de la sección 2.2) corresponde al caso 8 para potencias impares de secante y usa la técnica de integración por partes, en la que se debe considerar que $u = \sec^{n-2}\theta$ y $dv = \sec^2\theta\, d\theta$, es decir:

$$u = \sec\theta \qquad\qquad dv = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta \qquad\qquad v = \int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta$$

Por lo tanto,

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \int \sec\theta\sec^2\theta\, d\theta = uv - \int v du$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta\,(\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

Se puede observar la semejanza de la integral de $\sec^3\theta$, en consecuencia:

$$\int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta)$$

Reemplazamos este resultado en la integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6+x^2}}dx = 6\int \sec^3\theta\, d\theta - 6\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta)\right] - 6\ln(\sec\theta + \tan\theta)$$
$$+ C$$

$$= 3\sec\theta\tan\theta + 3\ln(\sec\theta + \tan\theta) - 6\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

$$= 3\sec\theta\tan\theta - 3\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6+x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{6}}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{6}}$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6+x^2}}dx = 3\cdot\frac{\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{x}{\sqrt{6}} - 3\ln\left(\frac{\sqrt{6+x^2}}{\sqrt{6}}+\frac{x}{\sqrt{6}}\right)+C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{1}{2}x\sqrt{6+x^2} - 3\ln\left(\frac{\sqrt{6+x^2}+x}{\sqrt{6}}\right)+C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{6+x^2} - 3\ln\left(\sqrt{6+x^2}+x\right)+C_1 \end{aligned}}$$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{13-4x+x^2}}$

Solución:

Primero debemos convertir la integral a una forma donde la sustitución trigonométrica se puede aplicar, por lo tanto, aplicamos el método de completar cuadrados,

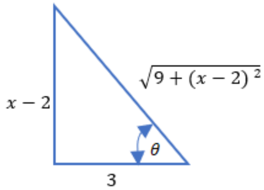
$$x^2-4x+13 = x^2-2(2)x+2^2-2^2+13 = (x-2)^2+9$$

Después la integral se resuelve aplicando el caso 2 de sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{13-4x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9+(x-2)^2}}$$

En la figura se muestra el triángulo rectángulo que representa el caso 2, en la que se identifica $v = x-2$ y $a = 3$. Por lo tanto,

$$x-2 = 3\tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad x = 3\tan\theta+2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$$



y,

$$\sqrt{9+(x-2)^2} = 3\sec\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{13-4x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9+(x-2)^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{3\sec\theta}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln(\sec\theta+\tan\theta)+C$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9+(x-2)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{9+(x-2)^2}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{x-2}{3}$$

Finalmente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{13-4x+x^2}} = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{9+(x-2)^2}}{3} + \frac{x-2}{3}\right) + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \ln\left(\frac{\sqrt{9+(x-2)^2}+x-2}{3}\right) + C \\ &= \ln\left(\sqrt{9+(x-2)^2}+x-2\right) + C_1 \end{aligned}}$$

9. $\int \frac{e^{-x}}{9e^{-2x}+1}dx$

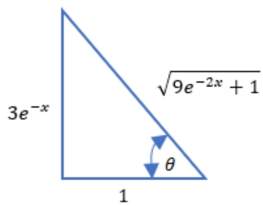
Solución:

Este ejercicio corresponde al caso 2 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo que representa el caso 2, en la que se identifica $v = 3e^{-x}$ y $a = 1$. Por lo tanto,

$$3e^{-x} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad -3e^{-x}dx = \sec^2\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad e^{-x}dx = -\frac{1}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

y,

$$\sqrt{9e^{-2x}+1} = \sec\theta \quad \Rightarrow \quad 9e^{-2x}+1 = \sec^2\theta$$



Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta} = -\frac{1}{3}\int d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\theta + C$$

De la relación trigonométrica $\tan\theta$ ya expresada se despeja θ, definida por:

$$3e^{-x} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(3e^{-x})$$

Finalmente,

$$\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)}dx \boxed{= -\frac{1}{3}\tan^{-1}(3e^{-x}) + C}$$

10. $\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}dx$

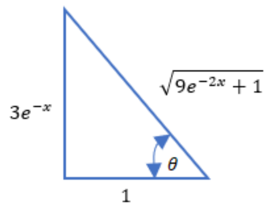
Solución:

Este ejercicio se desarrolla de manera similar al ejercicio 9 que corresponde al caso 2 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo que representa el caso 2, en la que se identifica $v = 3e^{-x}$ y $a = 1$. Por lo tanto,

$$3e^{-x} = \tan \theta \qquad \Rightarrow \qquad -3e^{-x}dx = \sec^2 \theta \, d\theta \qquad \Rightarrow \qquad e^{-x}dx = -\frac{1}{3}\sec^2 \theta \, d\theta$$

y,

$$\sqrt{9e^{-2x}+1} = \sec \theta \qquad \Rightarrow \qquad (9e^{-2x}+1)^{3/2} = \sec^3 \theta$$



Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec^3 \theta} = -\frac{1}{3}\int \frac{d\theta}{\sec \theta}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \cos \theta \, d\theta = -\frac{1}{3}\sin \theta + C$$

De la relación trigonométrica tan θ ya expresada despejamos θ, definida por:

$$\sin \theta = \frac{3e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x}+1}}$$

Finalmente,

$$\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}dx = -\frac{1}{3}\frac{3e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x}+1}} + C \boxed{= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x}+1}} + C}$$

11. $\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-7}}$

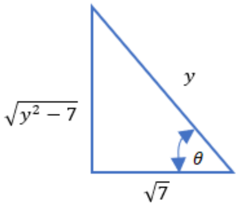
Solución:

Este problema corresponde al caso 3 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo rectángulo que representa el caso 3, en la que se identifica $v = y$ y $a = \sqrt{7}$. Por lo tanto,

$$y = \sqrt{7}\sec \theta \qquad \Rightarrow \qquad dy = \sqrt{7}\sec \theta \tan \theta \, d\theta$$

y,

$\sqrt{y^2-7}=\sqrt{7}\tan\theta$



Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-7}}=\int \frac{\sqrt{7}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(\sqrt{7}\sec\theta)(\sqrt{7}\tan\theta)}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\theta+C$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{y^2-7}}{\sqrt{7}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{y^2-7}}{\sqrt{7}}\right)$$

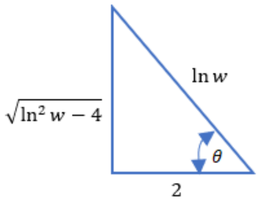
Finalmente,

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-7}}\boxed{=\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{y^2-7}}{\sqrt{7}}\right)+C}$$

12. $\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w-4}}dw$

Solución:

Este problema corresponde al caso 3 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo rectángulo que representa el caso 3, en la que se identifica $v=\ln w$ y $a=2$. Por lo tanto,



$$\ln w=2\sec\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{w}dw=2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

y,

$$\sqrt{\ln^2 w-4}=2\tan\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w-4}}dw=\int \frac{(\ln w)^3}{\sqrt{\ln^2 w-4}}\cdot\frac{1}{w}dw=\int \frac{(2\sec\theta)^3}{2\tan\theta}2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$=\int 8\sec^3\theta\sec\theta\,d\theta=8\int \sec^4\theta$$

El desarrollo de $\int \sec^4\theta\,d\theta$ (véase el ejercicio 12 de la sección 2.2) corresponde al factor (i) del caso 5 para integral de potencias pares de secante.

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x\, dx + \tan x + C$$

Se aplica el método del cambio de variable, donde:

$u = \tan x \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec^2 x\, dx$

Por lo tanto,

$$\int \sec^4 x\, dx = \int u^2 du + \tan x + C = \frac{1}{3}u^3 + \tan x + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

Reemplazamos este resultado en la integral:

$$\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}} dw = 8 \int \sec^4 \theta = 8\left(\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C\right)$$

$$= \frac{8}{3}\tan^3 x + 8\tan x + 8C$$

$$= \frac{8}{3}\tan^3 x + 8\tan x + C_1$$

Del triángulo rectángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{\ln^2 w - 4}}{2}$$

Finalmente,

$$\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}} dw = \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{\ln^2 w - 4}}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{\sqrt{\ln^2 w - 4}}{2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{\ln^2 w - 4}\right)^3 + 4\sqrt{\ln^2 w - 4} + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}\left[\left(\sqrt{\ln^2 w - 4}\right)^2 + 12\right] + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(\ln^2 w - 4 + 12) + C_1$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(\ln^2 w + 8) + C_1}$$

13. $\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$

Solución:

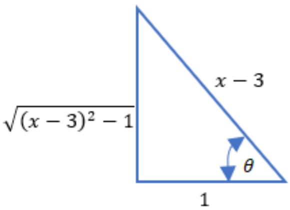
Primero convertiremos la integral a una forma donde la sustitución trigonométrica se puede aplicar completando el cuadrado, es decir, que:

$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2(3)x + 3^2 - 3^2 + 8 = (x - 3)^2 - 1$

Después la integral se resuelve aplicando el caso 2 de sustitución trigonométrica.

$$\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)^2 - 1}}$$

Este problema corresponde al caso 3 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo que representa el caso 3, en la que se identifica $v = x - 3$ y $a = 1$. Por lo tanto,



$x - 3 = \sec \theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sec \theta \tan \theta \, d\theta$

y,

$\sqrt{(x - 3)^2 - 1} = \tan \theta$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)^2 - 1}} = \int_{4}^{8} \frac{\sec \theta \tan \theta \, d\theta}{\tan \theta}$$

$$= \int_{4}^{8} \sec \theta \, d\theta = |\ln(\sec \theta + \tan \theta)|_{4}^{8}$$

Las siguientes dos relaciones trigonométricas se obtienen del triángulo rectángulo que se mostró en la figura.:

$\sec \theta = x - 3$

$\tan \theta = \sqrt{(x - 3)^2 - 1}$

Finalmente, se evalúa la integral definida:

$$\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \left|\ln\left(x - 3 + \sqrt{(x - 3)^2 - 1}\right)\right|_{4}^{8}$$

$$\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}} = \left[\ln\left(8-3+\sqrt{(8-3)^2-1}\right)\right] - \left[\ln\left(4-3+\sqrt{(4-3)^2-1}\right)\right]$$

$$= \ln\left(5+\sqrt{(5)^2-1}\right) - \ln\left(1+\sqrt{(1)^2-1}\right)$$

$$= \ln\left(5+\sqrt{24}\right) - \ln(1)$$

$$\boxed{= \ln\left(5+2\sqrt{6}\right)}$$

14. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}\,dt$

Solución:

Nuevamente en el denominador completamos cuadrados,

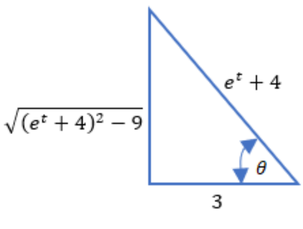
$$e^{2t}+8e^t+7 = e^{2t}+2(4)e^t+4^2-4^2+7 = (e^{2t}+8e^t+16)-9$$

$$e^{2t}+8e^t+7 = (e^t+4)^2-9$$

Después la integral se resuelve aplicando el caso 2 de sustitución trigonométrica.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}\,dt = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{\left[\sqrt{(e^t+4)^2-9}\right]^3}\,dt$$

Este problema corresponde al caso 3 de sustitución trigonométrica. En la figura se muestra el triángulo rectángulo que representa el caso 3, en la que se identifica $v = e^t+4$ y $a = 3$. Por lo tanto,



$$e^t+4 = 3\sec\theta \qquad \Rightarrow \qquad e^t dt = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

y,

$$\sqrt{(e^t+4)^2-9} = 3\tan\theta$$

Sustituyendo y simplificando, queda:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}\,dt = \int_0^{\ln 2} \frac{3\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{(3\tan\theta)^3} = \frac{1}{9}\int_0^{\ln 2} \frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan^2\theta}$$

Aplicamos las identidades trigonométricas:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad y \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}dt = \frac{1}{9}\int_0^{\ln 2} \sec\theta \cdot \frac{1}{(\tan\theta)^2} = \frac{1}{9}\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\ln 2} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

Ahora se realiza un cambio de variable,

$$u = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad du = \cos\theta\, d\theta$$

Sustituyendo el cambio de variable,

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}dt = \frac{1}{9}\int_0^{\ln 2} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{9}\int_0^{\ln 2} u^{-2}du = -\frac{1}{9}\left|\frac{1}{u}\right|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{9}\left|\frac{1}{\sin\theta}\right|_0^{\ln 2}$$

Del triángulo mostrado por la figura se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$\sin\ \theta = \frac{\sqrt{(e^t+4)^2-9}}{e^t+4}$$

Finalmente, se evalúa la integral definida:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}dt = -\frac{1}{9}\left|\frac{e^t+4}{\sqrt{(e^t+4)^2-9}}\right|_0^{\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{9}\left\{\left[\frac{e^{\ln 2}+4}{\sqrt{(e^{\ln 2}+4)^2-9}}\right]-\left[\frac{e^0+4}{\sqrt{(e^0+4)^2-9}}\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{9}\left\{\left[\frac{2+4}{\sqrt{(2+4)^2-9}}\right]-\left[\frac{1+4}{\sqrt{(1+4)^2-9}}\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{9}\left\{\left[\frac{6}{\sqrt{27}}\right]-\left[\frac{5}{\sqrt{16}}\right]\right\} = \frac{1}{9}\left\{\frac{5}{4}-\frac{6}{3\sqrt{3}}\right\}$$

$$\boxed{= \frac{5}{36}-\frac{6}{27\sqrt{3}} \approx 0.010588}$$

2.4. Integración por fracciones parciales.

El método de integración por fracciones parciales consiste en descomponer y luego poder realizar la operación de síntesis de una fracción racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ que contiene términos complejos en el denominador $Q(x)$. Por medio de fracciones parciales, es posible calcular y descomponer la expresión en términos más sencillos para poder fácilmente integrar o calcular la expresión así obtenida. Así pues, el principio básico de la integración por fracciones parciales consiste en factorizar el denominador y después descomponerlo en dos fracciones diferentes donde los denominadores son los factores respectivamente y el numerador se calcula convenientemente. Los pasos necesarios para descomponer una fracción algebraica en sus fracciones parciales resultan de la consideración del proceso inverso: la suma (o la resta). Considere la siguiente suma de fracciones algebraicas:

$$\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{(x-3)+3(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{4x-9}{(x-2)(x-3)}$$

El propósito de esta sección es realizar lo inverso, es decir, que a partir de,

$$\frac{4x-9}{(x-2)(x-3)}$$

tratar de encontrar las fracciones cuya suma da este resultado, luego las dos fracciones obtenidas, es decir,

$$\frac{1}{x-2} \quad y \quad \frac{3}{x-3}$$

denominadas “fracciones parciales” de

$$\frac{4x-9}{(x-2)(x-3)}$$

Las fracciones son descompuestas en fracciones parciales debido a que:

- hace que determinadas integrales resulten mucho más fáciles de resolver, y
- también se utiliza en la transformada de Laplace, que se estudiará en ecuaciones diferenciales.

Entonces, por ejemplo, si necesitáramos integrar la denominada “fracción parcial”, se podría simplificar la integral de la siguiente manera:

$$\int \frac{4x-9}{(x-2)(x-3)}dx=\int \frac{1}{x-2}dx+\int \frac{3}{x-3}dx$$

Para evaluar las dos integrales se recomienda revisar el ejercicio 7 de la sección 1.3 del capítulo 1.

$$\int \frac{4x-9}{(x-2)(x-3)}dx=\ln(x-2)+3\ln(x-3)+C$$

$$=\ln(x-2)+\ln(x-3)^3+C=\ln[(x-2)(x-3)^3]+C$$

El proceso:

1. Si el grado de P(x) es mayor o igual que el grado de Q(x), entonces tenemos que utilizar la división larga para encontrar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

   lo que resulta en que el grado del resto $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

2. Para descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ o $\frac{R(x)}{Q(x)}$ (en caso de haber hecho la división larga), primero factorizamos $Q(x)$.

3. A continuación, se debe usar las distintas formas de integración por fracciones parciales y los distintos métodos.
   - **Caso 1: Fracciones algebraicas con dos factores lineales**: Por cada factor lineal no repetido $(x \pm a)$ y $(x \pm b)$ en $Q(x)$, se define la fracción parcial como:

$$\frac{A}{x \pm a} + \frac{B}{x \pm b}$$

   - **Caso 2: Fracciones algebraicas con factor lineal repetido**: Por cada factor lineal repetido $(x \pm a)^n$ y $(x \pm b)$ en $Q(x)$, se define la fracción parcial como:

$$\frac{A}{(x \pm a)} + \frac{B}{(x \pm a)^2} + \cdots + \frac{Y}{(x \pm a)^n} + \frac{Z}{x \pm b}$$

   - **Caso 3: Fracciones algebraicas con factor cuadrático:** Por cada factor cuadrático $x^2 + bx + c$, se define la fracción parcial como:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

   - **Caso 4: Fracciones algebraicas con factores cuadráticos repetidos:** Por cada factor cuadrático repetido $(x^2 + bx + c)^n$, se define la fracción parcial como:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{Yx + Z}{(x^2 + bx + c)^n}$$

Finalmente, se integran los términos resultantes. Los factores lineales dan logaritmos. La sustitución o la sustitución trigonométrica normalmente se encargarán de los otros factores. A continuación, se presentan ejercicios resueltos de los cuatro casos de la integración por fracciones parciales.

1. $\int \frac{1}{x(x-2)}dx$

Solución:

Primero evaluamos la fracción parcial mediante tres métodos del caso de factores lineales,

$$\frac{1}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}$$

Método 1: combinando los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{x(x-2)}=\frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$1=A(x-2)+Bx$$

$$1=Ax-2A+Bx$$

$$0x+1=x(A+B)-2A$$

Igualamos los coeficientes de potencias iguales:

$$1=-2A \qquad \Rightarrow \qquad A=-\frac{1}{2}$$

$$0=A+B \qquad \Rightarrow \qquad B=\frac{1}{2}$$

Método 2: nuevamente combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{x(x-2)}=\frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$1=A(x-2)+Bx$$

Mediante asignación de valores de x se obtienen A y B, es decir,

Si $x=0$: $1=A(-2)+B(0) \qquad \Rightarrow \qquad A=-\frac{1}{2}$

Si $x=2$: $1=A(0)+B(2) \qquad \Rightarrow \qquad B=\frac{1}{2}$

Método 3: conocido como método de encubrimiento

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

Para encontrar A y B se aplica:

$$A = \left.\frac{1}{x-2}\right|_{x=0} = \frac{1}{0-2} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{2}$$

$$B = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{2}$$

Como se puede observar, el desarrollo de la fracción parcial mediante los tres métodos explicados da siempre el mismo resultado. En el resto de los ejercicios de esta sección se va a utilizar cualquier método y se recomienda al lector resolver los ejercicios con cualesquiera de los métodos no empleados en la resolución de los ejercicios.

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{-1/2}{x} + \frac{1/2}{x-2}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{1}{x(x-2)}dx = \int \frac{-1/2}{x}dx + \int \frac{1/2}{x-2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-2) + C$$

Finalmente, aplicando propiedad de logaritmo natural: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$\int \frac{1}{x(x-2)}dx = \frac{1}{2}[\ln(x-2) - \ln x] + C = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) + C}$$

2. $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$

Solución:

Método 2: Primero factorizamos el denominador y combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$5x - 1 = A(x+1) + B(x-1)$$

Mediante asignación de valores de x se obtienen A y B, es decir,

Si $x = 1$: $5(1) - 1 = A(2) + B(0) \qquad \Rightarrow \qquad A = 2$

Si $x = -1$: $5(-1) - 1 = A(0) + B(-2) \qquad \Rightarrow \qquad B = 3$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{x+1}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= 2\ln(x-1) + 3\ln(x+1) + C \\ &= \ln(x-1)^2 + \ln(x+1)^3 + C = \ln[(x-1)^2(x+1)^3] + C \end{aligned}}$$

3. $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2-x}dx$

Solución:

Método 2: Primero factorizamos el denominador y combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{x+2}{2x^2-x} = \frac{x+2}{x(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + Bx}{x(2x-1)}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$x + 2 = A(2x-1) + Bx$$

Mediante asignación de valores de x se obtienen A y B, es decir,

Si $x = 0$: $0 + 2 = A(-1) + B(0) \qquad \Rightarrow \qquad A = -2$

Si $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} + 2 = A(0) + B\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad B = 5$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{x+2}{2x^2-x} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{2x-1}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x+2}{2x^2-x}dx = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{5}{2x-1}dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{2x-1} = -2\ln x + 5\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$$

$$\boxed{= -2\ln x + \frac{5}{2}\ln(2x-1) + C}$$

4. $\displaystyle\int \frac{4x-11}{2x^2+7x-4}dx$

Solución:

Método 2: Primero factorizamos el denominador y combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{4x-11}{2x^2+7x-4} = \frac{4x-11}{(2x-1)(x+4)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+4)}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$4x-11 = A(x+4) + B(2x-1)$

Mediante asignación de valores de x se obtienen A y B, es decir,

Si $x = \frac{1}{2}$: $2 - 11 = A\left(\frac{1}{2}+4\right) + B(0) \quad \Rightarrow \quad A = -2$

Si $x = -4$: $4(-4) - 11 = A(0) + B(7) \quad \Rightarrow \quad B = 5$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{x+2}{2x^2-x} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{2x-1}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x+2}{2x^2-x}dx = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{5}{2x-1}dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{2x-1} = -2\ln x + 5\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$$

$$\boxed{= -2\ln x + \frac{5}{2}\ln(2x-1) + C}$$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2(x+1)}dx$

Solución:

Método 2: Este caso corresponde a factores lineales repetidos, después combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{1}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x+1)}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$1 = A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2$$

Mediante asignación de valores de x se obtienen A, B y C, es decir,

Si $x = -2$: $1 = A(0) + B(-1) + C(0)^2 \quad \Rightarrow \quad B = -1$

Si $x = -1$: $1 = A(0) + B(0) + C(1)^2 \quad \Rightarrow \quad C = 1$

Si $x = 0$: $1 = A(2)(1) + (-1)(1) + (1)(2)^2 \quad \Rightarrow \quad A = -1$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{1}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{1}{(x+2)^2(x+1)}dx = \int \frac{-1}{x+2}dx + \int \frac{-1}{(x+2)^2}dx + \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= -\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\ln(x+2) - \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + \ln(x+1) + C$$

$$\boxed{= -\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + \ln(x+1) + C}$$

6. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}dx$

Solución:

Método 2: Este caso corresponde a factores lineales repetidos, después combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{2x-1}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

$$\frac{2x-1}{(x+1)^3}=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$2x-1=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

Mediante asignación de valores de x se obtienen A, B y C, es decir,

Si $x=-1$: $-3=A(0)^2+B(0)+C \quad \Rightarrow \quad C=-3$

Si $x=0$: $-1=A(1)^2+B(1)+(-3) \quad \Rightarrow \quad A+B=2 \quad (1)$

Si $x=1$: $1=A(2)^2+B(2)+(-3) \quad \Rightarrow \quad 2A+B=2 \quad (2)$

Restamos la ecuación (2) de (1):

$$\begin{array}{l} 2A+B=2 \\ \underline{-A-B=-2} \\ A \quad // = \ 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=0$$

De (1): $B=2-A \quad \Rightarrow \quad B=2$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{2x-1}{(x+1)^3}=\frac{0}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{-3}{(x+1)^3}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}dx=\int \frac{2}{(x+1)^2}dx+\int \frac{-3}{(x+1)^3}dx=2\int \frac{dx}{(x+1)^2}-3\int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$=2\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1}-3\cdot\frac{(x+1)^{-2}}{-2}+C\boxed{=-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2(x+1)^2}+C}$$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+6x+5)^2}dx$

Solución:

Método 3: Este caso corresponde a factores lineales repetidos usando el método del encubrimiento, primero factorizamos el denominaros y después combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{(x^2+6x+5)^2}=\frac{1}{[(x+1)(x+5)]^2}=\frac{1}{(x+1)^2(x+5)^2}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+5)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+5}+\frac{D}{(x+5)^2}$$

Aplicando el método del encubrimiento para los factores lineales de potencia mayor:

$$B=\left.\frac{1}{(x+5)^2}\right|_{x=-1}=\frac{1}{(-1+5)^2} \qquad \Rightarrow \qquad B=\frac{1}{16}$$

$$D=\left.\frac{1}{(x+1)^2}\right|_{x=-5}=\frac{1}{(-5+1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad D=\frac{1}{16}$$

Para obtener A y C del método de encubrimiento derivamos las expresiones de A y B:

$$A=\left.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+5)^2}\right]\right|_{x=-1}=\left.\frac{-2}{(x+5)^3}\right|_{x=-1}=\left.\frac{-2}{(-1+5)^3}\right|_{x=-1} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{32}$$

$$C=\left.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]\right|_{x=-5}=\left.\frac{-2}{(x+1)^3}\right|_{x=-5}=\left.\frac{-2}{(-5+1)^3}\right|_{x=-5} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{1}{32}$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{1}{(x^2+6x+5)^2}=\frac{-1/32}{x+1}+\frac{1/16}{(x+1)^2}+\frac{1/32}{x+5}+\frac{1/16}{(x+5)^2}$$

En consecuencia,

$$\int\frac{1}{(x^2+6x+5)^2}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2(x+5)^2}dx$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{32}dx}{x+1}+\int\frac{\frac{1}{16}dx}{(x+1)^2}+\int\frac{\frac{1}{32}dx}{x+5}+\int\frac{\frac{1}{16}dx}{(x+5)^2}$$

$$=-\frac{1}{32}\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{16}+\frac{1}{32}\ln|x+5|-\frac{(x+5)^{-1}}{16}+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x+5}{x+1}\right|-\frac{1}{16(x+1)}-\frac{1}{16(x+5)}+C}$$

8. $\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}dx$

Solución:

Método 3: Este caso corresponde a factores lineales repetidos usando el método del encubrimiento, primero factorizamos el denominaros y después combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)} = \frac{1}{(x-3)(x+2)(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)} = \frac{1}{(x-4)(x-3)(x+2)^2}$$

$$\frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Aplicando el método del encubrimiento para los factores lineales de potencia mayor:

$$A = \left.\frac{1}{(x-3)(x+2)^2}\right|_{x=4} = \frac{1}{(1)(36)} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{36}$$

$$B = \left.\frac{1}{(x-4)(x+2)^2}\right|_{x=3} = \frac{1}{(-1)(25)} \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{1}{25}$$

$$D = \left.\frac{1}{(x-4)(x-3)}\right|_{x=-2} = \frac{1}{(-6)(-5)} \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{1}{30}$$

Se aplica la derivación de D para obtener C del método de encubrimiento:

$$C = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x-4)(x-3)}\right]\Bigg|_{x=-2} = \left.\frac{-2x+7}{(x-4)^2(x-3)^2}\right|_{x=-2} = \left.\frac{11}{(-6)^2(-5)^2}\right|_{x=-2}$$

$$C = \frac{11}{900}$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{1}{(x-4)(x-3)(x+2)^2} = \frac{1/36}{x-4} + \frac{-1/25}{x-3} + \frac{11/900}{x+2} + \frac{1/30}{(x+2)^2}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}dx = \int \frac{1}{(x-4)(x-3)(x+2)^2}dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{36}dx}{x-4} + \int \frac{-\frac{1}{25}dx}{x-3} + \int \frac{\frac{11}{900}dx}{x+2} + \int \frac{\frac{1}{30}dx}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{36}\ln|x-4| - \frac{1}{25}\ln|x-3| + \frac{11}{900}\ln|x+2| - \frac{1}{30(x+2)} + C}$$

9. $\int \frac{dv}{v^2(v-1)^2}$

Solución:

Este caso corresponde a factores lineales repetidos y se emplean los métodos 2 y 3 para que el lector compare y decida el mejor método en la solución de problemas de integración por fracciones parciales. Primero se descompone la fracción algebraica de la integral en fracciones parciales,

$$\frac{1}{v^2(v-1)^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v-1} + \frac{D}{(v-1)^2}$$

Método 2: combinando los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{1}{v^2(v-1)^2} = \frac{Av(v-1)^2 + B(v-1)^2 + Cv^2(v-1) + Dv^2}{v^2(v-1)^2}$$

Ya que los denominadores son iguales se simplifican, por lo tanto:

$$1 = Av(v-1)^2 + B(v-1)^2 + Cv^2(v-1) + Dv^2$$

Mediante asignación de valores de v se obtienen A, B, C y D, es decir,

Si $x = 0$: $1 = A(0) + B(-1)^2 + C(0) + D(0) \quad \Rightarrow \quad B = 1$

Si $x = 1$: $1 = A(0) + B(0) + \mathrm{C}(0) + \mathrm{D}(1)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D} = 1$

Si $x = -1$: $1 = A(-1)(-2)^2 + B(-2)^2 + \mathrm{C}(-1)^2(-2) + \mathrm{D}(-1)^2$

$$1 = -4\mathrm{A} + (1)(4) - 2\mathrm{C} + (1)(1) \quad \Rightarrow \quad 2A + C = 2 \qquad (1)$$

Si $x = 2$: $1 = A(2)(1)^2 + B(1)^2 + \mathrm{C}(2)^2(1) + \mathrm{D}(2)^2$

$$1 = 2\mathrm{A} + (1)(1) + 4\mathrm{C} + (1)(4) \quad \Rightarrow \quad -2A - 4C = 4 \quad (2)$$

Sumamos las ecuaciones (1) de (2):

$$2A + C = 2$$

$$\underline{-2A - 4C = 4}$$

$$// \quad -3C = 6 \qquad \Rightarrow \qquad C = -2$$

De (1): $A = 1 - 0.5C = 1 - 0.5(-2) \qquad \Rightarrow \qquad A = 2$

Método 3: Para obtener las constantes B y D se aplica el método del encubrimiento para los factores lineales de potencia mayor, por lo tanto,

$$B = \left.\frac{1}{(v-1)^2}\right|_{v=0} = \frac{1}{(-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad B = 1$$

$$D = \left.\frac{1}{v^2}\right|_{v=1} = \frac{1}{1^2} \qquad \Rightarrow \qquad D = 1$$

Se aplica la derivación de B y D para obtener las constantes A y C del método de encubrimiento:

$$A = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(v-1)^2}\right]\Bigg|_{v=0} = \left.\frac{-2}{(v-1)^3}\right|_{v=0} = \frac{-2}{(-1)^3} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{A} = 2$$

$$C = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{v^2}\right]\Bigg|_{v=1} = \frac{-2}{v^3}\Bigg\|_{v=1} = \frac{-2}{1^3} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{C} = -2$$

Al comparar los métodos 2 y 3 se puede observar que los valores de las constantes son los mismos, entonces, el método 3 sería el más adecuado. La descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{1}{v^2(v-1)^2} = \frac{2}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{-2}{v-1} + \frac{1}{(v-1)^2}$$

Finalmente,

$$\int \frac{dv}{v^2(v-1)^2} = \int \frac{2}{v}dv + \int \frac{1}{v^2}dv - \int \frac{2dv}{v-1} + \int \frac{dv}{(v-1)^2}$$

$$= 2\int \frac{dv}{v}dv + \int v^{-2}dv - 2\int \frac{dv}{v-1} + \int \frac{dv}{(v-1)^2}$$

$$= 2\ln|v| + \frac{v^{-1}}{-1} - 2\ln|v-1| + \frac{(v-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{= 2\ln|v| - \frac{1}{v} - 2\ln|v-1| - \frac{1}{v-1} + C}$$

10. $\displaystyle\int \frac{10}{(s-1)(s^2+9)}ds$

Solución:

Esta integral corresponde a la combinación de factores lineales y cuadráticos. Primero se descompone la fracción algebraica de la integral en fracciones parciales,

$$\frac{10}{(s-1)(s^2+9)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

Método 2: combinando los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{10}{(s-1)(s^2+9)} = \frac{A(s^2+9)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+9)}$$

$$10 = A(s^2+9)+(Bs+C)(s-1)$$

Mediante asignación de valores de s se obtienen A, B, y C, es decir,

Si $s = 1$: $10 = A(10) + (B + C)(0) \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$

Si $s = 0$: $10 = A(9) + (B \cdot 0 + C)(-1)$

$$10 = (1)(9) + \mathrm{C}(-1) \qquad \Rightarrow \qquad C = -1$$

Si $s = -1$: $10 = A[(-1)^2 + 9] + [B(-1) + C](-2)$

$$10 = (1)(10) + (-\mathrm{B} - 1)(-2)$$

$$10 = 10 + 2\mathrm{B} + 2 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{B} = -1$$

La descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{10}{(s-1)(s^2+9)} = \frac{1}{s-1} + \frac{(-1)s+(-1)}{s^2+9}$$

Finalmente,

$$\int \frac{10}{(s-1)(s^2+9)}ds = \int \frac{1}{s-1}ds + \int \frac{-s-1}{s^2+9}ds$$

$$= \int \frac{ds}{s-1} - \int \frac{sds}{s^2+9} - \int \frac{ds}{s^2+9}$$

En la primera y segunda integrales se aplica cambio de variable, y en la tercera integral se utiliza el Teorema 1.12 del capítulo 1. En consecuencia,

$$u = s - 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = ds$$

$$v = s^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad dv = 2sds \quad \Rightarrow \quad sds = \frac{1}{2}dv$$

Finalmente,

$$\int \frac{10}{(s-1)(s^2+9)}ds = \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \int \frac{ds}{s^2+9}$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|v| - \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3} + C$$

$$\boxed{= \ln|s-1| - \frac{1}{2}\ln|s^2+9| - \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{s}{3} + C}$$

11. $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

Solución:

Esta integral corresponde a la combinación de factores lineales repetidos y cuadráticos. Primero se descompone la fracción algebraica de la integral en fracciones parciales,

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Método 2: combinando los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$x = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2$$

Mediante asignación de valores de x se obtiene de manera inmediata B, mientras que A, C y D, se resuelve utilizando la regla de Cramer,

Si $x = -1$: $\quad -1 = A(0)(2) + B(2) + [C(-1) + D](0)$

$$-1 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

Si $x = 0$: $\quad 0 = A(1)(1) + \mathrm{B}(1) + (C \cdot 0 + D)(1)^2$

$$0 = \mathrm{A} - \frac{1}{2}(1) + D \quad \Rightarrow \quad 2A + 2D = 1 \quad (1)$$

Si $x = 1$: $\quad 1 = A(2)(2) + \mathrm{B}(2) + (C \cdot 1 + D)(2)^2$

$$1 = 4\mathrm{A} - \frac{1}{2}(2) + 4\mathrm{C} + 4\mathrm{D} \qquad \Rightarrow \qquad 2A + 2C + 2D = 1 \qquad (2)$$

Si $x = 2$: $\qquad 2 = A(3)(5) + \mathrm{B}(5) + (C \cdot 2 + D)(3)^2$

$$2 = 15\mathrm{A} - \frac{1}{2}(5) + 18\mathrm{C} + 9\mathrm{D} \quad \Rightarrow \; 10A + 12C + 6D = 3 \qquad (3)$$

A continuación, se representa el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 2A + 0C + 2D = 1 \\ 2A + 2C + 2D = 1 \\ 10A + 12C + 6D = 3 \end{cases}$$

Aplicando Cramer se obtiene la constante D y después se reemplaza en las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 10 & 12 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 10 & 12 & 6 & 10 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{12 + 0 + 24 - 20 - 24 - 0}{24 + 0 + 48 - 40 - 48}$$

$$D = \frac{1}{2}$$

De la ecuación (1):

$$2A = 1 - 2D \qquad \Rightarrow \qquad 2A = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{A} = 0$$

De la ecuación (2):

$$2C = 1 - 2A - 2D \qquad \Rightarrow \qquad 2C = 1 - 2(0) - 2\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

La descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{0}{x+1} + \frac{-1/2}{(x+1)^2} + \frac{0 \cdot x + 1/2}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

Finalmente,

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

En la primera integral se aplica un segundo cambio de variable y en la segunda se utiliza el teorema 1.12.

$$v = x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = dx$$

Finalmente,

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C = -\frac{1}{2}\frac{v^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

$$= \frac{1}{2v} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C \boxed{= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C}$$

12. $\int \frac{\sec^2\theta\,(\sec^2\theta + 1)}{\tan^3\theta + 1}d\theta$

Solución:

Este tipo de integral se resuelve aplicando primero un cambio de variable, y posterior se descompone mediante fracciones parciales.

$v = \tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad dv = \sec^2\theta\, d\theta$

Recordemos la identidad trigonométrica $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, y sustituyendo en la integral, se obtiene:

$$\int \frac{\sec^2\theta\,(\sec^2\theta+1)}{\tan^3\theta+1}d\theta = \int \frac{(\tan^2\theta+1+1)\sec^2\theta\,d\theta}{\tan^3\theta+1} = \int \frac{(v^2+2)}{v^3+1}dv$$

Factorizando el denominador, se descompone la fracción algebraica en una fracción parcial,

$$\frac{v^2+2}{v^3+1} = \frac{v^2+2}{(v+1)(v^2-v+1)} = \frac{A}{v+1} + \frac{Bx+C}{v^2-v+1}$$

Se utiliza el método 2 de fracciones parciales, combinamos los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{v^2+2}{(v+1)(v^2-v+1)} = \frac{A(v^2-v+1)+(Bx+C)(v+1)}{(v+1)(v^2-v+1)}$$

$$v^2+2 = A(v^2-v+1)+(Bx+C)(v+1)$$

Mediante asignación de valores de v se obtiene de manera inmediata A, mientras que B y C, se resuelve mediante sustitución,

Si $v=-1$: $\quad (-1)^2+2 = A[(-1)^2-(-1)+1]+[B(-1)+C](0)$

$$3 = 3A \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$$

De la expresión $v^2+2 = A(v^2-v+1)+(Bx+C)(v+1)$, se sustituye $A=1$ y se obtiene,

$v^2 + 2 = v^2 - v + 1 + (Bx + C)(v + 1)$

$v + 1 = (Bx + C)(v + 1) \qquad \Rightarrow \qquad Bx + C = 1$

Entonces la integral queda,

$$\int \frac{\sec^2\theta\,(\sec^2\theta + 1)}{\tan^3\theta + 1}\,d\theta = \int \frac{A}{v+1}\,dv + \int \frac{Bx + C}{v^2 - v + 1}\,dv$$

$$= \int \frac{1}{v+1}\,dv + \int \frac{1}{v^2 - v + 1}\,dv$$

En la primera integral se aplica un segundo cambio de variable y en la segunda se completa cuadrado para utilizar el teorema 1.12.

$u = v + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = dv$

$$v^2 - v + 1 = \left(v^2 - v + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{\sec^2\theta\,(\sec^2\theta + 1)}{\tan^3\theta + 1}\,d\theta = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \ln u + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{v - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= \ln|v + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2v - 1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= \ln|v + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Finalmente, se sustituye el primer cambio de variable

$$\int \frac{\sec^2\theta\,(\sec^2\theta + 1)}{\tan^3\theta + 1}\,d\theta \boxed{= \ln|\tan\theta + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta - 1}{\sqrt{3}}\right) + C}$$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 29x + 5}{(x - 4)^2(x^2 + 3)}\,dx$

Solución:

Similar al ejercicio 11, se trata una combinación de factores lineales repetidos y cuadráticos. Se descompone la fracción algebraica de la integral en fracciones parciales,

$$\frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Método 2: combinando los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}=\frac{A(x-4)(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)(x-4)^2}{(x-4)^2(x^2+3)}$$

$$x^2-29x+5=A(x-4)(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)(x-4)^2$$

Mediante asignación de valores de x se obtiene B, mientras que A, C y D, se resuelve utilizando la regla de Cramer,

Si $x=4$: $4^2-29(4)+5=A(0)(19)+B(19)+[C(4)+D](0)^2$

$$-95=19B \qquad \Rightarrow \qquad B=-5$$

Si $x=0$: $5=A(-4)(3)+(-5)(3)+(C\cdot 0+D)(-4)^2$

$$5=-12A-15+16D \qquad \Rightarrow \qquad -6A+8D=10 \qquad (1)$$

Si $x=1$: $1^2-29(1)+5=A(-3)(4)+(-5)(4)+[C(1)+D](-3)^2$

$$-23=-12A-20+9C+9D \quad \Rightarrow \quad -4A+3C+3D=-1 \quad (2)$$

Si $x=-1$: $(-1)^2-29(-1)+5=A(-5)(4)+(-5)(4)+[C(-1)+D](-5)^2$

$$35=-20A-20-25C+25D \quad \Rightarrow \quad -4A-5C+5D=11 \quad (3)$$

A continuación, se presenta el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases}-6A+0C+8D=10\\-4A+3C+3D=-1\\-4A-5C+5D=11\end{cases}$$

Aplicando Cramer se obtiene la constante D y después se reemplaza en las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$D=\frac{\begin{vmatrix}-6&0&10\\-4&3&-1\\-4&-5&11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-6&0&8\\-4&3&3\\-4&-5&5\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-6&0&10&-6&0\\-4&3&-1&-4&3\\-4&-5&11&-4&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-6&0&8&-6&0\\-4&3&3&-4&3\\-4&-5&5&-4&-5\end{vmatrix}}$$

$$D = \frac{-198 + 0 + 200 + 120 + 30 + 0}{-90 + 0 + 160 + 96 - 90 + 0} = \frac{152}{76}$$

$$D = 2$$

De la ecuación (1):

$$6A = 8D - 10 \quad \Rightarrow \quad 6A = 8(2) - 10 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} = 1$$

De la ecuación (2):

$$3C = 4A - 3D - 1 \quad \Rightarrow \quad 3C = 4(1) - 3(2) - 1 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

La descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+3} = \frac{1}{x-4} + \frac{-5}{(x-4)^2} + \frac{-x+2}{x^2+3}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x-4} dx + \int \frac{-5}{(x-4)^2} dx + \int \frac{2-x}{x^2+3} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-4} - 5\int \frac{dx}{(x-4)^2} + 2\int \frac{dx}{x^2+3} - \int \frac{x}{x^2+3} dx$$

En la primera, segunda y última integral se aplica un cambio de variable, en la tercera integral se utiliza el teorema 1.12, en consecuencia,

$$v = x - 4 \quad \Rightarrow \quad dv = dx$$

$$u = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \quad xdx = \frac{1}{2} du$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx = \int \frac{dv}{v} - 5\int \frac{dv}{v^2} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|v| - 5 \cdot \frac{v^{-1}}{-1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$\boxed{= \ln|x-4| + \frac{5}{x-4} + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C}$$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx$

Solución:

Este ejercicio trata de una fracción algebraica que contiene un factor lineal y factores cuadráticos repetidos. Se descompone la fracción algebraica de la integral en fracciones parciales,

$$\frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

Método 2: combinando los términos de los miembros del lado derecho de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}=\frac{A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+4)+(Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)^2}$$

$$x^3+10x^2+3x+36=A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+4)+(Dx+E)(x-1)$$

Mediante asignación de valores de x se obtiene A, mientras que B, C, D y E, se resuelve utilizando la regla de Cramer,

Si $x=1$: $\quad 1^3+10(1)^2+3(1)+36=A(5)^2+(B+C)(0)(5)+[D+E](0)^2$

$$50=25A \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A=2}$$

Si $x=0$: $\quad 36=(2)(4)^2+(B\cdot 0+C)(-1)(4)+(D\cdot 0+E)(-1)$

$$36=32-4C-E \qquad \Rightarrow \qquad -4C-E=4 \qquad (1)$$

Si $x=-1$: $\quad 42=(2)(5)^2+[B(-1)+C](-2)(5)+[D(-1)+E](-2)$

$$-8=10B-10C+2D-2E \quad \Rightarrow \quad 5B-5C+D-E=-4 \quad (2)$$

Si $x=2$: $\quad 90=(2)(8)^2+[B\cdot 2+C](1)(8)+[D\cdot 2+E](1)$

$$16B+8C+2D+E=-38 \qquad (3)$$

Si $x=-2$: $\quad 62=(2)(8)^2+[B(-2)+C](-3)(8)+[D(-2)+E](-3)$

$$-66=48B-24C+6D-3E \quad \Rightarrow \quad 16B-8C+2D-E=-22 \quad (4)$$

A continuación, se presenta el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 0B-4C+0D-E=4 \\ 5B-5C+D-E=-4 \\ 16B+8C+2D+E=-38 \\ 16B-8C+2D-E=-22 \end{cases}$$

Aplicando Cramer se obtienen las constantes E y B, para después reemplazarlas en las ecuaciones (1), y (2) y obtener las constantes C y D.

$$E=\frac{\begin{vmatrix}0&-4&0&4\\5&-5&1&-4\\16&8&2&-38\\16&-8&2&-22\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&-4&0&-1\\5&-5&1&-1\\16&8&2&1\\16&-8&2&-1\end{vmatrix}}=\frac{-(-4)\begin{vmatrix}5&1&-4\\16&2&-38\\16&2&-22\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5&-5&1\\16&8&2\\16&-8&2\end{vmatrix}}{-(-4)\begin{vmatrix}5&1&-1\\16&2&1\\16&2&-1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}5&-5&1\\16&8&2\\16&-8&2\end{vmatrix}}$$

$$E=\frac{-(-4)\begin{vmatrix}5&1&-4&5&1\\16&2&-38&16&2\\16&2&-22&16&2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5&-5&1&5&-5\\16&8&2&16&8\\16&-8&2&16&-8\end{vmatrix}}{-(-4)\begin{vmatrix}5&1&-1&5&1\\16&2&1&16&2\\16&2&-1&16&2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}5&-5&1&5&-5\\16&8&2&16&8\\16&-8&2&16&-8\end{vmatrix}}$$

$$E=\frac{\begin{gathered}4[-220-608-128-(-128-380-352)]-\\4[80-160-128-(128-80-160)]\end{gathered}}{\begin{gathered}4[-10+16-32-(-32+10-16)]+\\ [80-160-128-(128-80-160)]\end{gathered}}$$

$$E=\frac{4[-956+860]-4[-208+112]}{4[-26+38]+[-208+112]}=\frac{-384+384}{48-96}=\frac{0}{-48}$$

$$\boxed{E=0}$$

$$B=\frac{\begin{vmatrix}4&-4&0&-1\\-4&-5&1&-1\\-38&8&2&1\\-22&-8&2&-1\end{vmatrix}}{-48}$$

$$B=\frac{4\begin{vmatrix}-5&1&-1\\8&2&1\\-8&2&-1\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}-4&1&-1\\-38&2&1\\-22&2&-1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-4&-5&1\\-38&8&2\\-22&-8&2\end{vmatrix}}{-48}$$

$$B=\frac{4\begin{vmatrix}-5&1&-1\\8&2&1\\-8&2&-1\\-5&1&-1\\8&2&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-4&1&-1\\-38&2&1\\-22&2&-1\\-4&1&-1\\-38&2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-4&-5&1\\-38&8&2\\-22&-8&2\\-4&-5&1\\-38&8&2\end{vmatrix}}{-48}$$

$$B=\frac{\begin{gathered}4[10-16-8-(-8-10+16)]+4[8+76-22-(38-8+44)]\\+[-64+304+220-(380+64-176)]\end{gathered}}{-48}$$

$$B = \frac{4[-14+2]+4[62-74]+[460-268]}{-48} = \frac{-48-48+192}{-48} = \frac{96}{-48}$$

$$\boxed{B = -2}$$

De la ecuación (1): $-4C - E = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = -1}$

De la ecuación (2): $5(-2) - 5(-1) + D - 0 = -4 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{D = 1}$

La descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+4}dx + \int \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{(-2)x+(-1)}{x^2+4}dx + \int \frac{(1)x+(0)}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x+1}{x^2+4}dx + \int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2xdx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} + \int \frac{xdx}{(x^2+4)^2}$$

Aplicamos cambio de variable a la primera, segunda y última integral, mientras que la tercera integral se utiliza el teorema 1.12. En consecuencia,

$$v = x-1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = dx$$

$$u = x^2+4 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}du$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}dx = 2\int \frac{dv}{v} - \int \frac{du}{u} + \int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= 2\ln|v| - \ln|u| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{= 2\ln|x-1| - \ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2(x^2+4)} + C}$$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}dx$

Solución:

Primero factorizamos la expresión del denominador y después descomponemos la fracción algebraica de la integral en fracciones parciales, por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$$

Ahora expandimos la fracción parcial,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Podemos determinar las constantes A, B y C con cualquiera de los métodos estudiados en esta sección. Por ejemplo, utilizamos el método 3 (encubrimiento) para calcular A,

$$A = \left.\frac{1}{x^2-x+1}\right|_{x=-1} = \frac{1}{1+1+1} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{3}$$

Para obtener B y C reemplazamos A y operamos la fracción parcial,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{3(x+1)} = \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\frac{3-x^2+x-1}{3(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\frac{-(x^2-x-2)}{3(x+1)} = Bx+C$$

$$\frac{-(x+1)(x-2)}{3(x+1)} = Bx+C$$

$$\frac{-(x-2)}{3} = Bx+C$$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} = Bx+C \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad C = \frac{2}{3}$$

La descomposición en fracciones parciales deseada es,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

Finalmente,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2-x+1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

En la primera integral se aplica cambio de variable, la segunda integral se emplea artificio matemático, completar cuadrado y cambio de variable, y la tercera integral completamos cuadrados y empleamos el teorema 1.12.

$v = x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = dx$

$u = x^2 - x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = (2x-1)dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|v| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|u| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C \\
&= \boxed{\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C}
\end{aligned}$$

15. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x}dx$

Solución:

Tenemos una integral con expresiones trigonométricas para lo cual debemos aplicar un artificio matemático con la expresión $\sin x$, después factorizamos y usamos la I.T. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x \sin x}{\sin^4 x - 5\sin^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x \sin x}{\sin^2 x\,(\sin^2 x - 5)} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x \sin x}{(1-\cos^2 x)(-\cos^2 x - 4)} dx$$

Evaluamos la integral mediante cambio de variable, por lo tanto,

$$v = \cos x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad dv = -\sin x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \sin x\, dx = -dv$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2v^3(-dv)}{(1-v^2)(-v^2-4)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2v^3 dv}{(1-v^2)(v^2+4)}$$

Nuevamente empleamos cambio de variable,

$$u = 1 - v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = 1 - u \qquad \Rightarrow \qquad 2vdv = -du$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{v^2 \cdot 2vdv}{(1-v^2)(v^2+4)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-u)(-du)}{u(1-u+4)}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-u}{u(5-u)} du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u(u-5)} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{udu}{u(u-5)}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u(u-5)} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u-5}$$

En la primera integral aplicamos fracciones parciales y en la segunda empleamos cambio de variable. Descomponemos la primera integral en fracciones parciales,

$$\frac{1}{u(u-5)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-5}$$

Obtenemos las constantes A y B aplicando el método del encubrimiento,

$$A = \left.\frac{1}{\mathrm{u}-5}\right|_{\mathrm{u}=0} = \frac{1}{-5} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{5}$$

$$B = \left.\frac{1}{u}\right|_{u=5} = \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{5}$$

Realizamos el cambio de variable indicado anteriormente,

$t = u - 5 \qquad \Rightarrow \qquad dt = du$

Sustituimos los resultados de la fracción parcial y del cambio de variable,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{A}{u} du + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{B}{u-5} du - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u} + \frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u} + \frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u} - \frac{4}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t}$$

$$= \left| -\frac{1}{5}\ln|u| - \frac{4}{5}\ln|t| + \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

Reemplazamos las variables u, t y v de los cambios de variables aplicados previamente, por lo tanto,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} dx = \left| -\frac{1}{5}\ln|1 - v^2| - \frac{4}{5}\ln|u - 5| \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left| -\frac{1}{5}\ln|1 - \cos^2 x| - \frac{4}{5}\ln|-4 - v^2| \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left| -\frac{1}{5}\ln|1 - \cos^2 x| - \frac{4}{5}\ln|-4 - 1 + (1 - \cos^2 x)| \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left| -\frac{1}{5}\ln|\sin^2 x| - \frac{4}{5}\ln|-5 + \sin^2 x| \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[-\frac{1}{5}\ln\left|\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2\right| - \frac{4}{5}\ln\left|\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 - 5\right| \right]$$

$$- \left[-\frac{1}{5}\ln\left|\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2\right| - \frac{4}{5}\ln\left|\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 - 5\right| \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{4}{5}\ln\left(5 - \frac{3}{4}\right) \right] - \left[-\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{4}{5}\ln\left(5 - \frac{1}{4}\right) \right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - 5\sin x} dx = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{4}{5}\ln\left(\frac{17}{4}\right) + \frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{19}{4}\right)$$

Aplicamos la propiedad del cociente de logaritmo natural,

$$-\frac{1}{5}[\ln 3-\ln 4]-\frac{4}{5}[\ln 17-\ln 4]+\frac{1}{5}[\ln 1-\ln 4]+\frac{4}{5}[\ln 19-\ln 4]$$

$$-\frac{1}{5}\ln 3+\underline{\frac{1}{5}\ln(4)}-\frac{4}{5}\ln(17)+\underline{\underline{\frac{4}{5}\ln(4)}}+\frac{1}{5}\ln(1)-\underline{\frac{1}{5}\ln(4)}+\frac{4}{5}\ln(19)-\underline{\underline{\frac{4}{5}\ln(4)}}$$

$$\frac{4}{5}\ln(19)-\frac{1}{5}\ln(3)-\frac{4}{5}\ln(17)$$

Finalmente,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x-5\sin x}dx=\boxed{\frac{4}{5}\ln(19)-\frac{1}{5}\ln(3)-\frac{4}{5}\ln(17)}$$

2.5. Integración numérica: Reglas de Trapecio y de Simpson.

Una técnica específica para calcular el valor exacto de una integral definida se basa en el Teorema Fundamental del Cálculo. Está técnica se fundamenta en el cálculo de antiderivadas denominado Cálculo Integral. Sin embargo, en algunas ocasiones habrá que aproximar el valor de la integral definida en lugar de hallar su valor exacto. En este caso, lo primero será no poder calcular una antiderivada del integrando. El segundo caso es cuando realmente no se conoce el integrando, sino únicamente los valores cuando se evalúa en determinados puntos.

En esta sección se utilizan dos reglas para evaluar integrales en la que no es posible evaluar el integrando, las dos reglas que se utilizan son: Trapecio y Simpson,

Regla del trapecio

$$T_n=\int_a^b f(x)dx=\frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Donde,

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

Regla de Simpson

$$S_n=\int_a^b f(x)dx=\frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Donde,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En los siguientes ejercicios utilizamos la regla del Trapecio para evaluar integrales definidas sin aplicar los teoremas abordados en capítulo 1 ni de alguna técnica de integración ya estudiada.

1. $\int_{1}^{3} (x^3 + 1)dx \,; n = 4$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[1, 3]$ para $n = 4$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Cada subintervalo es 0.5, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 4$,

n	x_i	$f(x_i) = x^3 + 1$
0	1	$f(1) = (1)^3 + 1 = 2$
1	1.5	$f(1.5) = (1.5)^3 + 1 = 4.375$
2	2	$f(2) = (2)^3 + 1 = 9$
3	2.5	$f(2.5) = (2.5)^3 + 1 = 16.625$
4	3	$f(3) = (3)^3 + 1 = 28$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_{1}^{3} (x^3 + 1)dx = \frac{0.5}{2}[2 + 2(4.375) + 2(9) + 2(16.625) + 28] = 0.25(90)$$

$$\int_{1}^{3} (x^3 + 1)dx = 22.5$$

2. $\int_1^6 \frac{1}{x} dx \,; n = 5$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[1, 6]$ para $n = 5$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-1}{5} = 1$$

Cada subintervalo es 1, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 5$,

n	x_i	$f(x_i) = \frac{1}{x}$
0	1	$f(1) = \frac{1}{1} = 1$
1	2	$f(2) = \frac{1}{2} = 0.5$
2	3	$f(3) = \frac{1}{3} = 0.333$
3	4	$f(4) = \frac{1}{4} = 0.25$
4	5	$f(5) = \frac{1}{5} = 0.2$
5	6	$f(6) = \frac{1}{6} = 0.167$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}[1 + 2(0.5) + 2(0.333) + 2(0.25) + 2(0.2) + 0.167] = 0.5(3.733)$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = 1.867$$

3. $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx \,; n = 8$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$ para $n = 8$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = 0.25$$

La longitud de cada subintervalo es 1, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 5$,

n	x_i	$f(x_i) = x\sqrt{4-x^2}$
0	0	$f(0) = 0$
1	0.25	$f(0.25) = 0.25\sqrt{4-(0.25)^2} = 0.992$
2	0.5	$f(0.5) = 0.5\sqrt{4-(0.5)^2} = 0.968$
3	0.75	$f(0.75) = 0.75\sqrt{4-(0.75)^2} = 1.391$
4	1	$f(1) = 1\sqrt{4-(1)^2} = 1.732$
5	1.25	$f(1.25) = 1.25\sqrt{4-(1.25)^2} = 1.952$
6	1.5	$f(1.5) = 1.5\sqrt{4-(1.5)^2} = 1.984$
7	1.75	$f(1.75) = 1.75\sqrt{4-(1.75)^2} = 1.694$
8	2	$f(2) = 2\sqrt{4-(2)^2} = 0$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = \frac{0.25}{2}[0 + 2(0.992) + 2(0.968) + 2(1.391) + 2(1.732)$$
$$+ 2(1.952) + 2(1.984) + 2(1.694) + 0] = 0.125(3.733)$$

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = 2.678$$

4. $\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx\,; n = 8$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0,4]$ para $n=8$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{8}=0.5$$

Cada subintervalo es 0.5, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n=8$,

n	x_i	$f(x_i)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$
0	0	$f(0)=\sqrt{1+\sqrt{0}}=1$
1	0.5	$f(0.5)=\sqrt{1+\sqrt{0.5}}=1.307$
2	1	$f(1)=\sqrt{1+\sqrt{1}}=1.414$
3	1.5	$f(1.5)=\sqrt{1+\sqrt{1.5}}=1.492$
4	2	$f(2)=\sqrt{1+\sqrt{2}}=1.554$
5	2.5	$f(2.5)=\sqrt{1+\sqrt{2.5}}=1.607$
6	3	$f(3)=\sqrt{1+\sqrt{3}}=1.653$
7	3.5	$f(3.5)=\sqrt{1+\sqrt{3.5}}=1.694$
8	4	$f(4)=\sqrt{1+\sqrt{4}}=1.732$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx=\frac{0.5}{2}[1+2(1.307)+2(1.414)+2(1.492)+2(1.554)$$

$$+2(1.607)+2(1.653)+2(1.694)+1.732]=0.25(3.733)$$

$$\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx=6.043$$

5. $\int_0^4 \sqrt{x}\sin x\,dx\,;n=8$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0,4]$ para $n = 8$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{8} = 0.5$$

Cada subintervalo es 0.5, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 8$,

n	x_i	$f(x_i) = \sqrt{x}\sin x$
0	0	$f(0) = \sqrt{0}\sin(0) = 0$
1	0.5	$f(0.5) = \sqrt{0.5}\sin(0.5) = 0.339$
2	1	$f(1) = \sqrt{1}\sin(1) = 0.841$
3	1.5	$f(1.5) = \sqrt{1.5}\sin(1.5) = 1.222$
4	2	$f(2) = \sqrt{2}\sin(2) = 1.286$
5	2.5	$f(2.5) = \sqrt{2.5}\sin(2.5) = 0.946$
6	3	$f(3) = \sqrt{3}\sin(3) = 0.244$
7	3.5	$f(3.5) = \sqrt{3.5}\sin(3.5) = -0.656$
8	4	$f(4) = \sqrt{4}\sin(4) = -1.514$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_0^4 \sqrt{x}\sin x\,dx = \frac{0.5}{2}[0 + 2(0.339) + 2(0.841) + 2(1.222) + 2(1.286) + 2(0.946) + 2(0.244) + 2(-0.656) - 1.514] = 0.25(6.930)$$

$$\int_0^4 \sqrt{x}\sin x\,dx = 1.733$$

6. $\displaystyle\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\,dx\,; n = 10$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, 4]$ para $n = 8$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-4}{10} = 0.2$$

Cada subintervalo es 0.2, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 10$,

n	x_i	$f(x_i) = \ln(x^3 + 2)$
0	4	$f(4) = \ln[(4)^3 + 2] = 4.19$
1	4.2	$f(4.2) = \ln[(4.2)^3 + 2] = 4.332$
2	4.4	$f(4.4) = \ln[(4.4)^3 + 2] = 4.468$
3	4.6	$f(4.6) = \ln[(4.6)^3 + 2] = 4.6$
4	4.8	$f(4.8) = \ln[(4.8)^3 + 2] = 4.724$
5	5	$f(5) = \ln[(5)^3 + 2] = 4.844$
6	5.2	$f(5.2) = \ln[(5.2)^3 + 2] = 4.96$
7	5.4	$f(5.4) = \ln[(5.4)^3 + 2] = 5.072$
8	5.6	$f(5.6) = \ln[(5.6)^3 + 2] = 5.18$
9	5.8	$f(5.8) = \ln[(5.8)^3 + 2] = 5.284$
10	6	$f(6) = \ln[(6)^3 + 2] = 5.384$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_4^6 \ln(x^3+2)\,dx = \frac{0.2}{2}[4.19 + 2(4.332) + 2(4.468) + 2(4.6) + 2(4.724) + 2(4.844) + 2(4.96) + 2(5.072) + 2(5.18) + 2(5.284) + 5.384]$$

$$\int_4^6 \ln(x^3+2)\,dx = 9.65$$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}; n = 5$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, 4]$ para $n = 5$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

Cada subintervalo es 0.2, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 5$,

n	x_i	$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
0	0	$f(0) = \frac{1}{\sqrt{(0)^2+1}} = 1$
1	0.2	$f(0.2) = \frac{1}{\sqrt{(0.2)^2+1}} = 0.981$
2	0.4	$f(0.4) = \frac{1}{\sqrt{(0.4)^2+1}} = 0.928$
3	0.6	$f(0.6) = \frac{1}{\sqrt{(0.6)^2+1}} = 0.857$
4	0.8	$f(0.8) = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2+1}} = 0.781$
5	1	$f(1) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2+1}} = 0.707$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{0.2}{2}[1 + 2(0.981) + 2(0.928) + 2(0.857) + 2(0.781) + 0.707]$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = 0.880$$

8. $\int_{1}^{7} \frac{dx}{x^2+x+1}; n = 8$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, 3]$ para $n = 6$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{7-1}{8} = 0.75$$

Cada subintervalo es 0.75, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 8$,

n	x_i	$f(x_i) = \frac{1}{x^2+x+1}$
0	1	$f(1) = \frac{1}{(1)^2+1+1} = 0.333$
1	1.75	$f(1.75) = \frac{1}{(1.75)^2+1.75+1} = 0.172$
2	2.5	$f(2.5) = \frac{1}{(2.5)^2+2.5+1} = 0.103$
3	3.25	$f(3.25) = \frac{1}{(3.25)^2+3.25+1} = 0.068$
4	4	$f(4) = \frac{1}{(4)^2+4+1} = 0.048$
5	4.75	$f(4.75) = \frac{1}{(4.75)^2+4.75+1} = 0.035$
6	5.5	$f(5.5) = \frac{1}{(5.5)^2+5.5+1} = 0.027$
7	6.25	$f(6.25) = \frac{1}{(6.25)^2+6.25+1} = 0.022$
8	7	$f(7) = \frac{1}{(7)^2+7+1} = 0.018$

Por lo tanto, utilizamos la regla del Trapecio:

$$\int_{1}^{7} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{0.75}{2}[0.333 + 2(0.172) + 2(0.103) + 2(0.068) + 2(0.048) \\ + 2(0.035) + 2(0.027) + 2(0.022) + 0.018]$$

$$\int_{1}^{7} \frac{dx}{x^2+x+1} = 0.488$$

En los siguientes ejercicios se utiliza la regla de Simpson para evaluar las integrales definidas:

9. $\int_{0}^{2} \sqrt{x^4+1}dx\,; n=6$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0,2]$ para $n=6$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = 0.333$$

Cada subintervalo es 0.5, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n=6$,

n	x_i	$f(x_i)=\sqrt{x^4+1}$
0	0	$f(0)=\sqrt{(0)^4+1}=1$
1	0.333	$f(0.333)=\sqrt{(0.333)^4+1}=1.006$
2	0.667	$f(0.667)=\sqrt{(0.667)^4+1}=1.094$
3	1	$f(1)=\sqrt{(1)^4+1}=1.414$
4	1.333	$f(1.333)=\sqrt{(1.333)^4+1}=2.04$
5	1.667	$f(1.667)=\sqrt{(0)^4+1}=2.952$
6	2	$f(2)=\sqrt{(2)^4+1}=4.123$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_{0}^{2} \sqrt{x^4+1}dx = \frac{0.333}{3}[1+4(1.006)+2(1.094)+4(1.414)+2(2.04)$$
$$+4(2.952)+4.123] = 0.25(90)$$

$$\int_{0}^{2} \sqrt{x^4+1}dx = 3.653$$

10. $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx\,; n=6$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$ para $n = 6$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{6} = \frac{\pi}{12} = 15°$$

Se sabe que $\frac{\pi}{2} = 90°$ y cada subintervalo es 15°, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 6$,

n	x_i	$f(x_i) = \sqrt{\sin x}$
0	0	$f(0) = \sqrt{\sin(0)} = 0$
1	15°	$f(15°) = \sqrt{\sin 15°} = 0.509$
2	30°	$f(30°) = \sqrt{\sin 30°} = 0.707$
3	45°	$f(45°) = \sqrt{\sin 45°} = 0.841$
4	60°	$f(60°) = \sqrt{\sin 60°} = 0.931$
5	75°	$f(75°) = \sqrt{\sin 75°} = 0.983$
6	90°	$f(90°) = \sqrt{\sin 90°} = 1$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{\pi/12}{3}[0 + 4(0.509) + 2(0.707) + 4(0.841) + 2(0.931)$$

$$+ 4(0.983) + 1] = \frac{\pi}{36}(13.608)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = 1.188$$

11. $\int_2^4 \sqrt{x^3 + x} dx\, ; n = 4$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[2,4]$ para $n = 4$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{4} = 0.5$$

Cada subintervalo es 0.5, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 4$,

n	x_i	$f(x_i) = \sqrt{x^3 + x}$
0	2	$f(2) = \sqrt{(2)^3 + 2} = 3.162$
1	2.5	$f(2.5) = \sqrt{(2.5)^3 + 2.5} = 4.257$
2	3	$f(3) = \sqrt{(3)^3 + 3} = 5.477$
3	3.5	$f(3.5) = \sqrt{(3.5)^3 + 3.5} = 6.81$
4	4	$f(4) = \sqrt{(4)^3 + 4} = 8.246$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_2^4 \sqrt{x^3 + x}dx = \frac{0.5}{3}[3.162 + 4(4.257) + 2(5.477) + 4(6.81) + 8.246]$$

$$\int_2^4 \sqrt{x^3 + x}dx = \frac{0.5}{3}(66.63) = 11.105$$

12. $\displaystyle\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx \,; n = 10$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[2,4]$ para $n = 10$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{10} = 0.2$$

Cada subintervalo es 0.2, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 10$,

n	x_i	$f(x_i) = \frac{e^x}{x}$
0	2	$f(2) = \frac{e^2}{2} = 3.694$
1	2.2	$f(2.2) = \frac{e^{2.2}}{2.2} = 4.102$
2	2.4	$f(2.4) = \frac{e^{2.4}}{2.4} = 4.593$
3	2.6	$f(2.6) = \frac{e^{2.6}}{2.6} = 5.178$
4	2.8	$f(2.8) = \frac{e^{2.8}}{2.8} = 5.873$
5	3	$f(3) = \frac{e^3}{3} = 6.695$
6	3.2	$f(3.2) = \frac{e^{3.2}}{3.2} = 7.666$
7	3.4	$f(3.4) = \frac{e^{3.4}}{3.4} = 8.813$
8	3.6	$f(3.6) = \frac{e^{3.6}}{3.6} = 10.166$
9	3.8	$f(3.8) = \frac{e^{3.8}}{3.8} = 11.763$
10	4	$f(4) = \frac{e^4}{4} = 13.649$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx = \frac{0.2}{3}[3.694 + 4(4.102) + 2(4.593) + 4(5.178) + 2(5.873)$$
$$+ 4(6.695) + 2(7.666) + 4(8.813) + 2(10.166) + 4(11.763)$$
$$+ 13.649] = \frac{0.2}{3}(220.143)$$

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx = 14.676$$

13. $\int_0^2 \sqrt[4]{x^2 + 1} dx \, ; n = 8$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$ para $n = 8$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = 0.25$$

Cada subintervalo es 0.25, en la siguiente tabla se realizan los cálculos para $n = 8$,

n	x_i	$f(x_i) = \sqrt[4]{x^2+1}$
0	0	$f(0) = \sqrt[4]{0^2+1} = 1$
1	0.25	$f(0.25) = \sqrt[4]{(0.25)^2+1} = 1.015$
2	0.5	$f(0.5) = \sqrt[4]{(0.5)^2+1} = 1.057$
3	0.75	$f(0.75) = \sqrt[4]{(0.75)^2+1} = 1.118$
4	1	$f(1) = \sqrt[4]{(1)^2+1} = 1.189$
5	1.25	$f(1.25) = \sqrt[4]{(1.25)^2+1} = 1.265$
6	1.5	$f(1.5) = \sqrt[4]{(1.5)^2+1} = 1.342$
7	1.75	$f(1.75) = \sqrt[4]{(1.75)^2+1} = 1.42$
8	2	$f(2) = \sqrt[4]{(2)^2+1} = 1.495$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_0^2 \sqrt[4]{x^2+1}dx = \frac{0.25}{3}[1 + 4(1.015) + 2(1.057) + 4(1.118) + 2(1.189)$$

$$+ 4(1.265) + 2(1.342) + 4(1.42) + 1.495] = \frac{0.25}{3}(28.943)$$

$$\int_0^2 \sqrt[4]{x^2+1}dx = 2.412$$

14. $\int_0^{0.5} \sin(e^{0.5t})\, dt \,; n = 8$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[0, 0.5]$ para $n = 8$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{8} = 0.0625$$

Cada subintervalo es 0.0625, en la tabla se muestran los cálculos para $n = 8$,

n	x_i	$f(x_i) = \sin(e^{0.5t})$
0	0	$f(0) = \sin(e^{0.5*0}) = \sin(1) = 0.841$
1	0.0625	$f(0.0625) = \sin(e^{0.5*0.0625}) = \sin(1.032) = 0.858$
2	0.125	$f(0.125) = \sin(e^{0.5*0.125}) = \sin(1.064) = 0.875$
3	0.1875	$f(0.1875) = \sin(e^{0.5*0.1875}) = \sin(1.098) = 0.890$
4	0.25	$f(0.25) = \sin(e^{0.5*0.25}) = \sin(1.133) = 0.906$
5	0.3125	$f(0.3125) = \sin(e^{0.5*0.3125}) = \sin(1.169) = 0.920$
6	0.375	$f(0.375) = \sin(e^{0.5*0.375}) = \sin(1.206) = 0.934$
7	0.4375	$f(0.4375) = \sin(e^{0.5*0.4375}) = \sin(1.244) = 0.947$
8	0.5	$f(0.5) = \sin(e^{0.5*0.5}) = \sin(1.284) = 0.959$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_0^{0.5} \sin(e^{0.5t})\,dt = \frac{0.0625}{3}[0.841 + 4(0.858) + 2(0.875) + 4(0.89) + 2(0.906)$$

$$+ 4(0.92) + 2(0.934) + 4(0.947) + 0.959] = \frac{0.0625}{3}(21.69)$$

$$\int_0^{0.5} \sin(e^{0.5t})\,dt = 0.452$$

15. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x+1}\,dx\,; n = 10$

Solución:

Calculamos la longitud de cada subintervalo n de la integral definida en el intervalo cerrado $[1, 2]$ para $n = 10$ subintervalos, en consecuencia,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

Cada subintervalo es 0.1, en la tabla se muestran los cálculos para $n = 10$,

n	x_i	$f(x_i) = \frac{\ln x}{x+1}$
0	1	$f(1) = \frac{\ln 1}{1+1} = 0$
1	1.1	$f(1.1) = \frac{\ln 1\,.\,1}{1.1+1} = \frac{\ln 1.1}{2.1} = 0.0454$
2	1.2	$f(1.2) = \frac{\ln 1.2}{1.2+1} = \frac{\ln 1.2}{2.2} = 0.0829$
3	1.3	$f(1.3) = \frac{\ln 1.3}{1.3+1} = \frac{\ln 1.3}{2.3} = 0.1141$
4	1.4	$f(1.4) = \frac{\ln 1.4}{1.4+1} = \frac{\ln 1.4}{2.4} = 0.1402$
5	1.5	$f(1.5) = \frac{\ln 1.5}{1.5+1} = \frac{\ln 1.5}{2.5} = 0.1622$
6	1.6	$f(1.6) = \frac{\ln 1.6}{1.6+1} = \frac{\ln 1.6}{2.6} = 0.1808$
7	1.7	$f(1.7) = \frac{\ln 1.7}{1.7+1} = \frac{\ln 1.7}{2.7} = 0.1965$
8	1.8	$f(1.8) = \frac{\ln 1.8}{1.8+1} = \frac{\ln 1.8}{2.8} = 0.2099$
9	1.9	$f(1.9) = \frac{\ln 1.9}{1.9+1} = \frac{\ln 1.9}{2.9} = 0.2213$
10	2	$f(2) = \frac{\ln 2}{2+1} = \frac{\ln 2}{3} = 0.2310$

Por lo tanto, utilizamos la regla de Simpson:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x+1}dx = \frac{0.1}{3}[0 + 4(0.0454) + 2(0.0829) + 4(0.1141) + 2(0.1402)$$
$$+ 4(0.1622) + 2(0.1808) + 4(0.1965) + 2(0.2099)$$
$$+ 4(0.2213) + 0.2310] = \frac{0.1}{3}(4.4166)$$

$$\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x+1} dx = 0.1472$$

2.6. Integrales impropias.

En la mayoría de los casos, las integrales que se encontrarán no son áreas acotadas en el plano. En este apartado se explica cómo calcular integrales infinitas, debido a que el intervalo de integración es infinito (hasta $+\infty$ o $-\infty$), o bien porque en los límites del intervalo la función a integrar tiende a infinito. Ahora bien, bastará con hacer una pequeña revisión de las técnicas de cálculo de primitivas y entender bien la noción de límite con el fin de comprender el contenido de esta sección.

Considérese, la función f para la cual $t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ tiene como función,

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{|t|^3}}$$

Existen 3 integrales impropias posibles con límites de integración infinitos, es decir,

Caso 1: Si f es continua sobre el intervalo $[a, +\infty)$, entonces:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Si el $\lim_{b \to +\infty}$ existe, entonces la integral converge, caso contrario diverge.

Caso 2: Si f es continua sobre el intervalo $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Si el $\lim_{a \to -\infty}$ existe, entonces la integral converge, caso contrario diverge.

Caso 3: Si f es continua sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

En este caso la integral converge si las dos integrales también convergen, y si al menos una de ellas diverge entonces la integral diverge.

A continuación, se presentan el desarrollo de ejercicios de integrales impropias, en las que se pueden incluir integrales inmediatas, por cambio de variables e inclusive alguna técnica de integración.

1. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

Solución:

Para evaluar la integral se utiliza la expresión 1.12 (véase capítulo 1) y después evaluamos los límites aplicando el caso 1, por lo tanto,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to+\infty} [|\tan^{-1} t|_0^b] = \lim_{b\to+\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0)$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = (\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0)$$

Se sabe que,

$$\tan\frac{\pi}{2} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}(\infty)$$

Finalmente,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{(converge)}$$

2. $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$

Solución:

Para evaluar la integral requerimos utilizar los pasos del cambio de variable, por lo tanto,

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{x}$$

Sustituimos en la integral impropia (caso 1), y evaluamos,

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{e}^{b} \frac{1}{(\ln x)^3}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_{e}^{b} \frac{1}{(u)^3} du = \lim_{b\to+\infty} \int_{e}^{b} u^{-3} du$$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\left| \frac{u^{-2}}{-2} \right|_{e}^{b} \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[\left| -\frac{1}{2(\ln x)^2} \right|_{e}^{b} \right]$$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{2(\ln b)^2} + \frac{1}{2\ln e} \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{2(\ln b)^2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \frac{1}{2} \quad \text{(converge)}$$

3. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$

Solución:

Para evaluar la integral se debe aplicar la técnica de integración por partes ($\int udv = uv - \int vdu$), por lo tanto,

$$u = \ln t \qquad\qquad \int dv = \int \frac{1}{t^2} dt$$

$$du = \frac{dt}{t} \qquad\qquad v = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$$

Ahora se evalúa la integral mediante integración por partes y después evaluamos los límites de la integral impropia (caso 1):

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{b\to+\infty} \left[(\ln t)\left(-\frac{1}{t}\right) - \int_{1}^{b} -\frac{1}{t}\frac{dt}{t} \right]$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{\ln t}{t} + \int_{1}^{b} t^{-2} dt \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[\left| -\frac{\ln t}{t} + \frac{t^{-1}}{-1} \right|_{1}^{b} \right]$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{b\to+\infty} \left[\left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} \right) - \left(-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1} \right) \right] = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} \right)$$

Recordemos que,

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) - \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln b}{b}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} - \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1/b}{1}\right)$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = 1 - \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}\right) = 1 - \frac{1}{\infty}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = 1 \quad \text{(converge)}$$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{x^3}{x^4+1} dx$

Solución:

Para evaluar la integral requerimos utilizar los pasos del cambio de variable, por lo tanto,

$$u = x^4 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = 4x^3 dx \qquad \Rightarrow \qquad x^3 dx = \frac{1}{4} du$$

Sustituimos en la integral impropia (caso 2), y evaluamos,

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{x^3}{x^4+1} dx = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{1/4du}{u} = \frac{1}{4} \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \lim_{c\to-\infty} |\ln u|$$

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \lim_{c\to-\infty} [\ln|x^4+1|]_c^3 = \frac{1}{4} \lim_{c\to-\infty} [\ln|3^4+1| - \ln|c^4+1|]$$

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{x^3}{x^4+1} dx = -\infty \qquad \text{(diverge)}$$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+3} dx$

Solución:

Antes de evaluar la integral se debe utilizar el método de completar cuadrados en el factor cuadrático, que se da como,

$$x^2+2x+3=\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]+3-\left(\frac{2}{2}\right)^2=(x^2+2x+1)+3-1$$

$$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$$

Sustituimos en la integral impropia (caso 2), y evaluamos mediante la expresión 1.12 del capítulo 1,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\lim_{c\to-\infty}\left|\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)\right|_{c}^{0}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\lim_{c\to-\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right|_{c}^{0}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{c\to-\infty}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\tan^{-1}(c)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\tan^{-1}(\infty)\right]$$

Recordando que,

$$\tan^{-1}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\qquad\text{(converge)}$$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}dx$

Solución:

Para evaluar la integral utilizamos los pasos del cambio de variable, por lo tanto,

$$u=x^2+1\qquad\Rightarrow\qquad du=2xdx\qquad\Rightarrow\qquad xdx=\frac{1}{2}du$$

Sustituimos en la integral impropia (caso 3), y evaluamos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \frac{\frac{1}{2} du}{\left(\sqrt{u}\right)^3} + \lim_{d \to +\infty} \int_{0}^{d} \frac{\frac{1}{2} du}{\left(\sqrt{u}\right)^3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = \frac{1}{2} \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} u^{-3/2} du + \frac{1}{2} \lim_{d \to +\infty} \int_{0}^{d} u^{-3/2} du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = \frac{1}{2} \lim_{c \to -\infty} \left|\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right|_{c}^{0} + \frac{1}{2} \lim_{d \to +\infty} \left|\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right|_{0}^{d}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = -\lim_{c \to -\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{u}}\right|_{c}^{0} - \lim_{d \to +\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{u}}\right|_{0}^{d}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = -\lim_{c \to -\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right|_{c}^{0} - \lim_{d \to +\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right|_{0}^{d}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = -\lim_{c \to -\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\right] - \lim_{d \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{d^2+1}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} dx = -1 - \frac{1}{\infty} - \left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = 0 \qquad \text{(converge)}$$

7. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$

Solución:

La integral impropia (caso 1) se aplica el método de integración por fracciones parciales. Se descompone la fracción recordando el caso 1 para factores lineales.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+1)} = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{A}{x+2} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{B}{x+1} dx$$

Se realiza la operación de la fracción parcial, y utilizamos el método de encubrimiento para calcular A y B, por lo tanto,

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

$$A = \left.\frac{1}{(x+1)}\right|_{x=-2} = \frac{1}{(-2+1)} \qquad \Rightarrow \qquad A = -1$$

$$B = \left.\frac{1}{(x+2)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{(-1+2)} \qquad \Rightarrow \qquad B = 1$$

Después sustituimos los valores obtenidos en la integral descompuesta en fracciones parciales,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{-1}{x+2}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{x+1}dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = -\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x+2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim_{b\to+\infty} [-\ln|x+2| + \ln|x+1|]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^b$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{b+1}{b+2}\right| - \ln\left|\frac{1}{2}\right|\right] = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{b+1}{b+2}\right| + \ln 2\right]$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{1+\frac{1}{b}}{1+\frac{2}{b}}\right|\right] + \ln 2 = \ln\left|\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}\right| + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \ln 2 \qquad \text{(converge)}$$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx$

Solución:

Para evaluar la integral propuesta utilizamos la técnica de integración por partes, para lo cual se define u y dv,

$$u = \tan^{-1}x \qquad\qquad dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ $\qquad\qquad$ $v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

Sustituimos en la expresión definida por la integración por partes ($uv - \int vdu$),

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = (\tan^{-1}x)\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right] - \int -\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

En la última integral se utiliza la técnica de integración por sustitución trigonométrica (caso 2), en consecuencia,

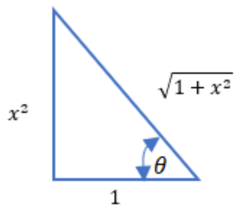
$x = \tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$\sec\theta = \sqrt{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sec^2\theta = (1+x^2)$

Realizamos la sustitución trigonométrica,

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \cos^2\theta\, d\theta$$



$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

Se utiliza la identidad trigonométrica de un ángulo doble, y del triángulo rectángulo que representa al caso 2 de integrales por sustitución trigonométrica, es decir que,

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\theta = \tan^{-1}x \qquad \sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Sustituimos la identidad trigonométrica de $\sin 2\theta$ y de θ,

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\tan^{-1}x + \frac{1}{8}(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{1+x^2}$$

Este resultado se sustituye en la integral impropia del caso 1, por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\right|_0^b\right]$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^{-1}b}{1+b^2}+\frac{1}{4}\tan^{-1}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{1+b^2}\right)-(0)\right]$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\tan^{-1}\infty}{\infty}+\frac{1}{4}\tan^{-1}\infty+\frac{1}{2}\frac{1/\infty}{\frac{1}{\infty^2}+1}$$

Recordemos que,

$$\frac{\pi}{2}=\tan^{-1}(\infty) \qquad y \qquad \frac{1}{\infty}=0$$

Finalmente,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}(0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{8} \qquad \text{(converge)}$$

9. Suponga que un cohete se lanza desde la superficie de la Tierra, sin considerar toda resistencia excepto la de gravedad. Si v millas por segundo es la velocidad necesaria para escapar del campo gravitacional de la Tierra, entonces

$$v^2 = 2gR^2\int_R^{+\infty} x^{-2}dx$$

donde g es la gravedad constante medida en millas por segundo en la superficie de la Tierra y R millas es el radio de la Tierra. Con $g=0.006094$ y $R=3963$, aproxime la velocidad de escape con tres dígitos significativos.

Solución:

Para evaluar la integral se utiliza el caso 1, por lo tanto,

$$v^2 = 2gR^2 \lim_{b\to+\infty} \int_R^b x^{-2}dx = 2gR^2 \lim_{b\to+\infty} \left[\left| -\frac{1}{x} \right|_R^b \right] = 2gR^2 \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right]$$

$$v^2 = 2gR^2 \left[-\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right] = 2gR^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 2gR$$

Finalmente, con los datos de gravedad y radio de la Tierra, la velocidad es

$$v = \sqrt{2gR} = \sqrt{2(0.006094)(3963)}$$

$$v = 6.950\ millas/s$$

10. La velocidad promedio de las moléculas en un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas, y v es la velocidad molecular. Demostrar que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Solución:

Para evaluar la integral se utiliza la técnica de integración por partes, por lo tanto,

$$p = v^2 \qquad\qquad \int dq = \int v e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv$$

Usamos cambio de variable para dq,

$$u = -\frac{M}{2RT} v^2 \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{M}{2RT} 2v dv \quad \Rightarrow \quad v dv = -\frac{RT}{M} du$$

Derivamos p y sustituyendo el cambio de variable, queda

$$dp = 2v dv \qquad\qquad q = \int e^u \left(-\frac{RT}{M} du \right) = -\frac{RT}{M} \int e^u du = -\frac{RT}{M} e^{-\frac{M}{2RT}v^2}$$

Sustituyendo en la expresión que define la integración por partes, queda

$$\int v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv = pq - \int q dp$$

$$\int v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv = (v^2) \left(-\frac{RT}{M} e^{-\frac{M}{2RT}v^2} \right) - \int -\frac{RT}{M} e^{-\frac{M}{2RT}v^2} (2v dv)$$

$$\int v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv = -\frac{RT}{M} v^2 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} + \frac{2RT}{M} \int v e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv$$

La última integral ya se obtuvo el resultado y se sustituye, por lo tanto,

$$\int v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv = -\frac{RT}{M} v^2 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} + \frac{2RT}{M} \left(-\frac{RT}{M} e^{-\frac{M}{2RT}v^2}\right)$$

$$\int v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv = -\frac{RT}{M} v^2 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} + 2\left(\frac{RT}{M}\right)^2 e^{-\frac{M}{2RT}v^2}$$

Volviendo a la integral impropia inicial, utilizamos el caso 1 del primer tipo de integrales impropias,

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b v^3 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} dv$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \lim_{b\to+\infty} \left[\left| -\frac{RT}{M} v^2 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} + 2\left(\frac{RT}{M}\right)^2 e^{-\frac{M}{2RT}v^2} \right|_0^b\right]$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \lim_{b\to+\infty} \left\{\left[-\frac{RT}{M} b^2 e^{-\frac{M}{2RT}b^2} + 2\left(\frac{RT}{M}\right)^2 e^{-\frac{M}{2RT}b^2}\right] - \left[2\left(\frac{RT}{M}\right)^2 e^0\right]\right\}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \left[0 + 2\left(\frac{RT}{M}\right)^2 (0)\right] - \left[2\left(\frac{RT}{M}\right)^2\right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{M}{2RT}\right)^3} \left[2\left(\frac{RT}{M}\right)^2\right]$$

$$\bar{v} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{M}{2RT}\right)^3} \left[\left(\sqrt{\left(\frac{RT}{M}\right)^4}\right)\right] = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{M}{2RT}\right)^3 \cdot \left(\frac{RT}{M}\right)^4} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M^3}{8R^3T^3} \cdot \frac{R^4T^4}{M^4}}$$

$$\bar{v} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{RT}{8M}} = \frac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{RT}{8M}} = \sqrt{\frac{8^2}{\pi} \frac{RT}{8M}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad LQQD$$

En los ejercicios desarrollados se utilizaron el primer tipo de integrales impropias (casos 1 a 3), ahora se describe y analizan el segundo caso de integrales impropias, es decir, que se trata de integrales discontinuas. Éstas son integrales que tiene integrandos discontinuos. El procedimiento aquí es básicamente el mismo con una sutil diferencia. A continuación, se muestran los casos generales que estudiaremos para estas integrales:

Caso 1: Si f es continua sobre el intervalo $[a, b)$, pero no continua en $x = b$ entonces,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{s \to b^-} \int_{a}^{s} f(x)dx$$

si el límite existe y es finito. Téngase en cuenta que en este caso es imprescindible utilizar un límite por la izquierda, debido a que el intervalo de integración se extiende por toda la parte izquierda del límite superior.

Caso 2: Si f es continua sobre el intervalo $(a, b]$, pero no continua en $x = a$ entonces,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{s \to a^+} \int_{s}^{b} f(x)dx$$

si el límite existe y es finito. De manera similar al caso 1, este caso es imprescindible utilizar un límite por la derecha, debido a que el intervalo de integración se extiende por toda la parte derecha del límite superior.

Caso 3: Si f no es continua en $x = c$ donde $a < c < b$ entonces,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

De la misma forma que en el caso del intervalo infinito, es necesario que ambas integrales sean convergentes entre sí para que la integral también lo sea. En caso de que alguna de las dos integrales sea divergente, también lo será esta integral.

Caso 4: Si f no es continua en $x = a$ y $x = b$ entonces,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

En la que c es cualquier número, y es necesario que ambas integrales sean convergentes entre sí para que la integral también lo sea.

A continuación, se presentan el desarrollo de ejercicios para el segundo tipo de integrales impropias (4 casos), en las que se pueden incluir integrales inmediatas, por cambio de variables e inclusive alguna técnica de integración.

11. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

Solución:

Para evaluar este segundo tipo de integración impropia se utiliza el caso 2, en la que $x = 0$ no es continua, por lo tanto,

$$\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^3 x^{-3/2} dx = \lim_{s\to 0^+} \left[\left| -\frac{2}{\sqrt{x}} \right|_s^3 \right]$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{s\to 0^+} \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{2}{s} \right) \right] = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \lim_{s\to 0^+} \left(\frac{2}{s} \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{0}}$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \infty \qquad \text{(diverge)}$$

12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Solución:

Este tipo de integral se resuelve aplicando el teorema 1.11 (véase capítulo 1) y a su vez corresponde al segundo tipo de integración impropia (caso 1), en la que $x = 1$ no es continua, por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{s\to 1^-} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{s\to 1^-} [|\sin^{-1} x|_0^s] = \lim_{s\to 1^-} [\sin^{-1} s - \sin^{-1} 0]$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{s\to 1^-} [\sin^{-1} s - 0] = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(converge)}$$

13. $\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$

Solución:

Este tipo de integral se resuelve aplicando cambio de variable,

$u = 1 - \sin x \qquad \Rightarrow \qquad du = -\cos x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \cos x\, dx = -du$

Además, corresponde al segundo tipo de integración impropia (caso 3), en la que $x = \frac{\pi}{2}$ no es continua y $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$, por lo tanto

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = \lim_{s\to\pi/2^-} \int_0^{s} \frac{-du}{\sqrt{u}} + \lim_{t\to\pi/2^+} \int_t^{\pi} \frac{-du}{\sqrt{u}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -\lim_{s\to\pi/2^-} \int_0^{s} u^{-1/2} du - \lim_{t\to\pi/2^+} \int_t^{\pi} u^{-1/2} du$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -\lim_{s\to\pi/2^-} \left[\left|2\sqrt{u}\right|_0^s\right] - \lim_{t\to\pi/2^+} \left[\left|2\sqrt{u}\right|_t^{\pi}\right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -2\lim_{s\to\pi/2^-} \left[\left|\sqrt{1-\sin x}\right|_0^s\right] - 2\lim_{t\to\pi/2^+} \left[\left|\sqrt{1-\sin x}\right|_t^{\pi}\right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -2\lim_{s\to\pi/2^-} \left[\sqrt{1-\sin s} - \sqrt{1}\right] - 2\lim_{t\to\pi/2^+} \left[\sqrt{1} - \sqrt{1-\sin t}\right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -2\left(\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{2}} - 1\right) - 2\left(1 - \sqrt{1-\sin\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -2\left(\sqrt{1-0} - 1\right) - 2\left(1 - \sqrt{1-0}\right) = 0$$

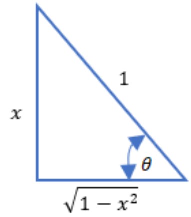
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Solución:

Para evaluar la integral propuesta utilizamos la técnica de integración por sustitución trigonométrica (caso 1). La figura muestra el triángulo rectángulo que representa al caso 1.

$x = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = \cos\theta\, d\theta$

$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$



Realizamos la sustitución trigonométrica,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int \sin^2\theta\, d\theta$$

Aplicamos la siguiente identidad trigonométrica,

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

Se utiliza la identidad trigonométrica de un ángulo doble, y para el triángulo rectángulo que representa al caso 1 de integrales por sustitución trigonométrica, entonces,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\theta = \sin^{-1} x \qquad \sin\theta = x \qquad \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

Sustituimos la identidad trigonométrica de $\sin 2\theta$ y de θ

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}(\sin\theta\cos\theta)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x - x\sqrt{1-x^2}\right)$$

Este resultado se sustituye en la integral impropia del caso 1, en la que $x = 1$ no es continua, por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{s\to 1^-}\left[\left|\frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x - x\sqrt{1-x^2}\right)\right|_0^s\right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1^-}\left[\left(\sin^{-1} s - s\sqrt{1-s^2}\right) - \left(\sin^{-1} 0 - 0\sqrt{1-0^2}\right)\right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1^-}\left[\left(\sin^{-1} s - s\sqrt{1-s^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} 1 - \sqrt{0}\right) = \frac{1}{2}(\sin^{-1} 1)$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{4}$$

15. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx$

Solución:

Este tipo de integral corresponde al segundo tipo de integración impropia (caso 4) en la que no es continua en $x = 0$ y $x = 1$, por lo tanto

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx = \lim_{s\to 0^+}\int_s^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx + \lim_{t\to 1^-}\int_{1/2}^{t}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx = \lim_{s\to 0^+}\left[\left|2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}\right|_s^{1/2}\right] + \lim_{t\to 1^-}\left[\left|2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}\right|_{1/2}^{t}\right]$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx = 2\lim_{s\to 0^+}\left[-\sqrt{s} + \sqrt{1-s}\right] + 2\lim_{t\to 1^-}\left[\sqrt{t} - \sqrt{1-t}\right]$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx = 2\left(-\sqrt{0} + \sqrt{1-0}\right) + 2\left(\sqrt{1} + \sqrt{1-1}\right)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx = 2(1) + 2(1) = 2 + 2$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx = 4$$

16. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

Solución:

La expresión $2x - x^2$ se realiza la operación de completar cuadrados:

$$2x - x^2 = -(x^2 - 2x) = -\left[x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = 1 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$$

Sustituimos en el denominador del integrando, y se resuelve aplicando el teorema 1.11 (véase capítulo 1) y además corresponde al segundo tipo de integración impropia (caso 4), en la que en $x = 0$ y $x = 2$ no es continua, por lo tanto,

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} dx + \lim_{t \to 2^-} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \lim_{s \to 0^+} [|\sin^{-1}(x - 1)|_s^1] + \lim_{t \to 2^-} [|\sin^{-1}(x - 1)|_1^t]$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \lim_{s \to 0^+} [0 - \sin^{-1}(s - 1)] + \lim_{t \to 2^-} [\sin^{-1}(t - 1) - 0]$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = -\sin^{-1}(-1) + \sin^{-1}(1)$$

Se sabe que,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \sin^{-1}(1)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} = \sin^{-1}(-1)$$

Finalmente,

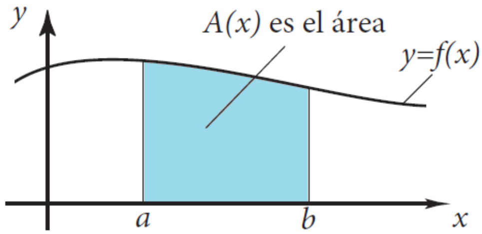
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \pi \qquad \text{(converge)}$$

Capítulo 3: Aplicaciones de integración: áreas, volúmenes y longitud de arco

3.1. Área de una región plana.

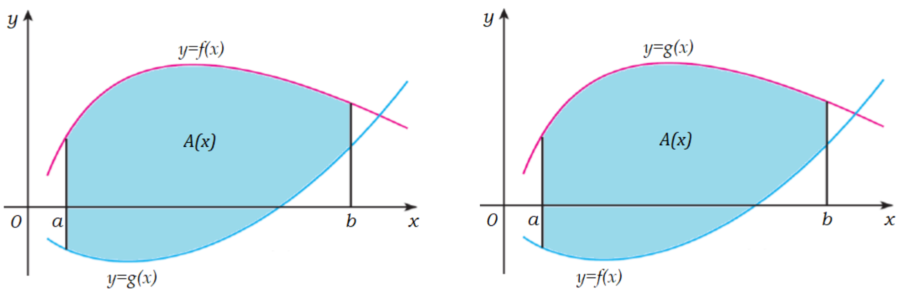
Supóngase la gráfica de una función positiva $y = f(x)$ y que se desea obtener el área de la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ (véase la figura del área sombreada debajo de la curva). Si la curva y = f(x) no es una recta, por ahora no se puede calcular el área con precisión.



Si el área está completamente por encima del eje x, como ocurre en este caso, viene dada por la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (3.1)$$

Considérese la región del área "$A(x)$" sombreada S comprendida entre dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geq g(x)$ (véase figura izquierda) o $g(x) \geq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

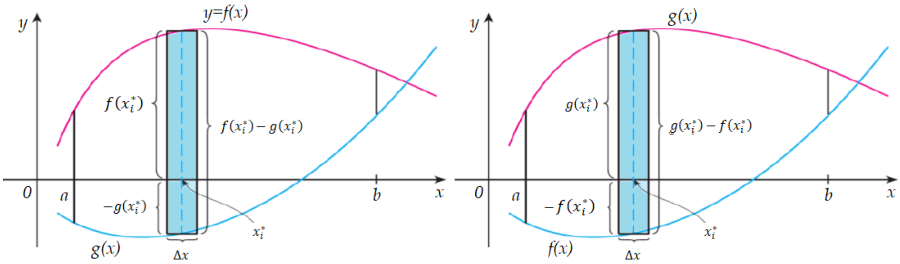


Por lo tanto, el área para $f(x) \geq g(x)$ y $g(x) \geq f(x)$ respectivamente son:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad (3.2)$$

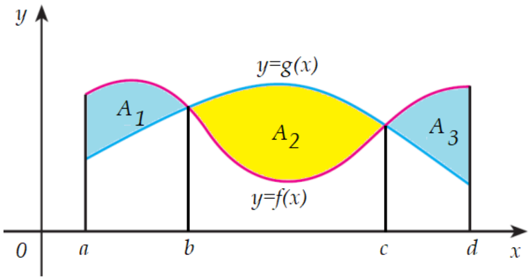
$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \qquad (3.3)$$

La siguiente figura muestra la interpretación grafica del área entre dos curvas para las ecuaciones 3.2 y 3.3.



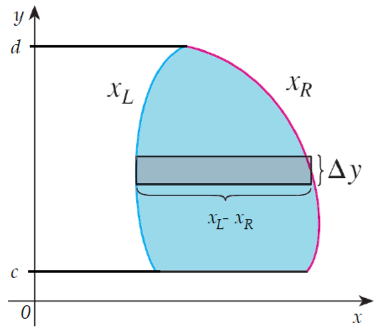
La siguiente figura muestra las áreas A_1, A_2 y A_3 comprendidas entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$. Para A_1 se observa que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, mientras que en la superficie A_2 se observa que $g(x) \geq f(x)$ en el intervalo $[b, c]$, y finalmente en la superficie A_3 se observa nuevamente que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[c, d]$. Por lo tanto, el área total es definida por:

$$A_T = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx + \int_c^d [f(x) - g(x)]dx \quad (3.4)$$



La explicación del área bajo una curva y entre dos o más curvas fue descrita y analizada en función de "x", ahora se presenta con relación a la variable "y" .

$$A = \int_c^d [X_R - X_L]dy = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \qquad (3.5)$$



1. Calcular el área entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$.

Solución:

Primero calculamos los puntos de intersección entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, igualando ambas funciones:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - x = 0$$

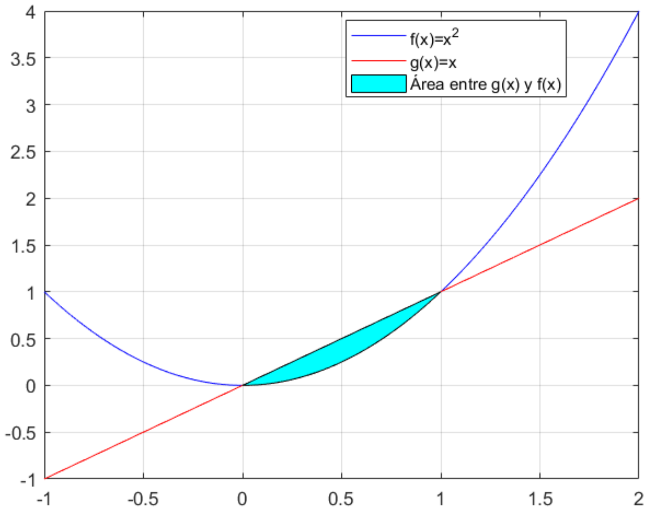
$$x(x-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \ \wedge \ x = 1$$

Los puntos de intersección 0 y 1 se muestran en la figura y corresponden a los límites a y b de la integral del área entre dos curvas (véase la región sombreada entre las curvas g y f). Por lo tanto,

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 [(x) - (x^2)]dx = \int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$= \left|\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right|_0^1 = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}u^2$$



2. Calcular el área entre las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 4x - x^2$.

Solución:

Obtenemos los puntos de intersección entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, igualando dichas funciones:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 2x = 4x - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2 - 6x = 0$$

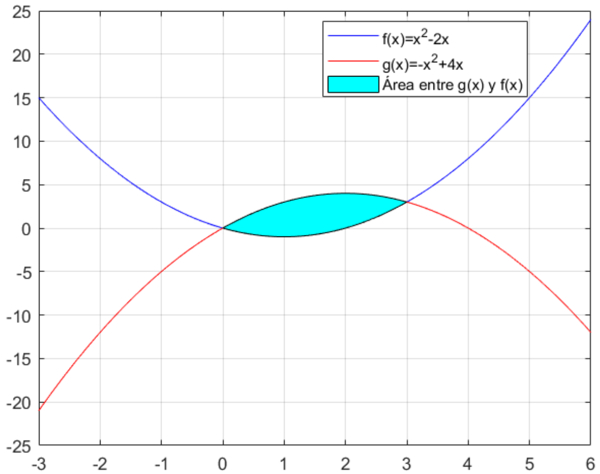
$$2x(x-3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \ \wedge \ x = 3$$

Los puntos 0 y 3 se muestran en la figura y corresponden a los límites a y b de la integral del área de la región sombreada entre las curvas g y f. Por lo tanto,

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_0^3 [(4x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^3 (6x - 2x^2)dx$$

$$= \left| 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right|_0^3 = 3(3)^2 - \frac{2}{3}(3)^3 = 27 - 18$$

$$= 9\, u^2$$



3. Calcular el área entre las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (primer cuadrante).

Solución:

Igualamos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ para obtener los puntos de intersección:

$$x^3 = \sqrt[3]{x} \qquad \Rightarrow \qquad x^9 = x$$

$$x^9 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x^8 - 1) = 0$$

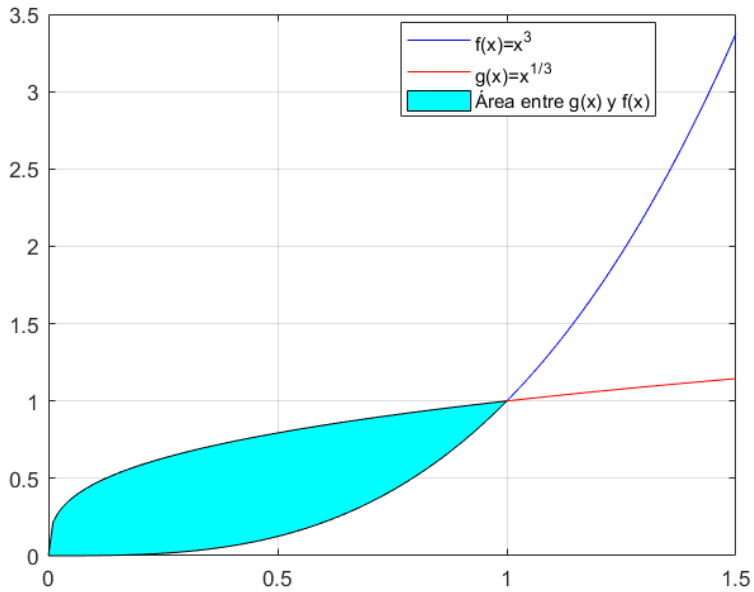
$$x = 0 \ \wedge \ x = \pm 1$$

Los puntos de intersección son -1, 0, 1 pero la restricción del problema se debe considerar el primer cuadrante, es decir los puntos 0 y 1. En la figura se muestran los límites a y b del área de la región sombreada entre las curvas g y f. Por lo tanto,

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 [(x^{1/3}) - (x^3)]dx = \int_0^1 (x^{1/3} - x^3)dx$$

$$= \left| \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{4}x^4 \right|_0^1 = \frac{3}{4}(1)^{4/3} - \frac{1}{4}(1)^4 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\,u^2$$



4. Calcular el área entre las curvas $f(x) = 4(1 - x^2)$ y $g(x) = 1 - x^2$.

Solución:

Primero calculamos los puntos de intersección entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, igualando ambas funciones:

$$4(1 - x^2) = 1 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 4 - 4x^2 = 1 - x^2$$

$$3 = 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$

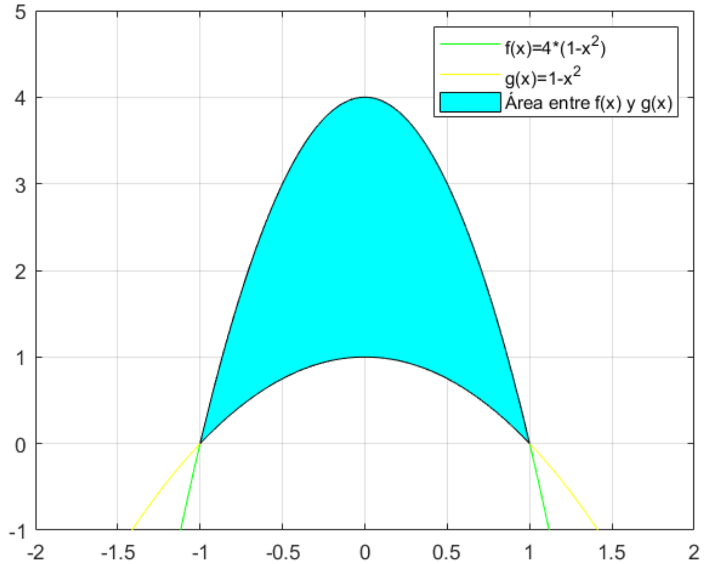
Los puntos de intersección son -1 y 1. En la figura se muestran los límites a y b del área de la región sombreada entre las curvas f y g. Por lo tanto,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{1} [(4 - 4x^2) - (1 - x^2)]dx = \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2)dx$$

$$= |3x - x^3|_{-1}^{1} = [3(1) - (1)^3] - [3(-1) - (-1)^3]$$

$$= [3 - 1] - [-3 + 1] = 2 - (-2)$$

$$= 4\, u^2$$



5. Calcular el área entre las curvas $f(x) = 6 - x^2$ y $g(x) = x^2 + 4x$.

Solución:

Igualando las funciones f y g se obtienen los puntos de intersección entre ellas:

$6 - x^2 = x^2 + 4x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 2x - 3 = 0$

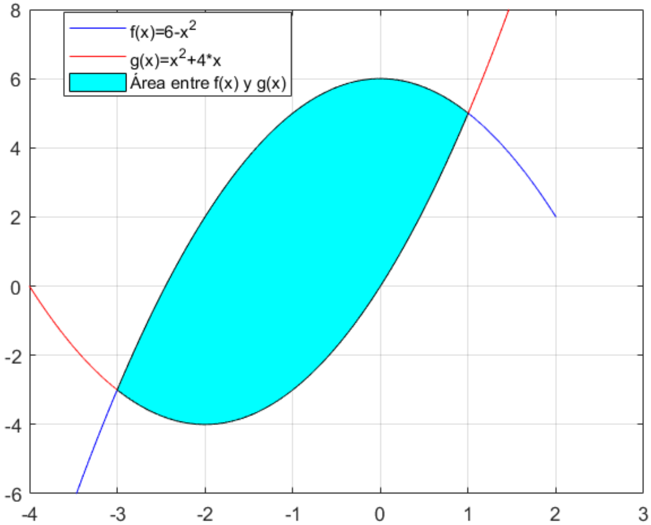
$(x + 3)(x - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -3 \ \wedge \ x = 1$

Los puntos de intersección son -3 y 1. En la figura se muestran los límites a y b del área de la región sombreada entre las curvas f y g. Por lo tanto,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_{-3}^{1} [(6 - x^2) - (x^2 + 4x)]dx = \int_{-3}^{1} (6 - 4x - 2x^2)dx$$

$$= \left| 6x - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right|_{-3}^{1}$$

$$A = \left[6(1) - 2(1)^2 - \frac{2}{3}(1)^3\right] - \left[6(-3) - 2(-3)^2 - \frac{2}{3}(-3)^3\right]$$
$$= \left[6 - 2 - \frac{2}{3}\right] - [-18 - 18 + 18] = \frac{10}{3} + 18$$
$$= \frac{64}{3}\ u^2$$



6. Calcular el área entre las curvas $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y $g(x) = 2x + 2$ sobre $[-1, 6]$.

Solución:

Igualando las funciones f y g se obtienen los puntos de intersección entre ellas:

$$x^2 - 2x - 3 = 2x + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x + 1)(x - 5) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \ \wedge \ x = 5$$

Los puntos de intersección son -1 y 5. En la figura se observan dos regiones sombreadas considerando el rango dado por el problema de $[-1, 6]$ en la que se encuentran los dos puntos de intersección. El área 1 (A_1) corresponde a la región sombreada entre las curvas g y f, y el área 2 (A_2) de la región sombreada entre las curvas f y g. Por lo tanto,

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{5} [(2x+2) - (x^2 - 2x - 3)]dx$$

$$+ \int_{5}^{6} [(x^2 - 2x - 3) - (2x+2)]dx$$

$$= \int_{-1}^{5} (5 + 4x - x^2)dx + \int_{5}^{6} (x^2 - 4x - 5)dx$$

$$= \left| 5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right|_{-1}^{5} + \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \right|_{5}^{6}$$

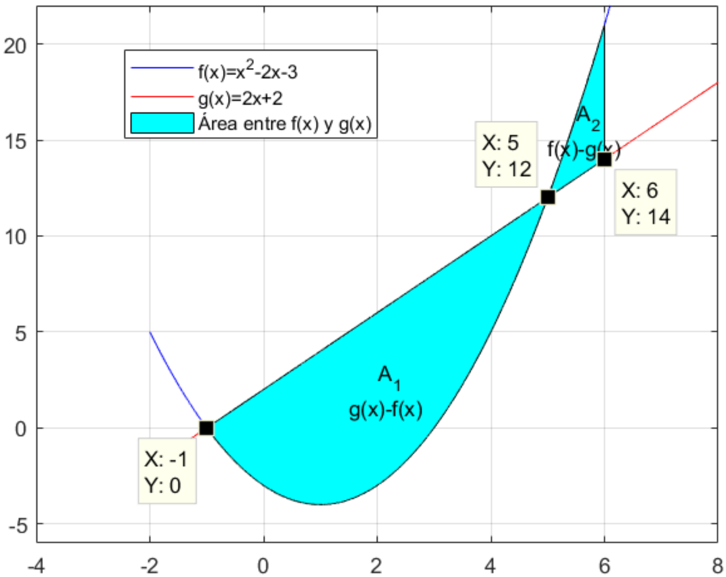
$$= \left\{ \left[5(5) + 2(5)^2 - \frac{1}{3}(5)^3 \right] - \left[5(-1) + 2(-1)^2 - \frac{1}{3}(-1)^3 \right] \right\}$$

$$+ \left\{ \left[\frac{1}{3}(6)^3 - 2(6)^2 - 5(6) \right] - \left[\frac{1}{3}(5)^3 - 2(5)^2 - 5(5) \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[75 - \frac{125}{3} \right] - \left[-3 + \frac{1}{3} \right] \right\} + \left\{ [-30] - \left[\frac{125}{3} - 75 \right] \right\}$$

$$= 75 + 3 - \frac{125}{3} - \frac{1}{3} - 30 - \frac{125}{3} + 75 = 123 - \frac{251}{3}$$

$$= \frac{118}{3}\ u^2$$



7. Hallar el área entre las curvas $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

Solución:

Igualando las funciones f y g se obtienen los puntos de intersección entre ellas:

$2x^3 - 3x^2 - 9x = x^3 - 2x^2 - 3x \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 - x - 6) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x+2)(x-3)$

$x = 0 \ \wedge \ x = -2 \ \wedge \ x = 3$

Los puntos de intersección son -2, 0 y 3. En la figura se observan dos regiones sombreadas considerando los puntos de intersección. El área 1 (A_1) corresponde a la región sombreada entre las curvas f y g, y el área 2 (A_2) de la región sombreada entre las curvas g y f. Por lo tanto,

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} [(2x^3 - 3x^2 - 9x) - (x^3 - 2x^2 - 3x)]dx$$

$$+ \int_0^3 [(x^3 - 2x^2 - 3x) - (2x^3 - 3x^2 - 9x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)dx + \int_0^3 (6x + x^2 - x^3)dx$$

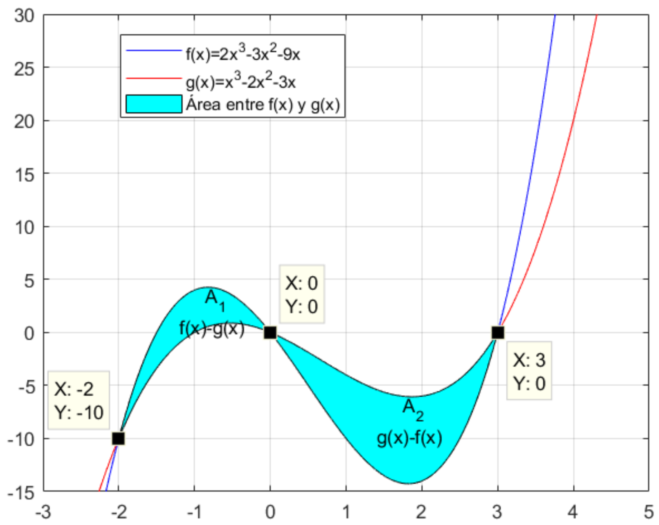
$$= \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right|_{-2}^{0} + \left|3x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right|_0^3$$

$$= \left\{\left[\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(0)^3 - 3(0)^2\right] - \left[\frac{1}{4}(-2)^4 - \frac{1}{3}(-2)^3 - 3(-2)^2\right]\right\}$$

$$+ \left\{\left[3(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{4}(3)^4\right] - \left[3(0)^2 + \frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4\right]\right\}$$

$$= \left\{[0] - \left[-8 + \frac{8}{3}\right]\right\} + \left\{\left[36 - \frac{81}{4}\right] - [0]\right\} = 44 - \frac{8}{3} - \frac{81}{4}$$

$$= \frac{253}{12}\ u^2$$



8. Hallar el área entre las curvas $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 5x$ y $g(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$.

Solución:

Igualando las funciones f y g se obtienen los puntos de intersección entre ellas:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 5x = x^3 - 4x^2 - 11x + 30 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0$$

$$x^2(x-5) - 9(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)(x^2-9) = 0$$

$$x = 5 \ \wedge \ x = \pm 3$$

Los puntos de intersección son -3, 3 y 5. En la figura se observan dos regiones sombreadas considerando los tres puntos de intersección. El área 1 (A_1) corresponde a la región sombreada entre las curvas g y f, y el área 2 (A_2) de la región sombreada entre las curvas f y g. Por lo tanto,

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \left[(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - 5x\right)\right] dx$$

$$+ \int_{3}^{5} \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - 5x\right) - (x^3 - 4x^2 - 11x + 30)\right] dx$$

$$A=\int_{-3}^{3}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{10x^2}{3}-6x+30\right)dx+\int_{3}^{5}\left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{10x^2}{3}+6x-30\right)dx$$

$$=\left|\frac{x^4}{6}-\frac{10x^3}{9}-3x^2+30x\right|_{-3}^{3}+\left|-\frac{x^4}{6}+\frac{10x^3}{9}+3x^2-30x\right|_{3}^{5}$$

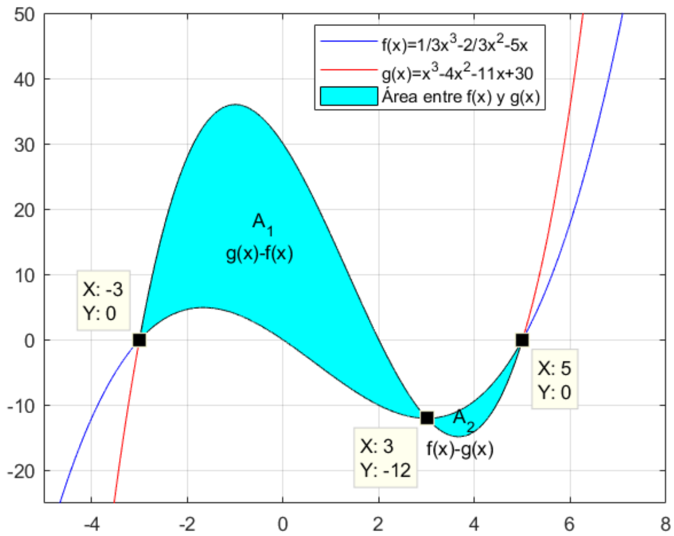
$$=\left\{\left[\frac{3^4}{6}-\frac{10(3)^3}{9}-3(3)^2+30(3)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(-3)^4}{6}-\frac{10(-3)^3}{9}-3(-3)^2+30(-3)\right]\right\}$$

$$+\left\{\left[-\frac{5^4}{6}+\frac{10(5)^3}{9}+3(5)^2-30(5)\right]\right.$$

$$\left.-\left[-\frac{3^4}{6}+\frac{10(3)^3}{9}+3(3)^2-30(3)\right]\right\}$$

$$=\left\{\left[\frac{93}{2}\right]-\left[-\frac{147}{2}\right]\right\}+\left\{\left[-\frac{2175}{54}\right]-\left[-\frac{93}{2}\right]\right\}=\frac{1136}{9}\ u^2$$



9. Hallar el área entre las curvas $f(x)=x^3+3x^2+2x$ y $g(x)=2x^2+4x$.

Solución:

Igualando las funciones f y g se obtienen los puntos de intersección entre ellas:

$$x^3+3x^2+2x=2x^2+4x \qquad \Rightarrow \qquad x^3+x^2-2x=0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \ \wedge \ x = -2 \ \wedge \ x = 1$$

En la figura se observan dos regiones sombreadas considerando los tres puntos de intersección. Por lo tanto,

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} [(x^3 + 3x^2 + 2x) - (2x^2 + 4x)]dx$$

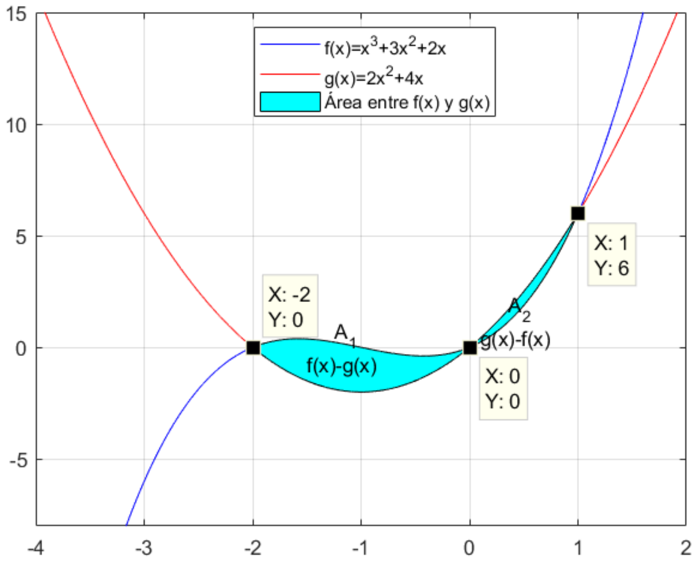
$$+ \int_0^1 [(2x^2 + 4x) - (x^3 + 3x^2 + 2x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)dx$$

$$= \left| \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{-2}^{0} + \left| -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right|_0^1$$

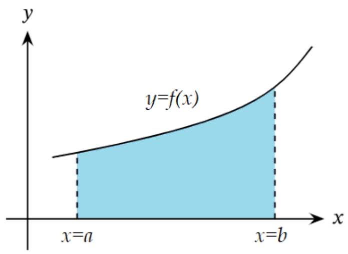
$$= \left\{ -\left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 \right] \right\} + \left\{ \left[-\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^3}{3} + 1^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{37}{12} \, u^2$$

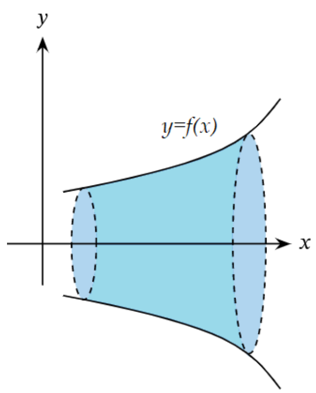


3.2. Volúmenes de sólidos de revolución: método de las rebanadas, discos y anillos.

En esta sección se estudia el método para hallar el volumen de un sólido generado al girar una región alrededor de una línea horizontal o vertical mediante integración. Supóngase que se tiene una curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, tal como se muestra en la figura.

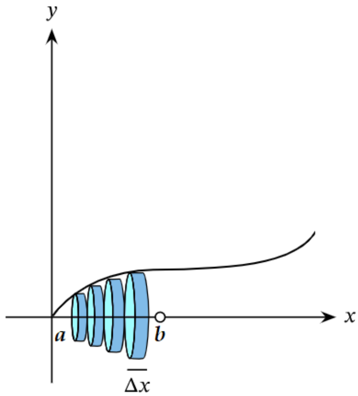


Si la curva está comprendida entre x=a y x=b y la sometemos a una rotación completa alrededor del eje x (es decir, 360◦ o 2π), se obtendrá la superficie de un sólido en rotación, que se denomina sólido de revolución, tal como se representa en la figura.



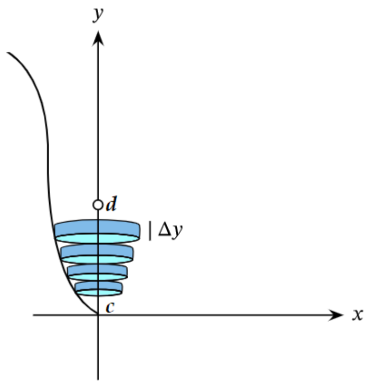
Sea un sólido comprendido entre las rectas verticales x=a y x=b, con una sección transversal en el plano que pasa por x y es perpendicular al eje x de $A(x)$. Si $A(x)$ es continua en el intervalo $[a,\ b]$, el intervalo se puede dividir en n subintervalos de igual anchura, Δx, y elegir un punto, x_i, en cada intervalo. El volumen del sólido formado al girar la región limitada por la curva y el eje x entre x=a y x=b alrededor del eje x viene dado por,

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx \qquad (3.6)$$



De forma análoga, el volumen del sólido que se forma al hacer girar la región delimitada por la curva y el eje "y" entre $y = c$ e $y = d$ alrededor del eje "y" está dada por,

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y_i)\Delta y = \int_{c}^{d} A(y)dy \qquad (3.7)$$

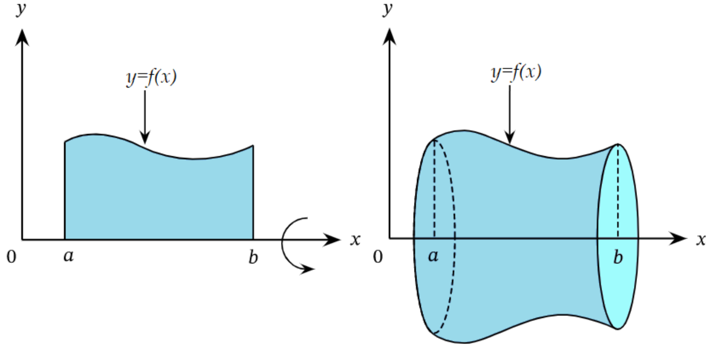


Si una curva $y = f(x)$, la forma de la sección transversal tiene forma de disco sólido o bien de circunferencia cuya área es $A = \pi R^2$, donde R es el radio. El valor del radio de cada circunferencia o disco representará el valor de la función en ese punto. En consecuencia, su sección transversal perpendicular al eje de revolución es un disco de radio R=$f(x)$, y definida por,

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

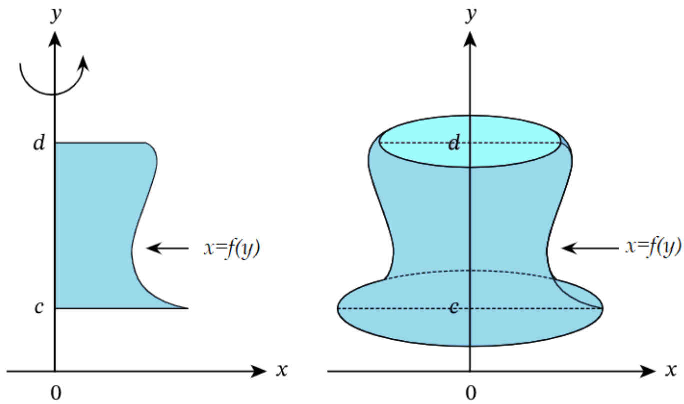
Entonces, el volumen del sólido que se forma al girar la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje x entre x=a y x=b alrededor del eje x, puede expresarse como:

$$V = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2 dx \qquad (3.8)$$



Un proceso similar se puede seguir para calcular el volumen de un sólido con rotación alrededor del eje y. El volumen del sólido resultante de la revolución de la región delimitada por la curva x=$f(y)$ y el eje y entre y=c y y=d alrededor del eje y está dada por,

$$V = \pi \int_{c}^{d} [f(y)]^2 dy \qquad (3.9)$$



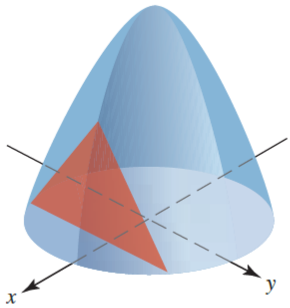
Finalmente, se describe el método de anillos o método de la arandela que no es más que el volumen del solido de revolución resultante de la región acotada por dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ que se hace girar alrededor del eje x o del eje y. Las expresiones de los volúmenes de solidos de revolución estan definidas por,

$$V = \pi \int_{a}^{b} \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx \qquad (3.10)$$

$$V = \pi \int_{c}^{d} \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy \qquad (3.11)$$

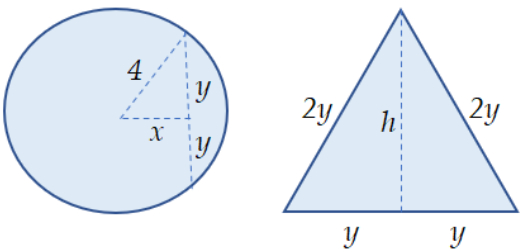
A continuación, se desarrollan ejercicios de cálculos de volúmenes de solidos usando métodos de rebanadas (ecuaciones 3.6 y 3.7) y del disco (ecuaciones 3.8 y 3.9).

1. Calcular el volumen del solido que se muestra en la figura utilizando el método de las rebanadas si se proporciona una sección transversal cuya forma es un triángulo equilátero a un diámetro de una base circular cuyo radio es 4 unidades.



Solución:

Primero analizamos la base del solido que tiene una base circular (véase la figura izquierda), y una sección transversal de forma de un triángulo equilátero (véase la figura derecha).



Obtenemos la ecuación de la curva a partir de la ecuación de la circunferencia definida por:

$x^2 + y^2 = 4^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = 16$

$y = \sqrt{16 - x^2}$

Después, se obtiene el área de la sección transversal (método de la rebanada) para calcular el volumen usando la expresión 3.6.

$$A(x) = b \cdot h = y \cdot \sqrt{(2y)^2 - (y)^2} = y \cdot \sqrt{3}y = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2$$

$$A(x) = \sqrt{3}(16 - x^2)$$

Finalmente,

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_{-4}^{4} \sqrt{3}(16 - x^2)dx = \sqrt{3} \int_{-4}^{4} (16 - x^2)dx = \sqrt{3}\left|16x - \frac{1}{3}x^3\right|_{-4}^{4}$$

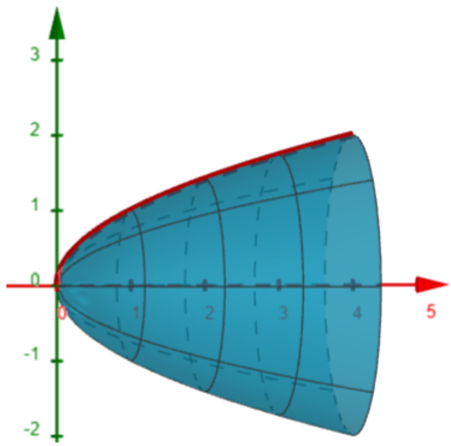
$$V = \sqrt{3}\left\{\left[16(4) - \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[16(-4) - \frac{1}{3}(-4)^3\right]\right\}$$

$$V = \frac{256}{3}\sqrt{3}\,u^3$$

2. Usando el método del disco, obtener el volumen del solido de revolución que se forma al girar alrededor del eje "x" la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.

Solución:

Antes de utilizar la expresión 3.8 se bosqueja la gráfica de la curva $y = \sqrt{x}$ que ha sido rotada alrededor del eje x (véase la figura).



Por lo tanto,

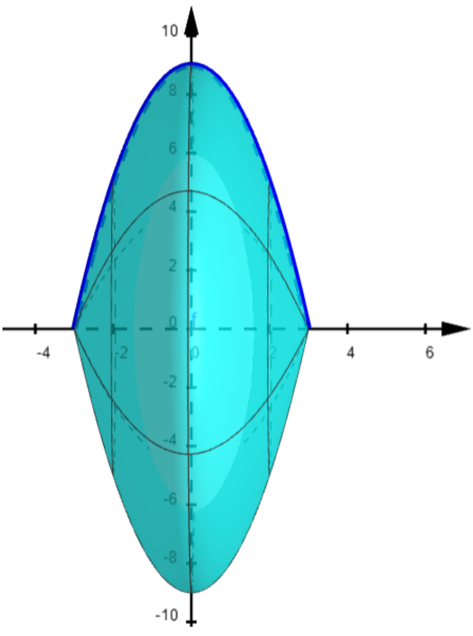
$$V = \pi \int_{0}^{4} [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \int_{0}^{4} x dx = \pi \left| \frac{1}{2} x^2 \right|_0^4 = \pi \left\{ \left[\frac{1}{2} (4)^2 \right] - [0] \right\}$$

$V = 8\pi\, u^3$

3. Utilizar el método del disco, para determinar el volumen del solido de revolución que se forma al girar alrededor del eje "x" la región acotada por las curvas $y = 9 - x^2$, $y = 0$.

Solución:

Antes de utilizar la ecuación 3.8 se bosqueja la gráfica de la curva $y = 9 - x^2$ considerando que $y = 0$ se establecen las rectas $x = -3$ y $x = 3$, y que ha sido rotada alrededor del eje x, tal como se muestra en la figura.



Por lo tanto,

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} (81 - 18x^2 + x^4) dx$$

Por simetría,

$$V = 2\pi \int_{0}^{3} (81 - 18x^2 + x^4)dx = 2\pi \left| 81x - 6x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right|_{0}^{3}$$

$$V = 2\pi \left\{ \left[81(3) - 6(3)^3 + \frac{1}{5}(3)^5 \right] - [0] \right\}$$

$$V = \frac{1296}{5}\pi\, u^3$$

4. Utilizar el método del disco, para determinar el volumen del solido de revolución que se forma al girar alrededor del eje "y" la región acotada por las curvas $y = x^2 + 1$, $x = 0$ $y = 5$.

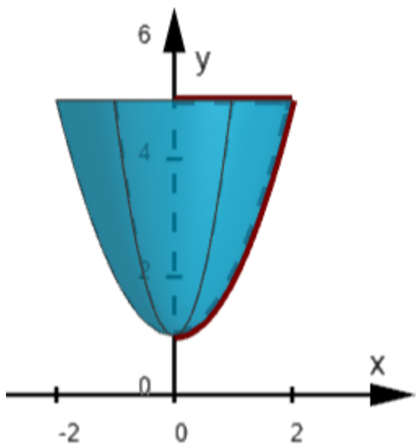
Solución:

En este ejercicio se utiliza la expresión 3.9 para obtener el volumen del solido de revolución generado al rotar con respecto al eje y (véase la figura). Por lo tanto, la curva $y = x^2 + 1$ debe expresarse en función de y:

$$x^2 = y - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{y - 1}$$

$$x = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad f(y) = \sqrt{y - 1}$$

Ahora se bosqueja la gráfica de la curva $y = x^2 + 1$ considerando que si $x = 0$ se establece la recta $y = 1$ y se sabe que $y = 5$, y que ha sido rotada alrededor del eje y, tal como se muestra en la figura.



Por lo tanto,

$$V = \pi \int_{c}^{d} [f(y)]^2 dy = \pi \int_{1}^{5} \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy = \pi \int_{1}^{5} (y-1) dy = \pi \left| \frac{1}{2} y^2 - y \right|_{1}^{5}$$

$$V = \pi \left\{ \left[\frac{1}{2}(5)^2 - 5\right] - \left[\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right] \right\} = 8\pi\, u^3$$

5. Utilizar el método del disco, para determinar el volumen del solido de revolución que se forma al girar alrededor del eje "x" la región acotada por las curvas $y = 4 - x^2$, $y = 1 - 0.25x^2$.

Solución:

Sean,

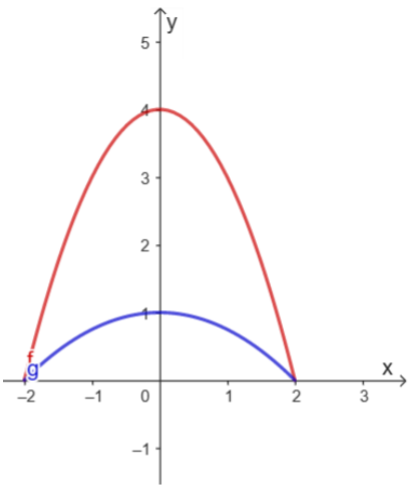
$$f(x) = y = 4 - x^2 \ \ y \ \ g(x) = y = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

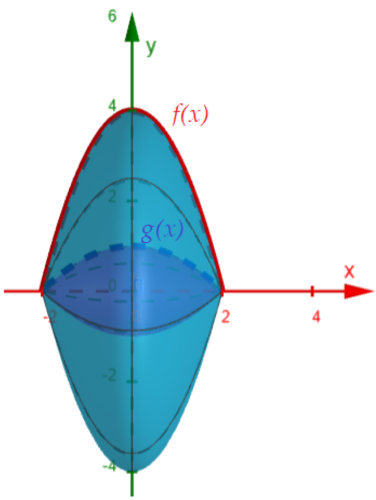
Igualamos $f(x)$ con $g(x)$:

$$4 - x^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 16 - 4x^2 = 4 - x^2$$

$$12 = 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 2$$

Los puntos de intersección entre las dos curvas son -2 y 2, cuyos valores serán los intervalos de la integral de volumen (véase la ecuación 3.10) mediante el método del disco. La figura muestra la gráfica en 2D de las curvas $f(x)$ y $g(x)$ y la grafica 3D del solido de revolución alrededor del eje x de la región acotada por las curvas en mención.





$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx = \pi \int_{-2}^{2} \left[(4 - x^2)^2 - \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[(16 - 8x^2 + x^4) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4\right) \right] dx$$

Por simetría,

$$V = 2\pi \int_0^2 \left(15 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4\right) dx = 2\pi \left| 15x - \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{16}x^5 \right|_0^2$$

$$V = 2\pi \left\{ \left[15(2) - \frac{5}{2}(2)^3 + \frac{3}{16}(2)^5 \right] - [0] \right\} = 2\pi\{30 - 20 + 6\}$$

$$V = 32\pi\, u^3$$

6. Usando el método de la arandela, calcular el volumen del sólido obtenido al rotar la región bajo la curva $y = 9 - x^2$ para $0 \leq x \leq 3$ alrededor del eje vertical $x = -2$.

Solución:

En este caso, el eje de rotación es la línea vertical $x = -2$, en consecuencia, la sección transversal perpendicular a $x = -2$ tendrá una anchura dy, esto significa que tanto la función como los límites de integración estan en función de y. Por lo tanto,

$$y = 9 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 9 - y \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{9 - y}$$

Otro punto importante es considerar que al rotar verticalmente en la línea $x = -2$ el solido se generado internamente tiene un hueco, por lo tanto,

$$f(y) = \sqrt{9 - y} + 2 \qquad\qquad g(y) = 2$$

Finalmente,

$$V = \pi \int_c^d \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy = \pi \int_0^9 \left[\left(\sqrt{9 - y} + 2\right)^2 - (2)^2 \right] dy$$

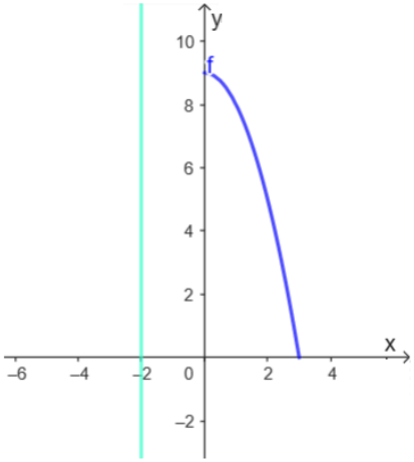
$$V = \pi \int_0^9 \left[(9 - y) + 4\sqrt{9 - y} + 4 - 4 \right] dy = \pi \int_0^9 \left(9 - y + 4\sqrt{9 - y} \right) dy$$

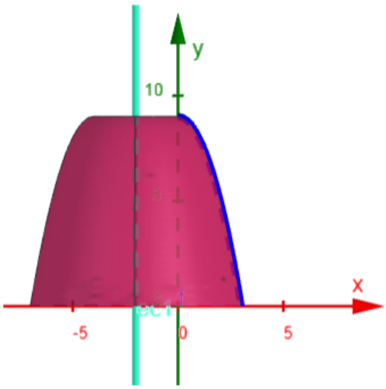
$$V = \pi \left| 9y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{8}{3}(9-y)^{\frac{2}{3}} \right|_0^9$$

$$V = \pi \left\{ \left[9(9) - \frac{1}{2}(9)^2 - \frac{8}{3}(9-9)^{\frac{2}{3}} \right] - \left[-\frac{8}{3}(9-0)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}$$

$$V = \pi \left[\left(81 - \frac{81}{2} \right) - (-72) \right] = \pi \left(\frac{81}{2} + 72 \right)$$

$$V = \frac{225}{2} \pi \, u^3$$





7. Usando el método de la arandela, calcular el volumen del sólido obtenido al rotar la región entre las curvas $y = \sec x$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$ alrededor del eje x.

Solución:

En este caso, se tiene una función trigonométrica $\sec x$ (véase la figura) que interseca con las rectas $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$ y que al rotar con respecto al eje x se obtiene el sólido de revolución que se muestra en la figura. En consecuencia, la sección transversal es una arandela con radio interior $(y = g(x) = 1)$ y radio exterior $(y = f(x) = \sec x)$. Por lo tanto,

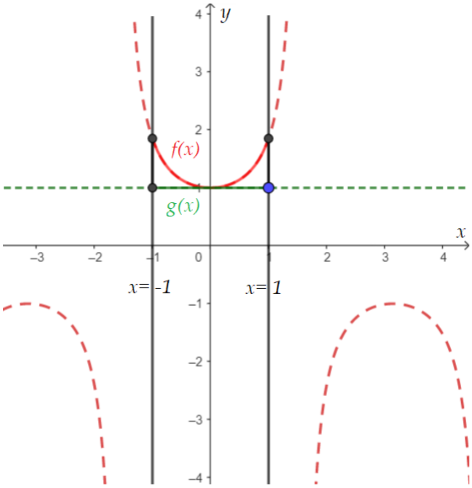
$$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx = \pi \int_{-1}^{1} [(\sec x)^2 - (1)^2] dx$$

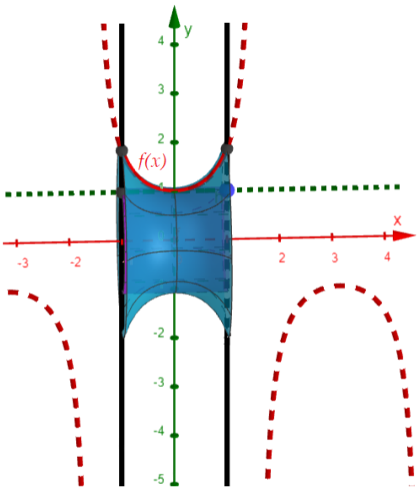
$$V = \pi \int_{-1}^{1} (\sec^2 x - 1)\, dx$$

Por simetría,

$$V = 2\pi \int_{0}^{1} (\sec^2 x - 1)\, dx = 2\pi |\tan x - x|_0^1 = 2\pi\{[\tan(1) - 1] - [(\tan(0) - 0]\}$$

$$V = 2\pi(\tan 1 - 1) = 3.502\, u^3$$





8. Usando el método de la arandela, determinar el volumen del sólido obtenido al rotar la región entre las curvas $y^2 = x$, $x = 2y$ alrededor del eje y.

Solución:

Usando la expresión 3.11 para el método de arandelas alrededor del eje y, las dos curvas $f(y) = 2y$ y $g(y) = y^2$ (véase la figura) corresponden al radio exterior e interior respectivamente. Por lo tanto, se procede a calcular las intersecciones de ambas curvas,

$$f(y) = g(y) \quad \Rightarrow \quad 2y = y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ \wedge \ y = 2$$

En este caso, los puntos que intersecan las curvas $f(y)$ y $g(y)$ son $y = 0 \ \wedge \ y = 2$. El sólido de revolución generado alrededor del eje y se muestra en la figura, es decir, que el volumen del sólido es,

$$V = \pi \int_{c}^{d} \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy = \pi \int_{0}^{2} [(2y)^2 - (y^2)^2] dy$$

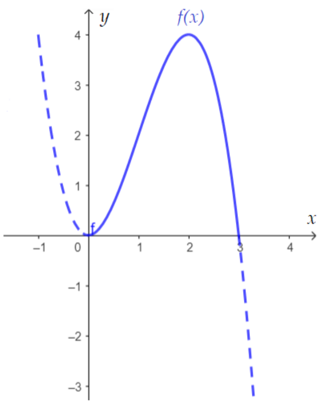
$$V = \pi \int_{0}^{2} (4y^2 - y^4) dy = \pi \left| \frac{4}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right|_{0}^{2}$$

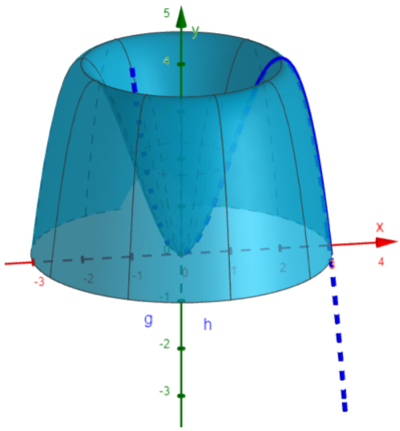
$$V = \pi \left\{ \left[\frac{4}{3} (2)^3 - \frac{1}{5} (2)^5 \right] - 0 \right\} = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right)$$

$$V = \frac{64}{15} \pi \, u^3$$

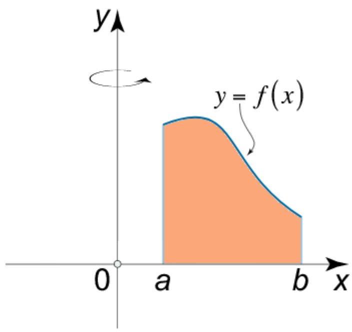
3.3. Sólidos de revolución: método de capas cilíndricas.

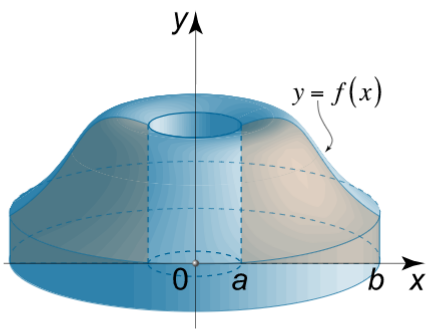
En algunos casos puede resultar difícil o imposible determinar el volumen de un sólido de revolución (véase la figura 3D) por el método del disco o de la arandela. En este caso, con el método de la arandela, la sección transversal del sólido de revolución es la misma que la de la arandela (véase la figura). No obstante, para aplicar este método es necesario transformar la función $y = 3x^2 - x^3$ (véase la figura 2D) en la forma $x = f(y)$, tarea nada sencilla.





En este tipo de situaciones, el método para calcular el volumen se denomina método de los cascarones cilíndricos. Con este método se considera el sólido como un conjunto de cascarones cilíndricos concéntricos que circunscriben el eje de revolución. Utilizando los métodos del disco o de la arandela, la integración se efectúa a lo largo del eje de coordenadas paralelo a los ejes de revolución. En cambio, con el método de los cascarones la integración se efectúa a lo largo del eje de coordenadas perpendicular al eje de revolución. Al igual que antes, se considera una región acotada por la función $y = f(x)$ en el eje x, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ en la que $0 \leq a < b$





Así, mediante la integral se obtiene el volumen del sólido que se obtiene al girar la región alrededor del eje y.

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \qquad (3.12)$$

Donde $2\pi x$ representa el perímetro del cascarón o coraza elemental, la función $f(x)$ corresponde a la altura del cascarón y dx a su espesor.

En el caso de que dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ acoten la región en un intervalo $[a, b]$, donde $0 \leq g(x) \leq f(x)$ se obtendrá el volumen del sólido al girar la región alrededor del eje y, que se expresará mediante la integral de la diferencia de dos funciones, es decir,

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \qquad (3.13)$$

Estas fórmulas son fácilmente modificables si el sólido se forma girando alrededor del eje x. Así, las dos ecuaciones anteriores se convierten en:

a. Si la región está acotada por una curva y el eje y,

$$V = 2\pi \int_c^d yf(y)dy \qquad (3.14)$$

b. Si la región está acotada por dos curvas,

$$V = 2\pi \int_c^d y[f(y) - g(y)]dy \qquad (3.15)$$

Ahora, supóngase una región acotada entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$ y que gira alrededor de la recta vertical $x = h$. Para este caso, se aplican las siguientes expresiones para obtener el volumen del sólido de revolución,

$$V = \begin{cases} 2\pi \int_a^b (x-h)f(x)dx\,, & \text{si}\, h \le a < b \\ 2\pi \int_a^b (h-x)f(x)dx\,, & \text{si}\, a < b \le h \end{cases}. \tag{3.16}$$

De forma similar, si la región acotada por una curva $x = f(y)$ y el eje y en el intervalo $[c, d]$ gira alrededor de la recta horizontal $y = m$, se obtiene un sólido cuyo volumen viene dado por,

$$V = \begin{cases} 2\pi \int_c^d (y-m)f(y)dy\,, & \text{si}\, m \le c < d \\ 2\pi \int_c^d (m-y)f(y)dy\,, & \text{si}\, c < d \le h \end{cases}. \tag{3.17}$$

A continuación, se realiza la resolución de problemas de solidos de revolución mediante el método de los cascarones cilíndricos.

1. Usando el método de las capas cilíndricas, calcular el volumen del sólido obtenido al rotar la región bajo la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el intervalo $[0, 3]$ alrededor del eje y.

Solución:

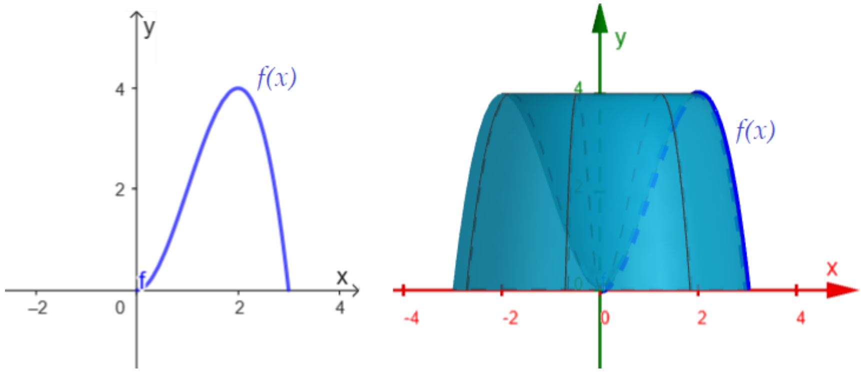
Este ejercicio se aplica el método de capas cilíndricas para determinar el volumen al rotar la curva $f(x) = 3x^2 - x^3$ alrededor del eje y, y está definida por,

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx = 2\pi \int_0^3 x(3x^2 - x^3)dx = 2\pi \int_0^3 (3x^3 - x^4)dx$$

$$V = 2\pi \left|\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right|_0^3 = 2\pi\left\{\left[\frac{3}{4}(3)^4 - \frac{1}{5}(3)^5\right] - [0]\right\}$$

$$V = 2\pi\left[\frac{243}{4} - \frac{243}{5}\right] = 2\pi\left[\frac{1215 - 972}{20}\right]$$

$$V = \frac{243}{10}\pi\, u^3$$



2. Usando el método de las capas cilíndricas, calcular el volumen del sólido obtenido de la región acotada por las curvas $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$ al rotar alrededor del (a) eje x, y (b) la recta $x = 2$.

Solución:

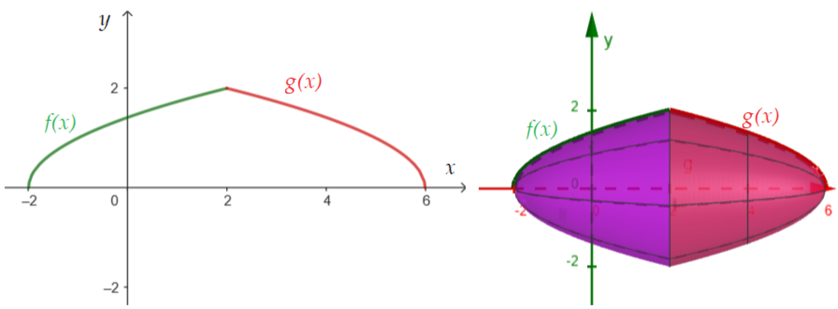
(a) la figura muestra la región acotada por las curvas $g(y) = x = y^2 - 2$ y $f(y) = x = 6 - y^2$ que permite generar el sólido de revolución alrededor del eje y. Para este inciso se aplica la expresión 3.15 del método de capas cilíndricas para determinar el volumen, es decir,

$$V = 2\pi \int_c^d y[g(y) - f(y)]dy = 2\pi \int_0^2 y[(6 - y^2) - (y^2 - 2)]dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y(8 - 2y^2)dy = 2\pi \int_0^2 (8y - 2y^3)dy = 2\pi \left|4y^2 - \frac{1}{2}y^4\right|_0^2$$

$$V = 2\pi \left[4(2)^2 - \frac{1}{2}(2)^4\right] = 2\pi[16 - 8]$$

$$V = 16\pi\, u^3$$



(b) en este inciso se aplica el método de capas cilíndricas para determinar el volumen al rotar en la recta $x = 2$. La figura muestra el sólido de revolución cuando la rotación es alrededor de la recta $x = 2$, entonces el radio medio es $(x - 2)$ y la altura es $2g(x)$ en el intervalo $2 \leq x \leq 6$ por lo tanto, el volumen se define como,

$$V = 2\pi \int_a^b (x-2)[2g(x)]dx = 2\pi \int_2^6 (x-2)\left(2\sqrt{6-x}\right)dx$$

$$V = 4\pi \int_2^6 (x-2)\sqrt{6-x}dx$$

Se aplica cambio de variables, es decir, $u = \sqrt{6-x}$

$$u^2 = 6 - x \qquad \Rightarrow \qquad x = 6 - u^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = -2udu$$

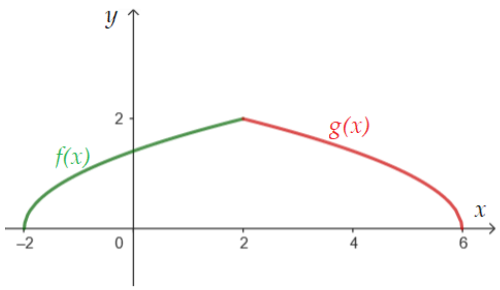
Finalmente,

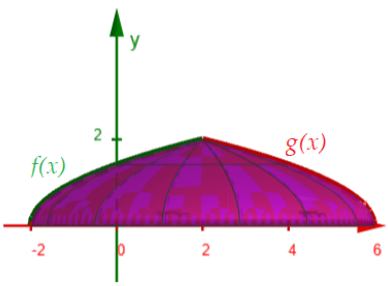
$$V = 4\pi \int_2^6 (6 - u^2 - 2)u(-2udu) = 4\pi \int_2^6 2(u^2 - 4)u^2 du = 8\pi \int_2^6 (u^4 - 4u^2)du$$

$$V = 8\pi \left[\left|\frac{1}{5}u^5 - \frac{4}{3}u^3\right|_2^6\right] = 8\pi \left|\frac{1}{5}\left(\sqrt{6-x}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{6-x}\right)^3\right|_2^6$$

$$V = 8\pi \left\{\left[\frac{1}{5}\left(\sqrt{0}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{0}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\sqrt{4}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3\right]\right\} = 8\pi\left\{-\frac{32}{5} + \frac{32}{3}\right\}$$

$$V = \frac{512}{15}\pi\, u^3$$





3. Utilice el método de las capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido de revolución alrededor del eje y que se obtiene de la región acotada por la curva $y = 3x - x^3$, el eje x y la recta $x = 1$.

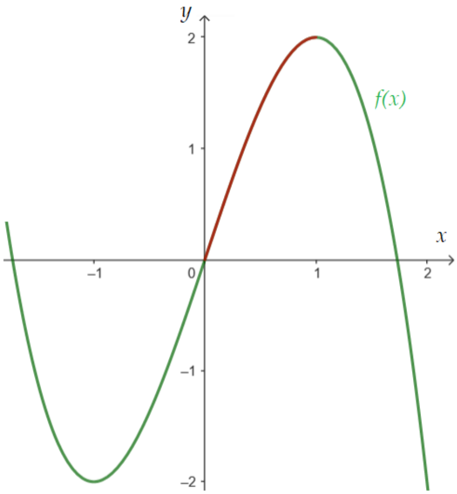
Solución:

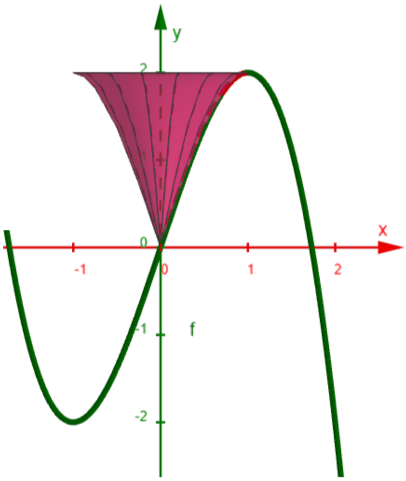
Aplicando el método de capas cilíndricas para determinar el volumen del solido de revolución al rotar en el eje y, es decir,

$$V = 2\pi \int_c^d xf(x)dx = 2\pi \int_0^1 x(3x - x^3)dx = 2\pi \int_0^1 (3x^2 - x^4)dx$$

$$V = 2\pi \left| x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right|_0^1 = 2\pi \left[(1)^3 - \frac{1}{5}(1)^5 \right] = 2\pi \left[1 - \frac{1}{5} \right]$$

$$V = \frac{8}{5}\pi\, u^3$$





4. Utilice el método de las capas cilíndricas para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 9$ alrededor del eje x.

Solución:

Al rotar alrededor del eje x el volumen se calcula en función de y, es decir, que:

$$y = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{y}$$

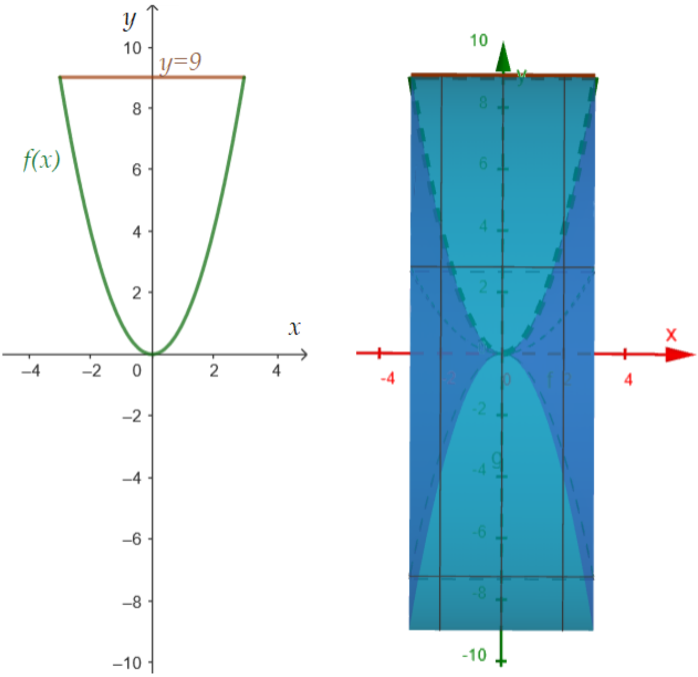
Si $y = 9$, entonces: $x = \sqrt{9} = \pm 3$, esto indica que la gráfica está en el intervalo $-3 \le x \le 3$. La región acotada entre las curvas $y = x^2$ e $y = 9$ se muestra en la figura, y también se observa el sólido de revolución general alrededor del eje x.

Entonces el radio medio es y y la altura es $f(y)[\sqrt{y}-(-\sqrt{y})]=2\sqrt{y}$ en el intervalo de $-3\leq x\leq 3$ por lo tanto, el volumen se define como,

$$V=2\pi\int_{c}^{d} yf(y)dx=2\pi\int_{0}^{9} y(2\sqrt{y})dy=4\pi\int_{0}^{9} y^{\frac{3}{2}}dy$$

$$V=4\pi\left|\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_{0}^{9}=4\pi\left[\frac{2}{5}(9)^{\frac{5}{2}}\right]=4\pi\left[\frac{486}{5}\right]$$

$$V=\frac{1944}{5}\pi\, u^3$$



5. Utilice el método de las capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las curvas $y=\sqrt[3]{x}+1$, $y=1-x$, $x=1$ alrededor de la recta $x=1$.

Solución:

Al rotar alrededor de la recta $x=1$ (verticalmente) el volumen se calcula en función de x. La figura muestra el sólido de revolución cuando la rotación es alrededor de la recta $x=1$, entonces el radio medio se convierte en $(1-x)$ y la altura también cambia, es decir, $[f(x)-g(x)]$ en el intervalo de $0 \leq x \leq 1$ por lo tanto, el volumen se define como,

$$V = 2\pi \int_c^d (1-x)[f(x)-g(x)]dx = 2\pi \int_0^1 (1-x)\left[x^{\frac{1}{3}} + 1 - (1-x)\right] dx$$

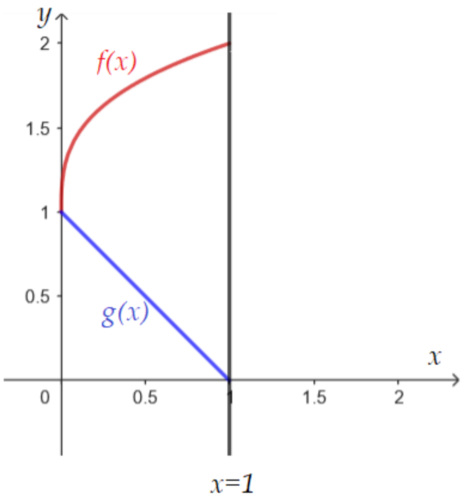
$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)\left(x^{\frac{1}{3}} + x\right) dx = 2\pi \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} + x - x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx$$

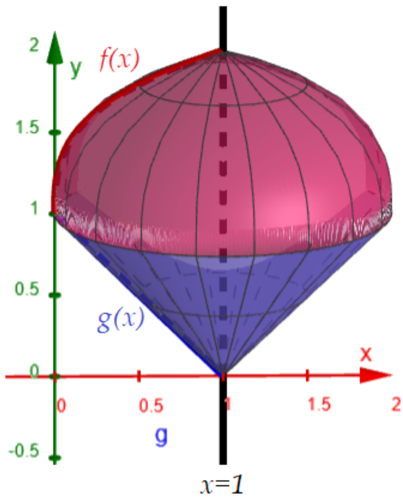
$$V = 2\pi \left| \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^3 \right|_0^1$$

$$V = 2\pi \left[\frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{3}{7}(1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}(1)^3\right] = 2\pi \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right]$$

$$V = 2\pi \left[\frac{63+42-36-28}{84}\right]$$

$$V = \frac{41}{42}\pi\, u^3$$





6. Utilice el método de las capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las curvas $y = x^2 - 2$, $y = 2 - x^2$, segundo y tercer cuadrante alrededor del eje y.

Solución:

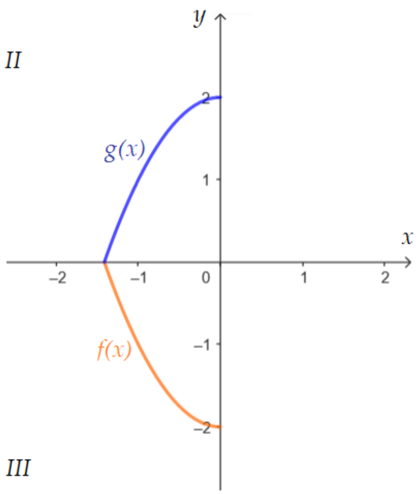
Al rotar alrededor del eje y el volumen se calcula en función de x. La figura muestra la región acotada por las curvas $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2 - x^2$ entre el segundo y tercer cuadrante. El sólido de revolución cuando la rotación es alrededor del eje y, el radio medio se convierte en $(-x)$ y la altura también cambia, es decir, $[g(x) - f(x)]$ en el intervalo de $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ por lo tanto, el volumen se define como,

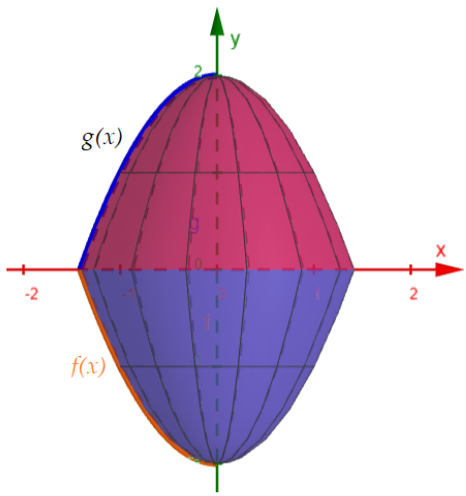
$$V = 2\pi \int_a^b (-x)[g(x) - f(x)]dx = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{0} (-x)[2 - x^2 - (x^2 - 2)]dx$$

$$V = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{0} (-x)(4 - 2x^2)dx = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{0} (2x^3 - 4x)dx = 2\pi \left|\frac{1}{2}x^4 - 2x^2\right|_{-\sqrt{2}}^{0}$$

$$V = 2\pi \left[[0] - \left[\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(-\sqrt{2}\right)^2\right]\right] = 2\pi(-2 + 4)$$

$$V = 4\pi\, u^3$$





7. Utilice el método de las capas cilíndricas para hallar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las curvas $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = -1$.

Solución:

Al rotar alrededor del eje y el volumen se calcula en función de x. La figura muestra la región acotada por las curvas $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4x - x^2$ en el intervalo

[0, 4]. El sólido de revolución cuando la rotación es alrededor del eje y, el radio medio se convierte en $(x+1)$ y la altura también cambia, es decir, $[g(x)-f(x)]$ en el intervalo de $0 \leq x \leq 4$ por lo tanto, el volumen se define como,

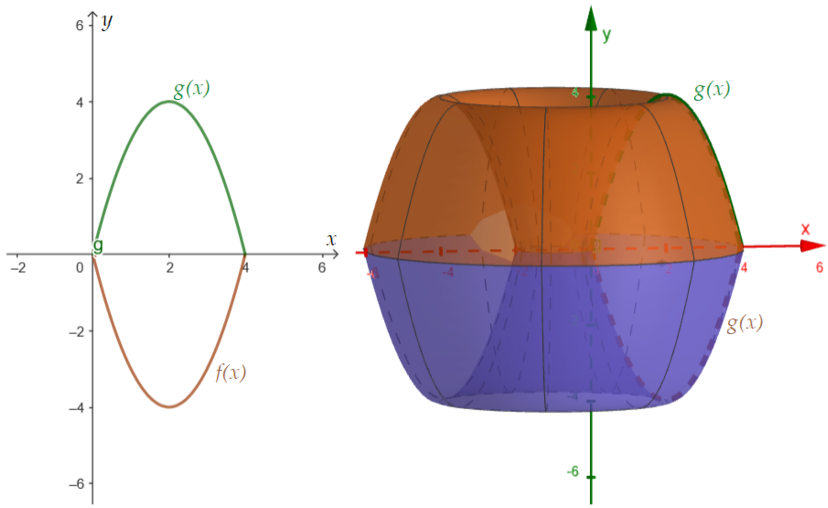
$$V = 2\pi \int_a^b (x+1)[g(x)-f(x)]dx = 2\pi \int_0^4 (x+1)[4x - x^2 - (x^2 - 4x)]dx$$

$$V = 2\pi \int_0^4 (x+1)(8x - 2x^2)dx = 2\pi \int_0^4 (8x + 6x^2 - 2x^3)dx$$

$$V = 2\pi \left| 4x^2 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right|_0^4 = 2\pi \left[\left[4(4)^2 + 2(4)^3 - \frac{1}{2}(4)^4 \right] - [0] \right]$$

$$V = 2\pi(64 + 128 - 128)$$

$$V = 128\pi\, u^3$$



8. Utilice el método de las capas cilíndricas para obtener el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las curvas $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x - 4$, $y = 1$ alrededor del eje x.

Solución:

Al rotar alrededor del eje x el volumen se calcula en función de y. La figura muestra la región acotada por las curvas $f(x) = y = \sqrt{x-2}$, $g(x) = y = x - 4$ y $y = 1$ en el intervalo $1 \leq y \leq 2$. Expresamos las curvas en función de y,

$$y = \sqrt{x-2} \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = f(y) = y^2 + 2$$

$$y = x - 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = g(y) = y + 4$$

El sólido de revolución cuando la rotación es alrededor del eje y, el radio medio se convierte en (y) y la altura también cambia, es decir, $[g(y) - f(y)]$ en el intervalo de $1 \leq y \leq 2$ por lo tanto, el volumen se define como

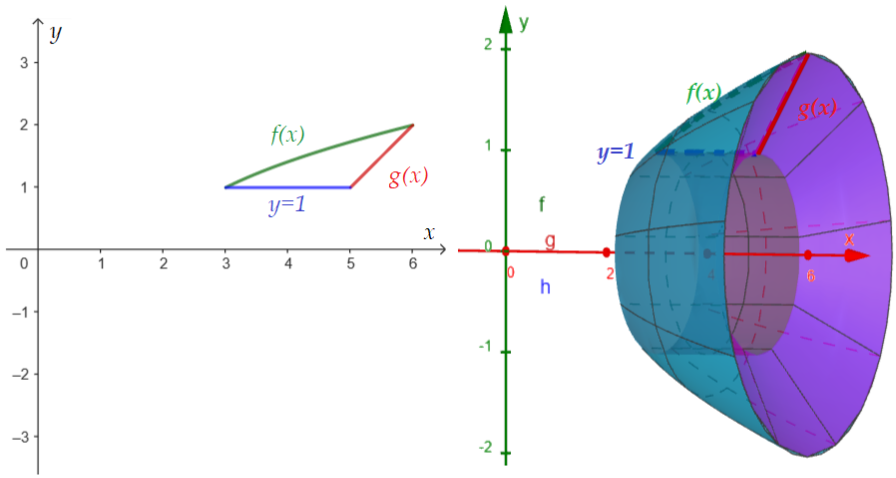
$$V = 2\pi \int_c^d y[g(y) - f(y)]dy = 2\pi \int_1^2 y[(y+4) - (y^2+2)]dy$$

$$V = 2\pi \int_1^2 y(2 + y - y^2)dy = 2\pi \int_1^2 (2y + y^2 - y^3)dy$$

$$V = 2\pi \left| y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right|_1^2 = 2\pi \left\{ \left[2^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^4\right] - \left[1^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^4\right] \right\}$$

$$V = 2\pi \left\{ \left[4 + \frac{8}{3} - 4\right] - \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] \right\} = 2\pi \left\{ \frac{8}{3} - \frac{13}{12} \right\}$$

$$V = \frac{19}{6}\pi \, u^3$$



9. Utilice el método de las capas cilíndricas para obtener el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las curvas $y = \sin x^2$, $x = 0$, $y = 1$ alrededor del eje y.

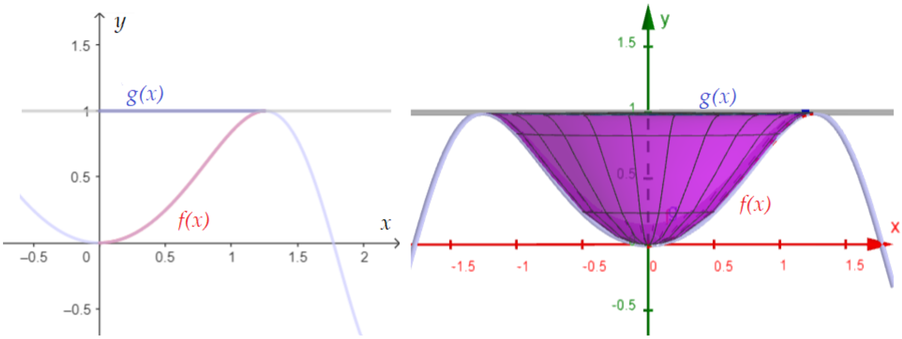
Solución:

En este ejercicio trata de una función trigonométrica que se interseca con la curva $y = 1$ para posteriormente rotarlas alrededor del eje y. Para rotaciones sobre el eje y se utiliza el volumen del solido de revolución en función de x. La figura muestra el plano 2D y 3D (se genera el sólido de revolución). Se procede a obtener el valor de intersección entre las curvas $f(x) = y = \sin x^2$ y $g(x) = y = 1$, es decir,

$$1 = \sin x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \sin^{-1}(1) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{\pi}{2}$$

En consecuencia, los extremos superior e inferior de la integral del volumen del solido de revolución son:

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



Por lo tanto,

$$V = 2\pi \int_a^b x[g(x) - f(x)]dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x[1 - (\sin x^2)]dx$$

$$V = 2\pi \left[\int_0^{\sqrt{\pi/2}} xdx - \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin x^2 \, dx \right]$$

En la segunda integral $x \sin x^2$ se aplica un cambio de variable, es decir,

$$u = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}du$$

$$V = 2\pi \left\{ \left| \frac{1}{2}x^2 \right|_0^{\sqrt{\pi/2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin u \, du \right\} = 2\pi \left\{ \left| \frac{1}{2}x^2 \right|_0^{\sqrt{\pi/2}} + \left| \frac{1}{2} \cos u \right|_0^{\sqrt{\pi/2}} \right\}$$

$$V = 2\pi\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - 0\right] + \left[\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\cos 0^2\right]\right\}$$

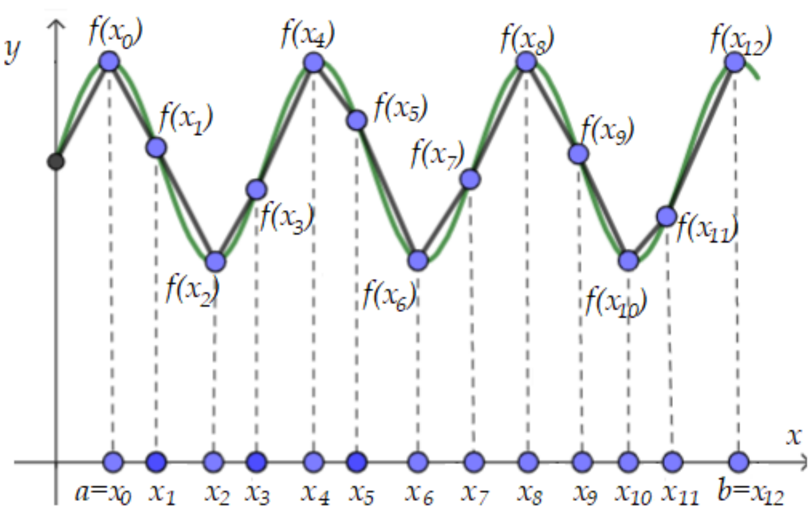
$$V = 2\pi\left\{\left[\frac{1}{4}\pi\right] + \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)\right]\right\} = 2\pi\left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right\} = 2\pi\left(\frac{\pi - 2}{4}\right)$$

$$V = \frac{\pi^2 - 2\pi}{2}\ u^3$$

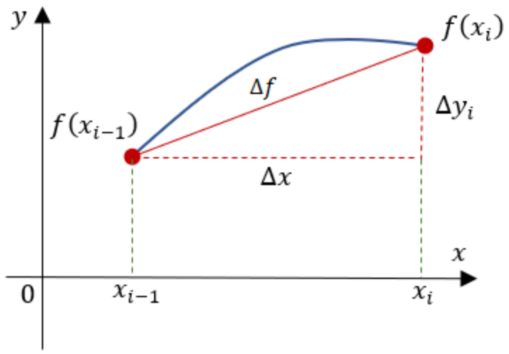
3.4. Longitud de arco.

Hasta ahora, la función $f(x)$ sólo era integrable o, a lo sumo, continua. No obstante, en el caso de la longitud de arco, se requiere que $f(x)$ sea más rigurosa. Es decir, que $f(x)$ tiene que ser diferenciable y, sobre todo, su derivada, $f'(x)$, tendrá que ser continua. Este tipo de funciones, que presentan derivadas continuas, reciben el nombre de funciones suavizadas.

Sea $f(x)$ una función suavizada y definida sobre $[a, b]$. El objetivo es obtener la longitud de la curva entre el punto $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$. Para aproximar la longitud de la curva, primero se utilizan segmentos de recta. Sea $P = \{x_i\}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, una división regular de $[a, b]$. Entonces, para $i = 1, 2, \ldots, n$, se construye un segmento de recta desde el punto $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$ hasta el punto $\big(x_i, f(x_i)\big)$. Aunque puede parecer lógico utilizar segmentos de línea horizontales o verticales, nos interesa que los segmentos de línea se aproximen lo más posible a la curva. La figura describe esta construcción para n=12.



Para determinar la longitud de cada segmento de la recta, se tiene en cuenta la variación de la distancia vertical y la variación de la distancia horizontal en cada intervalo. Al utilizar una distribución regular, las variaciones entre las distancias horizontales durante cada intervalo dependen de Δx. No obstante, la variación vertical cambia de un intervalo a otro, por lo tanto, se utiliza $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ como representación del cambio vertical en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tal como se muestra en la figura. Véase que algunos (o todos) valores de Δy_i en ocasiones son negativos.



De acuerdo con el teorema de Pitágoras, en este caso la longitud del segmento de línea es $\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Asimismo, puede escribirse como,

$$\Delta f = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$$

Entonces, en base al Teorema del Valor Medio, se tiene un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f'(x_i^*) = \Delta y_i / \Delta x$. Por tanto, la longitud del segmento de línea resulta ser

$$\Delta f = \Delta x \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}$$

Al añadir todas las longitudes de los segmentos de línea, se obtiene, la longitud de arco definida por,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} dx$$

Longitud del arco para $y = f(x)$

Sea $f(x)$ como una función suavizada en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, la longitud de arco de la porción de la gráfica de $f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$ está definida por,

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \qquad (3.18)$$

Longitud del arco para $x = f(y)$

Sea $f(y)$ como una función suavizada en el intervalo $[c, d]$. Por lo tanto, la longitud de arco de la porción de la gráfica de $f(y)$ desde el punto $(c, f(c))$ hasta $(d, f(d))$ está definida por,

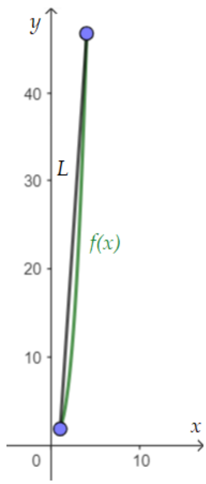
$$L = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy \qquad (3.19)$$

A continuación, se presenta la resolución de ejercicios para calcular la longitud de arco de una curva.

1. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución:

La figura muestra la gráfica obtenida de la curva $y = f(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ y que es continua en el intervalo $[1, 4]$. De acuerdo con la expresión 3.18 primero hay que calcular la derivada de $f'(x)$ dada por,



$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2}(2x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

Por lo tanto, se evalúa la expresión 3.18:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{1}^{4} \sqrt{1 + \left[2x\sqrt{x^2 + 1}\right]^2}\, dx$$

$$L = \int_{1}^{4} \sqrt{1 + 4x^2(x^2 + 1)} dx = \int_{1}^{4} \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1} dx$$

$$L = \int_{1}^{4} \sqrt{(2x^2 + 1)^2} dx = \int_{1}^{4} (2x^2 + 1) dx = \left|\frac{2}{3}x^3 + x\right|_{1}^{4}$$

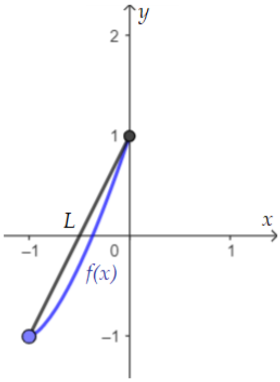
$$L = \left[\frac{2}{3}(4)^3 + 4\right] - \left[\frac{2}{3}(1)^3 + 1\right] = \frac{128}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 1$$

$L = 45$

2. Determinar la longitud de arco de la curva $(y+1)^2 = 4(x+1)^3$ en el intervalo $[-1, 0]$.

Solución:

La curva se expresa de manera explícita, es decir, $y = f(x) = 2(x+1)^{3/2} - 1$ y es continua en el intervalo $[-1, 0]$, tal como se muestra en la figura. Después se deriva $f(x)$ y es,



$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}(x+1)^{1/2} = 3(x+1)^{1/2} = 3\sqrt{x+1}$$

Esta derivada $f'(x)$ se reemplaza en la expresión 3.18:

$$L = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \left[3\sqrt{x+1}\right]^2}dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + 9(x+1)}dx$$

$$L = \int_{-1}^{0} \sqrt{9x+10}dx = \int_{-1}^{0} (9x+10)^{1/2}dx$$

Aplicamos cambio de variable:

$$v = 9x + 10 \quad \Rightarrow \quad dv = 9dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{9}dv$$

$$L = \int_{-1}^{0} v^{1/2} \cdot \frac{1}{9}dv = \frac{1}{9}\int_{-1}^{0} v^{1/2}dv = \left|\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}v^{3/2}\right|_{-1}^{0} = \left|\frac{2}{27}\left(\sqrt{9x+10}\right)^3\right|_{-1}^{0}$$

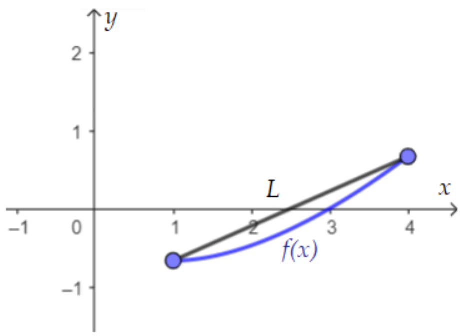
$$L = \left[\frac{2}{27}\left(\sqrt{9(0)+10}\right)^3\right] - \left[\frac{2}{27}\left(\sqrt{9(-1)+10}\right)^3\right] = \frac{2}{27}\left(\sqrt{10}\right)^3 - \frac{2}{27}(1)$$

$$L = 2.27$$

3. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución:

En la figura se observa la gráfica de la curva $y = f(x) = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$ y que es continua en el intervalo $[1, 4]$. A continuación, se obtiene la derivada de $f(x)$,



$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2x^{1/2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^{1/2} \cdot x^{1/2} \; - 1}{2x^{1/2}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

Esta derivada $f'(x)$ se reemplaza en la expresión 3.18:

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left[\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right]^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4x}}\, dx$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{4x + x^2 - 2x + 1}{4x}}\, dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{4x}}\, dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\, dx$$

$$L = \int_1^4 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\, dx = \int_1^4 \frac{x}{2x^{1/2}}\, dx + \int_1^4 \frac{1}{2x^{1/2}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^4 x^{1/2} dx + \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-1/2} dx$$

$$L = \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2} \cdot 2x^{1/2}\right|_1^4 = \left|\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + \sqrt{x}\right|_1^4$$

$$L = \left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 + \sqrt{4}\right] - \left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{1}\right)^3 + \sqrt{1}\right] = \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1$$

$$L = \frac{10}{3}$$

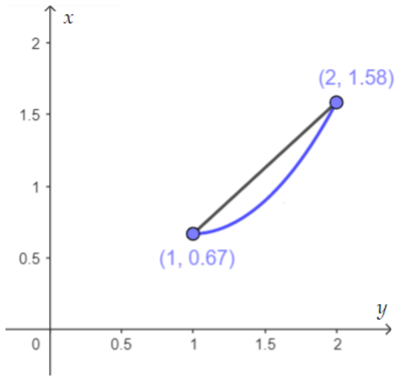
4. Determinar la longitud de arco de la curva $6xy = y^4 + 3$ en el intervalo $1 \le y \le 2$.

Solución:

La curva $6xy = y^4 + 3$ no se expresa en términos de x, ya que hacerlo no es tan sencillo por lo que se va a expresar en términos de y, por lo tanto,

$$x = \frac{1}{6}\frac{y^4}{y} + \frac{3}{6y} = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$$

$$f(y) = x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$$



La función $f(y)$ es continua en el intervalo $1 \leq y \leq 2$, y después se deriva,

$$f'(y) = \frac{1}{6}\cdot 3y^2 - \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^{-2}$$

$$f'(y) = \frac{1}{2}(y^2 - y^{-2})$$

Finalmente, se reemplaza en la expresión 3.19,

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [f'(y)]^2}dy = \int_1^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left((y^2 - y^{-2})\right)\right]^2}\, dy$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(y^2 - y^{-2})^2 dy} = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(y^4 - 2 + y^{-4})dy}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^{-4}dy} = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-4}dy}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}(y^2 + y^{-2})^2\, dy} = \int_1^2 \frac{1}{2}(y^2 + y^{-2})\, dy = \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1}y^{-1}\right|_1^2$$

$$L = \left|\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2y}\right|_1^2 = \left[\frac{1}{6}(2)^3 - \frac{1}{2(2)}\right] - \left[\frac{1}{6}(1)^5 - \frac{1}{2(1)}\right] = \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

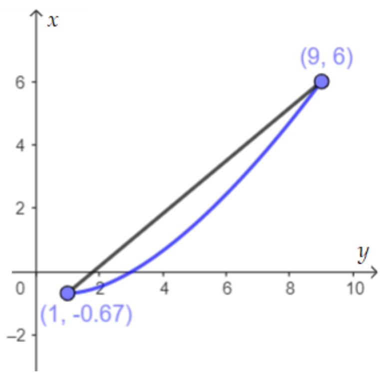
$$L = \frac{17}{12}$$

5. Determinar la longitud de arco de la curva $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$ en el intervalo $1 \leq y \leq 9$.

Solución:

La figura muestra la curva $f(y) = x = \frac{1}{3}\left(\sqrt{y}\right)^3 - \sqrt{y}$ y que es continua en el intervalo $1 \le y \le 9$. Después se procede a calcular la derivada de $f(y)$,

$$f'(y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{y} - \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



Finalmente, se reemplaza en la expresión 3.19,

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [f'(y)]^2}dy = \int_1^9 \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^{2}} dy$$

$$L = \int_1^9 \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2} dy$$

$$L = \int_1^9 \sqrt{1 + \frac{y}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y}}dy = \int_1^9 \sqrt{\frac{y}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y}}dy$$

$$L = \int_1^9 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^{2}} dy = \int_1^9 \left(\frac{y^{1/2}}{2} + \frac{1}{2y^{1/2}}\right)dy$$

$$L = \frac{1}{2}\int_1^9 y^{\frac{1}{2}}dy + \frac{1}{2}\int_1^9 y^{-\frac{1}{2}}dy = \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2y^{\frac{1}{2}}\right|_1^9 = \left|\frac{1}{3}\left(\sqrt{y}\right)^3 + \sqrt{y}\right|_1^9$$

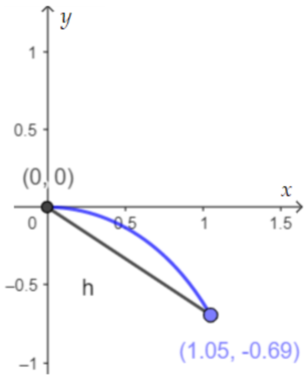
$$L = \left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{9}\right)^3 + \sqrt{9}\right] - \left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{1}\right)^3 + \sqrt{1}\right] = 9 + 3 - \frac{1}{3} - 1$$

$$L = \frac{32}{3}$$

6. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \ln(\cos x)$ en el intervalo $0 \le x \le \pi/2$.

Solución:

La figura muestra la curva $f(x) = y = \ln(\cos x)$ y que es continua en el intervalo $0 \leq x \leq \pi/3$. A partir de la curva se obtiene la derivada $f'(x)$,



$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$$

Finalmente, se reemplaza en la expresión 3.18,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + (-\tan x)^2}dx$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \tan^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \sec x\,dx$$

$$L = |\ln(\sec x + \tan x)|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[\ln\left(\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right)\right] - [\ln(\sec 0 + \tan 0)]$$

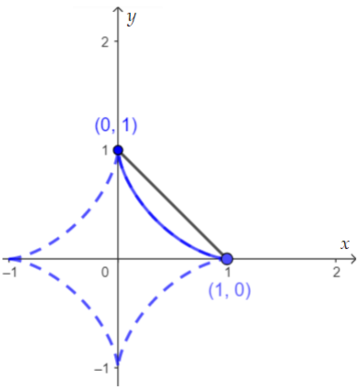
$$L = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + 0)$$

$$L = \ln(2 + \sqrt{3})$$

7. Determinar la longitud de arco de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Solución:

La curva dada esta expresada en forma implícita, se requiere ser expresada explícitamente, es decir, $y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$. La figura muestra la curva $f(x) = y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$. A partir de la curva se obtiene la derivada $f'(x)$,



$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$f'(x) = -x^{-1/3}\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2}$$

El ejercicio no nos indica el intervalo de valores de continuidad. Para calcular la longitud de arco de la curva $f(x)$, obsérvese la figura que tiene 4 tramos de longitud idénticos. Por lo tanto, se analiza un tramo de $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$ y por simetría la expresión 3.18 se define como,

$$L = 4\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+(-x^{-1/3}(1-x^{2/3})^{1/2})^2}dx$$

$$L = 4\int_0^1 \sqrt{1+x^{-2/3}(1-x^{2/3})}dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+x^{-2/3}-1}dx = 4\int_0^1 \sqrt{x^{-2/3}}dx$$

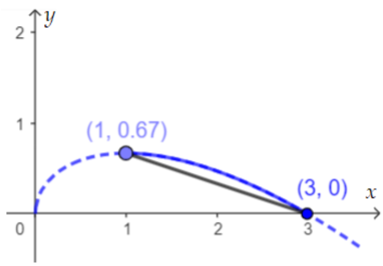
$$L = 4\int_0^1 x^{-1/3}dx = 4\left|\frac{3}{2}x^{2/3}\right|_0^1 = 4\left\{\left[\frac{3}{2}(1)^{2/3}\right]-[0]\right\} = 4\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$L = 6$$

8. Determinar la longitud de arco de la curva $9y^2 = x(x-3)^2$ en el primer cuadrante desde el punto $x = 1$ hasta el punto $x = 3$.

Solución:

La figura muestra la gráfica de curva $9y^2 = x(x-3)^2$ en el primer cuadrante en el intervalo $1 \leq x \leq 3$. A continuación, la ecuación de la curva se presenta como una función explicita en términos de x, dada por,



$$\sqrt{9y^2} = \sqrt{x(x-3)^2} \qquad \Rightarrow \qquad 3y = \sqrt{x}(x-3)$$

$$f(x) = y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x)^{3/2} - x^{1/2}$$

Luego se calcula su deriva y después se reemplaza en la expresión 3.18.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Finalmente, en la expresión 3.18,

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_1^3 \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$L=\int_1^3 \sqrt{1+\left(\frac{x}{4}-2\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4x}\right)}dx=\int_1^3 \sqrt{1+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}}dx$$

$$L=\int_1^3 \sqrt{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}}dx=\int_1^3 \sqrt{\left(\frac{x^{1/2}}{2}+\frac{1}{2x^{1/2}}\right)^2}\,dx=\int_1^3 \left(\frac{x^{1/2}}{2}+\frac{1}{2x^{1/2}}\right)dx$$

$$L=\frac{1}{2}\int_1^3 x^{1/2}dx+\frac{1}{2}\int_1^3 x^{-1/2}dx=\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{2}\cdot 2x^{1/2}\ \right|_1^3$$

$$L=\left|\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\ \right|_1^3=\left[\frac{1}{3}\sqrt{3^3}+\sqrt{3}\right]-\left[\frac{1}{3}\sqrt{1^3}+\sqrt{1}\right]=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$$

$$L=2.131$$

9. Calcular la longitud de arco de la curva $f(x)$ en el intervalo $0\le x\le \pi/2$ si

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{\cos t}\,dt$$

Solución:

La curva $f(x)$ se deriva aplicando el teorema fundamental del cálculo, por lo tanto,

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{\cos t}\,dt\right]=\sqrt{\cos x}$$

Reemplazamos en la expresión 3.18,

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}dx=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica,

$$\cos^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(1+\cos x)\qquad\Rightarrow\qquad(1+\cos x)=2\cos^2\frac{1}{2}x$$

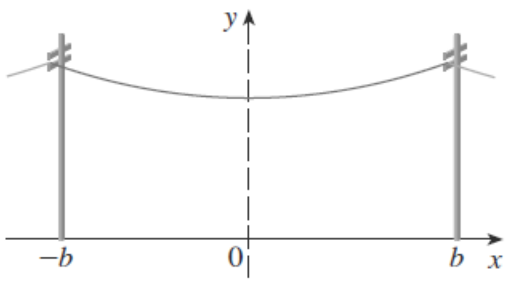
Finalmente,

$$L = \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2 \frac{1}{2}x}\, dx = \sqrt{2}\int_{0}^{\pi/2} \cos\frac{1}{2}x\, dx = \left|2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}x\right|_{0}^{\pi/2}$$

$$L = \left[2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] - \left[2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(0)\right] = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} - 0 = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L = 2$$

10. La figura muestra un cable telefónico que cuelga entre dos postes en $x = -b$ y $x = b$. Tiene forma de catenaria con ecuación $y = c + a\cosh(x/a)$. (a) Hallar la longitud del cable en términos de a y b, (b) suponiendo que los dos postes telefónicos están separados 50 m, la longitud del cable entre los postes es 51 m, y si el punto más bajo del cable debe estar a 20 m del suelo, ¿a qué altura de cada poste debe fijarse el cable?



Solución:

(a) Para la curva dada $f(x) = y = c + a\cosh(x/a)$ se va a derivar para poder calcular la longitud del cable en términos de a y b mediante el uso de la expresión 3.18.

$$f'(x) = a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Reemplazamos en la expresión 3.18,

$$L = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \left[\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2}\, dx = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica,

$$\cosh^2\frac{x}{a} = 1 + \sinh^2\frac{x}{a}$$

Finalmente, y por simetría,

$$L = 2\int_0^b \sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}\,dx = 2\int_0^b \cosh\frac{x}{a}\,dx = \left|2a\sinh\frac{x}{a}\right|_0^b = \left[2a\sinh\frac{b}{a}\right] - [0]$$

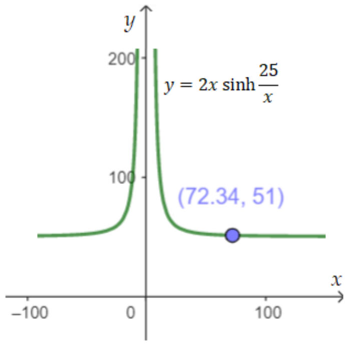
$$L = 2a\sinh\frac{b}{a}$$

(b) Si el punto más bajo de cable es 20 m, eso ocurre cuando $x = 0$:

$$f(0) = c + a = 20 \qquad \Rightarrow \qquad c = 20 - a$$

Además, los dos postes telefónicos están separados 50 m (es decir, que $b = 25\,m$), la longitud del cable entre los postes es $L = 51\,m$. La figura muestra la gráfica de la curva $L = y$ y que está dada por,

$$y = 2x\sinh\frac{25}{x}$$



De la figura se observa que cuando $y = 51\,m$, entonces x es,

$$x = a = 72.34\,m$$

Finalmente, la altura de cada poste donde debe fijarse el cable está dada por,

$$f(x) = c + a\cosh\left(\frac{25}{a}\right) = 20 - a + a\cosh\left(\frac{25}{a}\right)$$

$$f(x) = 20 - 72.34 + 72.34\cosh\left(\frac{25}{72.34}\right)$$

$f(x) = 24.36\,m$ por encima del suelo

Capítulo 4: Ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. Ecuaciones diferenciales homogéneas (variables separables) de primer orden.

Si es posible agrupar y e y' en una parte de la ecuación diferencial y el "resto" en la otra parte, se tiene una ecuación diferencial con variables separables. Utilizando la notación $y' = dy/dx$ se obtiene una ecuación que puede escribirse de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad \Rightarrow \qquad g(y)dy = f(x)dx$$

donde f y g son dos funciones.

Existen diferentes maneras de expresar una ecuación diferencial con variables separables, tales como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Si $g(y) \neq 0$.

Una ecuación diferencial con variables separadas se define mediante la forma,

$$M(y)dy + N(x)dx = 0$$

En general, la solución de esta ecuación viene dada por,

$$\int M(y)dy + \int N(x)dx = C$$

Solución general de una ecuación diferencial:

Por ejemplo, sea la ecuación diferencial

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x + 1$$

Podemos ver que la función $f_1(x) = x^2 + x$ y su primera derivada verifica la ecuación según la definición de solución de una ecuación diferencial. Además, la función $f_2(x) = x^2 + 2x - 3$ y su primera derivada también verifica la ecuación, por lo que también es una solución (sólo una solución) .... Entonces hay un número infinito de funciones, cada una de las cuales no es más que una solución. En general, la función,

$$f(x) = y = x^2 + x + C$$

Entonces, $f(x) = y$ se llama solución general de la ecuación, porque podemos obtener todas las demás soluciones con una elección adecuada de la constante C. Finalmente, la solución general de una ecuación diferencial es aquella que contiene un número de constantes igual al orden de la ecuación.

Solución particular de una ecuación diferencial:

A la ecuación diferencial se le agregan un número de condiciones (llamadas condiciones iniciales o condiciones de frontera) iguales al orden de la ecuación diferencial, lo que permite especificar las constantes opcionales en la solución general de la ecuación. El resultado se denomina solución particular de la ecuación porque verifica las condiciones iniciales dadas. En general, la solución particular es la que se deriva de la solución general una vez definidas las constantes (utilizando las condiciones iniciales).

A continuación, se presentan el desarrollo de ejercicios de ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables.

1. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{4y^3}$$

Solución:

La ecuación diferencial presentada es separable, para lo cual la expresión del denominador del lado derecho se multiplica al diferencial dy, mientras que la expresión del numerador se multiplica por el diferencial dx, posteriormente se procede a integrar,

$$\int 4y^3 dy = \int e^{2x} dx$$

$$4 \cdot \frac{1}{4} y^4 = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$y^4 = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y = \sqrt[4]{\frac{1}{2} e^{2x} + C}}$$

2. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

Solución:

La ecuación diferencial presentada es separable, y se procede como el ejercicio anterior, las variables dependientes e independientes son separadas según el diferencial dy o dx, es decir,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

La integral de la izquierda se emplea el teorema 1.11 (véase el capítulo 1), mientras que la del lado derecho se utiliza la integración de una potencia, por lo tanto,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}\int x^{-1/2}dx$$

$$\sin^{-1} y = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x} + C$$

$$\boxed{y = \sin\left(\sqrt{x} + C\right)} \qquad \text{Solución General}$$

3. Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x} - x}{y + e^y}$$

Solución:

Como en los ejercicios previos de esta sección se trata de una ecuación diferencial separable. En consecuencia, se procede a separar las variables y aplicamos la operación de integración,

$$\int (y + e^y)dy = \int (x - e^{-x})dx$$

Integramos ambas expresiones,

$$\frac{1}{2}y^2 + e^y = \frac{1}{2}x^2 - (-e^{-x}) + C$$

$$y^2 + 2e^y = x^2 + 2e^{-x} + 2C$$

$$\boxed{y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C_1} \qquad \text{Solución General}$$

4. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$y' = 1 + x + y + xy$$

Solución:

Primero factorizamos la expresión derecha y se observa que la ecuación diferencial presentada es separable, y se procede como en los ejercicios anteriores, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = (x+1) + y(x+1) = (x+1)(y+1)$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx$$

Para la expresión izquierda se utiliza el teorema 1.14 (ver capítulo 1), y de la derecha se tiene la integración de potencia y constante, por lo tanto, la solución general es:

$$\boxed{\ln(y+1) = \frac{1}{2}x^2 + x + C} \qquad \text{Solución General}$$

5. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

Solución:

Primero factorizamos la expresión de la derecha y como se observa que la ecuación diferencial es separable.

$$\frac{dy}{dx} = (1+x) + y^2(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$

Despejamos los diferenciales y aplicamos la integral en ambas expresiones,

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x)dx$$

La expresión izquierda corresponde al teorema 1.12 (ver capítulo 1), mientras que de la derecha se utiliza la integración de potencia y constante, por lo tanto,

$$\tan^{-1} y = x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\boxed{y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)} \qquad \text{Solución General}$$

6. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$(x^2+1)(\tan y)y' = x$$

Solución:

La ecuación diferencial presentada es separable, y se procede como en los ejercicios anteriores, en consecuencia,

$$(x^2+1)(\tan y)\frac{dy}{dx} = x$$

Despejamos los diferenciales y aplicamos la integral en ambas expresiones,

$$\int (\tan y)dy = \int \frac{x}{(x^2+1)}dx$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int \frac{x}{(x^2+1)}dx$$

En ambas expresiones se utiliza el método del cambio de variable,

$$u = \cos y \qquad \Rightarrow \qquad du = -\sin y\, dy \qquad \Rightarrow \qquad \sin y\, dy = -du$$

$$v = x^2+1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = 2xdx \qquad \Rightarrow \qquad xdx = \frac{1}{2}dv$$

Sustituimos e integramos,

$$\int \frac{-du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v}$$

$$-\ln u = \frac{1}{2}\ln v + C$$

$$\ln(\cos y)^{-1} = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Aplicando propiedades de logaritmo natural,

$$e^{\ln(\cos y)^{-1}} = e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+C}$$

$$e^{\ln(\cos y)^{-1}} = e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}e^{C}$$

Pero, $e^C = C_1$

$$(\cos y)^{-1} = C_1\sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\cos y} = C\sqrt{x^2+1}$$

$$\sec y = C\sqrt{x^2+1}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\boxed{y = \sec^{-1}\left(C\sqrt{x^2+1}\right)} \qquad \text{Solución General}$$

7. Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$y^{-1}dy + ye^{\cos x}\sin x\,dx = 0$$

Solución:

La ecuación diferencial presentada es separable, separamos sus variables y aplicamos integración en ambas expresiones,

$$\frac{1}{y}dy = -ye^{\cos x}\sin x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int e^{\cos x}\sin x\,dx$$

La expresión del lado izquierdo se evalúa mediante integración de potencia, y la del lado derecho se evalúa mediante un cambio de variable. Se realiza el cambio de variable,

$$v = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad dv = -\sin x\,dx$$

Sustituimos,

$$\int y^{-2}dy = \int e^u du$$

$$-y^{-1} = e^u + C$$

$$-\frac{1}{y} = e^{\cos x} + C$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{e^{\cos x}+C}} \qquad \text{Solución General}$$

8. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial,

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}=2y$$

Solución:

Para la ecuación diferencial presentada separamos sus variables, y aplicamos integración en ambas expresiones,

$$\int \frac{dy}{y}=\int \frac{2dx}{1-x^2}$$

La integral de la izquierda se emplea el teorema 1.14 (véase el capítulo 1), mientras que la del lado derecho se integra por fracciones parciales, por lo tanto,

$$\ln y=\int \frac{2}{(1+x)(1-x)}dx$$

$$\ln y=\int \frac{A}{(1+x)}dx+\int \frac{B}{(1-x)}dx$$

Tenemos que calcular A y B mediante el método de encubrimiento,

$$A=\left.\frac{2}{(1-x)}\right|_{x=-1}=\frac{2}{(1+1)} \qquad \Rightarrow \qquad A=1$$

$$B=\left.\frac{2}{(1+x)}\right|_{x=1}=\frac{2}{(1+1)} \qquad \Rightarrow \qquad B=1$$

Sustituimos los valores de A y B,

$$\ln y=\int \frac{1}{(1+x)}dx+\int \frac{1}{(1-x)}dx$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\ln y=\ln(1+x)-\ln(1-x)+C$$

O también, se expresa como:

$$\ln y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C$$

Por lo tanto,

$$e^{\ln y}=e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C} \qquad \Rightarrow \qquad e^{\ln y}=e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}e^{C}$$

Pero, $e^{C}=C_1$ y finalmente,

$$\boxed{y = C_1\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \qquad \text{Solución General}$$

9. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

(a) para que valores de "y" es "y" creciente, (b) para que valores de "y" es "y" decreciente, y (c) determinar la solución general de la ecuación diferencial

Solución:

Primero se procede a calcular los valores de y en las que la función (a) crece y (b) decrece (conocidos como puntos críticos de la función que se utiliza en el criterio de la primera y segunda derivada), y esto se calcula haciendo que $y' = 0$, en consecuencia,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2(y^2 - 6y + 5) = 0$$

$$y^2(y-1)(y-5) = 0$$

Por lo tanto, los valores críticos de la función (VCF) en la que crece o decrece son:

$VCF = \{0, 1, 5\}$

Evaluando cada uno de los VCF, se obtiene:

$y < 0$, entonces $y' = (-1)^2(-2)(-6) = +12 > 0$, es creciente

$0 < y < 1$, entonces $y' = (0.5)^2(-0.5)(-4.5) = +1.125 > 0$, es creciente

$1 < y < 5$, entonces $y' = (2)^2(1)(-3) = -12 < 0$, es decreciente

$y > 5$, entonces $y' = (6)^2(5)(1) = +180 > 0$, es creciente

(a) y es creciente, si

$$\frac{dy}{dt} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2(y-1)(y-5) > 0$$

Por lo tanto, el conjunto solución en la que y es creciente, es:

$$y \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (5, +\infty)$$

(b) y es decreciente, si

$$\frac{dy}{dt} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2(y-1)(y-5) < 0$$

Por lo tanto, el conjunto solución en la que y es decreciente, es:

$$y \in (1, 5)$$

(c) ahora se procede a calcular la solución general de la ecuación diferencial de primer orden de variable separable,

$$\int \frac{dy}{y^2(y-1)(y-5)} = \int dt$$

En la expresión del lado izquierdo se utiliza la técnica de integración por fracciones parciales

$$\int \frac{dy}{y^2(y-1)(y-5)} = \int \frac{A}{y} dy + \int \frac{B}{y^2} dy + \int \frac{C}{y-1} dy + \int \frac{D}{y-5} dy$$

Se observa que la expansión de fracciones parciales se tiene factores lineales repetidos y no repetidos. Por lo tanto, utilizamos el método del encubrimiento para calcular los valores de B, C y D

$$\frac{1}{y^2(y-1)(y-5)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-1} + \frac{D}{y-5}$$

$$B = \left.\frac{1}{(y-1)(y-5)}\right|_{y=0} = \frac{1}{(-1)(-5)} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{5}$$

$$C = \left.\frac{1}{y^2(y-5)}\right|_{y=1} = \frac{1}{(1)^2(-4)} \qquad \Rightarrow \qquad C = -\frac{1}{4}$$

$$D = \left.\frac{1}{y^2(y-1)}\right|_{y=5} = \frac{1}{(5)^2(4)} \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{1}{100}$$

Como se trata de factores lineales repetidos, en este caso para calcular A se deriva la expresión que permitió obtener B,

$$A = \frac{dB}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{(y-1)(y-5)}\right]\Bigg|_{y=0} = \left.\frac{-[(y-1)(1) + (y-5)(1)]}{(y-1)^2(y-5)^2}\right|_{y=0}$$

$$A = \frac{6}{(y-1)^2(y-5)^2}\Bigg|_{y=0} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{6}{25}$$

Regresando a la ecuación diferencial separable, se sustituyen los valores obtenidos, por lo tanto,

$$\int \frac{A}{y}dy + \int \frac{B}{y^2}dy + \int \frac{C}{y-1}dy + \int \frac{D}{y-5}dy = \int dt$$

$$\frac{6}{25}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{5}\int \frac{dy}{y^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y-1} + \frac{1}{100}\int \frac{dy}{y-5} = \int dt$$

Integramos y obtenemos la solución general de la ecuación diferencial,

$$\boxed{\frac{6}{25}\ln|y| - \frac{1}{5y} - \frac{1}{4}\ln|y-1| + \frac{1}{100}\ln|y-5| = t + C} \qquad \text{Solución General}$$

10. Determinar la solución general y particular de la ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

con $y(0) = -1$

Solución:

La ecuación diferencial presentada separamos sus variables y aplicamos integrales en ambas expresiones,

$$\int 2(y-1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}y^2 - 2y = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es,

$$\boxed{y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C} \qquad \text{Solución General}$$

Se sabe que la condición inicial es $y(0) = -1$, lo que indica que $x = 0$, $y = -1$ con esto se calcula el valor de la constante C,

$$(-1)^2 - 2(-1) = 0^3 + 2(0)^2 + 2(0) + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 3$$

Finalmente, la solución particular de la ecuación diferencial es,

$$\boxed{y^2 - y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3} \qquad \text{Solución Particular}$$

11. Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x\cos t}{1 + 2x^2}$$

con $x(0) = 1$

Solución:

Separamos las variables de la ecuación diferencial, y aplicamos integración en ambas expresiones,

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x} dx = \int \cos t\, dt$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x^2}{x}\right) dx = \sin t + C$$

$$\int \frac{dx}{x} + 2\int x dx = \sin t + C$$

$$\ln|x| + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \sin t + C$$

$$\boxed{\ln|x| + x^2 = \sin t + C} \qquad \text{Solución General}$$

Se sabe que la condición inicial es que $x = 1$ cuando $t = 0$, y calculamos la constante C,

$$\ln|1| + 1^2 = \sin 0 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 1$$

Finalmente, la solución particular de la ecuación diferencial es,

$$\boxed{\ln|x| + x^2 = \sin t + 1} \qquad \text{Solución Particular}$$

12. Determinas las soluciones general y particular de la ecuación diferencial con valor inicial definida por,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 + 12x^2}{y^2 e^{y^3}}, \quad y(1) = 0$$

Solución:

Procedemos a separar las variables y aplicamos la integración en ambas expresiones,

$$\int y^2 e^{y^3} dy = \int (12x^3 + 12x^2) dx$$

A la expresión izquierda aplicamos cambio de variable, y la otra expresión se utiliza integración de potencias, por lo tanto,

$$v = y^3 \qquad \Rightarrow \qquad dv = 3y^2 dy \qquad \Rightarrow \qquad y^2 dy = \frac{1}{3} dv$$

Sustituimos el cambio de variable,

$$\int e^v \left(\frac{1}{3} dv\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 12 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\frac{1}{3} \int e^v dv = 3x^4 + 4x^3 + C$$

$$\frac{1}{3} e^{y^3} = 3x^4 + 4x^3 + C$$

$$e^{y^3} = 9x^4 + 12x^3 + C_1$$

Despejamos y, aplicando logaritmo neperiano en ambas expresiones,

$$\ln e^{y^3} = \ln(9x^4 + 12x^3 + C_1)$$

$$y^3 = \ln(9x^4 + 12x^3 + C_1)$$

La solución general a la ecuación diferencial es,

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\ln(9x^4 + 12x^3 + C_1)}} \qquad \text{Solución General}$$

De acuerdo con las condiciones iniciales del problema $y(1) = 0$, obtenemos la constante C_1.

$$0^3 = \ln[9(1)^4 + 12(1)^3 + C_1] \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \ln(21 + C_1)$$

$e^0 = e^{\ln(21+C_1)}$ $\qquad\qquad 1 = 21 + C_1$

$C_1 = -20$

Finalmente, la solución particular explicita de la ecuación diferencial es,

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\ln(9x^4 + 12x^3 - 20)}} \qquad \text{Solución Particular}$$

13. Resolver el problema de valor inicial dado en forma explícita y determine el intervalo en que está definida.

$$y' = \frac{2x}{y + x^2 y}, \qquad y(0) = -2$$

Solución:

A la ecuación diferencial presentada factorizamos para separar sus variables y aplicamos la integración en ambas expresiones,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y(1 + x^2)}$$

$$\int y dy = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

Integramos ambas expresiones, pero en la expresión derecha aplicamos un cambio de variable,

$$v = x^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = 2xdx$$

Se procede a sustituir el cambio de variable e integramos ambas expresiones, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}y^2 = \int \frac{dv}{v}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln v + C$$

Sustituimos el valor de v y expresamos la solución general explicita,

$$y^2 = 2\ln(x^2 + 1) + 2C$$

$$\boxed{y = \sqrt{2\ln(x^2 + 1) + C_1}} \qquad \text{Solución General}$$

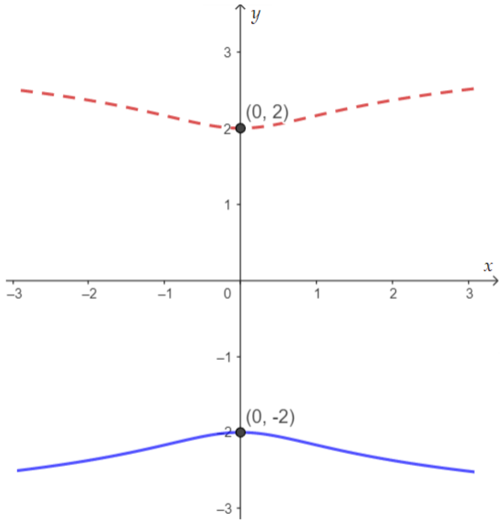
Para la condición inicial dada $y(0) = -2$, calculamos la constante C_1

$$(-2)^2 = 2\ln(0^2 + 1) + C_1$$

$$C_1 = 4$$

Sustituimos en la solución general, quedando

$$y = \pm\sqrt{2\ln(x^2 + 1) + 4}$$



La gráfica mostrada a la derecha se observa de color rojo $\sqrt{2\ln(x^2 + 1) + 4}$ y de color azul $-\sqrt{2\ln(x^2 + 1) + 4}$. Esta última satisface la condición inicial $y(0) = -2$.

En consecuencia, la solución particular de la ecuación diferencial es,

$$\boxed{y = -\sqrt{2\ln(x^2 + 1) + 4}} \qquad \text{Solución Particular}$$

Ahora determinamos el intervalo de valores de x está definida la solución particular dada la condición inicial $y(0) = -2$. A continuación, es necesario que se cumpla:

(i) $2\ln(x^2 + 1) + 4 > 0$

(ii) se sabe que $\ln(v)$ no existe para $v \leq 0$, para lo cual, $x^2 + 1 \geq 1$ para toda x que pertenece al conjunto de los números reales (también se lee $\forall x \in \mathbb{R}$). Por lo tanto, $\ln(x^2 + 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) finalmente, se deduce que $2\ln(x^2 + 1) + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ es decir, que el intervalo de valores es,

$$\boxed{-\infty < x < +\infty}$$

14. Determinas las soluciones general y particular de la ecuación diferencial con valor inicial definida por,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y(y+1)}{x(x-1)}, \qquad y(2) = 1$$

Solución:

Procedemos a separar las variables y aplicamos la integración en ambas expresiones,

$$\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

Para evaluar las dos expresiones utilizamos la técnica de integración por fracciones parciales, en consecuencia,

$$\int \frac{A}{y} dy + \int \frac{B}{y+1} dy = \int \frac{C}{x} dx + \int \frac{D}{x-1} dx$$

La expansión de fracciones parciales en ambas expresiones tiene factores lineales no repetidos. Utilizamos el método del encubrimiento para calcular los valores de A, B para la variable separable y,

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$$

$$A = \left.\frac{1}{y+1}\right|_{y=0} = \frac{1}{1} \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$$

$$B = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=-1} = \frac{1}{-1} \qquad \Rightarrow \qquad B = -1$$

De manera similar, ahora calculamos C y D

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1}$$

$$C = \left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=0} = \frac{1}{-1} \qquad \Rightarrow \qquad C = -1$$

$$D = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} \qquad \Rightarrow \qquad D = 1$$

Regresando a la expansión de fracciones parciales, se sustituyen los valores obtenidos, por lo tanto,

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\ln y - \ln(y+1) = -\ln x + \ln(x-1) + C$$

Aplicamos la propiedad de logaritmo natural de cocientes,

$$\ln\left(\frac{y}{y+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + C$$

En ambas expresiones se observa logaritmo natural y recordemos que tienen como base a e, por lo tanto, reescribimos esta expresión como una ecuación exponencial,

$$e^{\ln\left(\frac{y}{y+1}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+C} \qquad \Rightarrow \qquad e^{\ln\left(\frac{y}{y+1}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}e^{C}$$

$$\frac{y}{y+1} = \frac{x-1}{x}e^{C} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{x-1}e^{-C} = \frac{y+1}{y}$$

Se sabe que e^{-C} es una constante, que se define como C_1, y despejamos para obtener la solución general explicita de la ecuación diferencial,

$$\frac{x}{x-1}C_1 = \frac{y+1}{y} \qquad \Rightarrow \qquad xyC_1 = (x-1)(y+1)$$

$$xyC_1 = xy + x - y - 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(C_1x - x + 1) = x - 1$$

$$\boxed{y = \frac{x-1}{C_1x - x + 1}} \qquad \text{Solución General}$$

Dada la condición inicial $y(2) = 1$, se calcula la constante C_1,

$$1 = \frac{2-1}{C_1(2) - 2 + 1} \qquad \Rightarrow \qquad 2C_1 - 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 1$$

Finalmente, la solución particular es,

$$\boxed{y = x - 1} \qquad \text{Solución Particular}$$

15. Resolver el problema de valor inicial dado en forma explícita y determine el intervalo en que está definida.

$$y' = \frac{2x}{1+2y}, \qquad y(2) = 0$$

Solución:

Procedemos a separar sus variables y aplicamos la integración en ambas expresiones,

$$\int (1+2y)dy = \int 2xdx$$

Evaluamos ambas expresiones mediante integración inmediata de potencias, y se obtiene la solución general implícita,

$\boxed{y + y^2 = x^2 + C}$ Solución General

Para la condición inicial dada $y(2) = 0$, calculamos la constante C

$0 + 0^2 = 2^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -4$

En consecuencia, la solución particular implícita de la ecuación diferencial es,

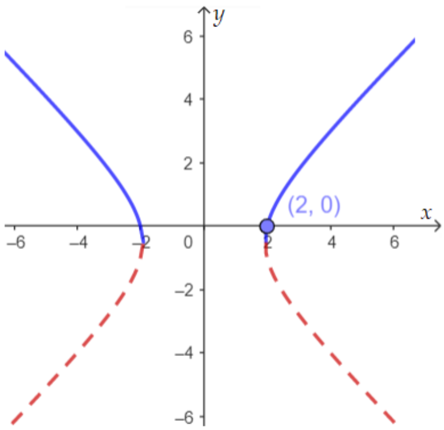
$$y + y^2 = x^2 - 4$$

Nos pide expresar la solución particular explicita, para lo cual debemos resolver la anterior ecuación cuadrática que esta expresada de forma implícita,

$$y^2 + y + (4 - x^2) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(4 - x^2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16 + 4x^2}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4x^2 - 15}}{2}$$



La gráfica mostrada a la derecha se observa de color rojo $\frac{-1-\sqrt{4x^2-15}}{2}$ y de color azul $\frac{-1+\sqrt{4x^2-15}}{2}$. Esta última satisface la condición inicial de la solución general dada por $y(2) = 0$ y se encuentra en el I cuadrante. Y la única solución que cumple con la condición inicial es,

$\boxed{y = \frac{-1 + \sqrt{4x^2 - 15}}{2}}$ Solución Particular

Ahora hallamos el intervalo de valores de x en la que está definida, se sabe que la solución particular debe satisfacer a la solución particular, es decir, que

$$4x^2 - 15 > 0$$

$$\left(2x - \sqrt{15}\right)\left(2x + \sqrt{15}\right) > 0$$

De acuerdo con propiedades de inecuaciones, se tiene que,

$$2x - \sqrt{15} > 0 \ \wedge \ 2x + \sqrt{15} > 0 \quad \vee \quad 2x - \sqrt{15} < 0 \ \wedge \ 2x + \sqrt{15} < 0$$

$$x > \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \wedge \quad x > -\frac{\sqrt{15}}{2} \qquad \vee \qquad x < \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \wedge \quad x < -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

En la gráfica se observa el punto $(2, 0)$ que corresponde a la condición inicial, por lo tanto, se comprueba que la única solución que satisface dicha condición y cercano al mismo, es,

$$\boxed{x > \frac{\sqrt{15}}{2}}$$

16. Determinar las soluciones general y particular de forma implícita para la ecuación diferencial ordinaria,

$$y' = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}, \quad y(4) = 2$$

Solución:

La expresión de la izquierda la reescribimos en forma diferencia, y la expresión de la derecha factorizamos mediante agrupación de términos semejantes,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+2) - (x+2)}{y(x-3) + x - 3} = \frac{(x+2)(y-1)}{(x-3)(y+1)}$$

Separamos las variables y aplicamos integración en ambas expresiones,

$$\int \frac{y+1}{y-1} dy = \int \frac{x+2}{x-3} dx$$

Antes de evaluar las integrales de ambas expresiones aplicamos un artificio matemático en el numerador (este método no requiere el uso de división sintética o división larga, ni de cambio de variable),

$$\int \frac{(y-1) + 1 + 1}{y-1} dy = \int \frac{(x-3) + 3 + 2}{x-3} dx$$

$$\int \frac{y-1}{y-1} dy + \int \frac{2}{y-1} dy = \int \frac{x-3}{x-3} dx + \int \frac{5}{x-3} dx$$

$$\int dy + 2\int \frac{dy}{y-1} = \int dx + 5\int \frac{dx}{x-3}$$

$$y + 2\ln(y-1) = x + 5\ln(x-3) + C$$

Aplicamos propiedades de logaritmo natural,

$$y + \ln(y-1)^2 = x + \ln(x-3)^5 + C$$

$$\ln\frac{(y-1)^2}{(x-3)^5} = x - y + C$$

Cancelamos el logaritmo natural

$$e^{\ln\frac{(y-1)^2}{(x-3)^5}} = e^{x-y+C}$$

$$\frac{(y-1)^2}{(x-3)^5} = e^{x-y}e^{C}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial se expresa de forma implícita,

$$\boxed{\frac{(y-1)^2}{(x-3)^5} = C_1 e^{x-y}} \qquad \text{Solución General}$$

Dada la condición inicial $y(4) = 2$ se calcula la constante C_1,

$$\frac{(2-1)^2}{(4-3)^5} = C_1 e^{4-2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 = C_1 e^2 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = e^{-2}$$

Finalmente, la solución particular de la ecuación diferencial es,

$$\frac{(y-1)^2}{(x-3)^5} = e^{-2}e^{x-y}$$

$$\boxed{\frac{(y-1)^2}{(x-3)^5} = e^{x-y-2}} \qquad \text{Solución Particular}$$

17. Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$xy^2 + 3y^2 - x^2y' = 0, \quad y(1) = 3$$

Solución:

A la ecuación diferencial dada separamos sus variables y factorizamos mediante agrupación de términos semejantes,

$$x^2\frac{dy}{dx} = y^2(x+3)$$

Aplicamos integración en ambas expresiones, y evaluamos

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{x+3}{x^2}dx$$

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{x}{x^2}dx + \int \frac{3}{x^2}dx$$

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-2}dx$$

$$-\frac{1}{y} = \ln x - \frac{3}{x} + C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x\ln x - 3 + Cx}{x}$$

Por lo tanto, la solución general es,

$$\boxed{y = -\frac{x}{x\ln x - 3 + Cx}} \qquad \text{Solución General}$$

Calculamos la constante C dada la condición inicial $y(1) = 3$

$$3 = -\frac{1}{-3 + C(1)} \qquad \Rightarrow \qquad 3 = \frac{1}{3 - C}$$

$$3(3 - C) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 9 - 3C = 1$$

$$C = \frac{8}{3}$$

Finalmente, la solución particular es,

$$y = -\frac{x}{x\ln x - 3 + \frac{8}{3}x}$$

$$\boxed{y = -\frac{3x}{3x\ln x + 8x - 9}} \qquad \text{Solución Particular}$$

4.2. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.

En esta sección vamos a estudiar cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes. Una ecuación diferencial lineal de primer orden es cualquier relación entre:

- una variable, por ejemplo: x
- una función de x denotada por $y(x)$
- la primera derivada de esta función: $y'(x)$

En general una ecuación diferencial lineal (EDL) de primer orden se define como,

$$p(x)\frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = f(x)$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son funciones previamente establecidas en la EDL y que dependen de la variable independiente. A continuación, se muestran ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales de primer orden.

$(3x^2 - 2)y' + e^x y = \ln(x)$ SI es una EDL

$xy' + 2y = \sin x$ SI es una EDL

$xy' + \cos^2 x\, y = x^3$ SI es una EDL

$x^3y' + y^2 = e^x$ NO es una EDL

$y' + xy^2 = 0$ NO es una EDL

$(1 + y^2)y' + y = e^x$ NO es una EDL

Una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes es aquella en la que $p(x)$ y $q(x)$ son constantes, y se expresa como,

$$y'(x) + r(x)y(x) = f(x)$$

donde, $r(x) = q(x)/p(x)$ pero $p(x) \neq 0$. Para resolver o integrar una ecuación diferencial de primer orden es necesario encontrar todas las funciones que verifican la relación que caracteriza esta ecuación y especificar en qué intervalo o intervalos es válida la solución. Cuando se trata de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, dicho intervalo corresponde al intervalo en el que está definida $f(x)$.

Las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes se clasifican en:

a. homogéneas (o sin segundo miembro) o ecuaciones separables

$$y'(x) + ry(x) = 0$$

- hay una solución $y = 0$
- buscamos soluciones no cancelables en ningún punto. Entonces, la ecuación diferencial es separable y puede escribirse,

  $y' = -ry$

  $\int \frac{dy}{y} = -r \int dx$

  $\ln|y| = -rx + C$

  $y = e^{-rx} e^C$

  Al no cancelarse y por ser continua, no cambia de signo. Además, se sabe que $e^C = C$, por lo tanto,

  $$y = Ce^{-rx}$$

b. no homogéneas (o con segundo miembro)

$$y'(x) + ry(x) = f(x)$$

- **Método de variación de la constante**, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea tenemos que obtener la solución general:

  $$y_G = y_H + y_P$$

  donde,

  a. y_H es la solución homogénea de la ecuación: $y' + ry = 0$ la cual resulta ser $y_H = Ce^{-rx}$
  b. y_P es la solución particular de la ecuación diferencial completa que se obtiene a través del método de variación de la constante y esta solución se obtiene buscando la forma de $f(x)$, que puede ser una forma algebraica, exponencial y trigonométrica.

A continuación, se presentan ejercicios resueltos de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes no homogéneas.

18. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' - y = 5x - 1$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales utilizamos el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' - y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^x$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y'_P - y_P = 5x - 1$. El segundo miembro se trata de un factor lineal de la forma $y_P = Ax + B$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y'_P = A$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y'_P - y_P = 5x - 1$$

$$A - Ax - B = 5x - 1$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{-Ax} + \underline{\underline{(A - B)}} = \underline{5x} \, \underline{\underline{-1}}$$

$$-Ax = 5x \qquad \Rightarrow \qquad A = -5$$

$$A - B = -1 \qquad \Rightarrow \qquad -5 + 1 = B \qquad \Rightarrow \qquad B = -4$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = -5x - 4$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^x - 5x - 4}$$

19. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' - 2y = 1 - 6x$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales utilizamos el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' - 2y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = 2y$$

$$\frac{dy}{y} = 2dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = 2x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{2x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' - 2y_P = 1 - 6x$. El segundo miembro se trata de un factor lineal de la forma $y_P = Ax + B$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = A$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' - 2y_P = 1 - 6x$$

$$A - 2Ax - 2B = 1 - 6x$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{-2Ax} + \underline{\underline{(A - 2B)}} = \underline{-6x} + \underline{\underline{1}}$$

$$-2Ax = -6x \qquad \Rightarrow \qquad A = 3$$

$$A - 2B = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3 - 1 = 2B \qquad \Rightarrow \qquad B = 1$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = 3x + 1$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{2x} + 3x + 1}$$

20. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + 3y = 15x^2 + x$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' + 3y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -3y$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -3x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-3x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + 3y_P = 15x^2 + x$. El segundo miembro se trata de un factor cuadrático de la forma $y_P = Ax^2 + Bx + C$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = 2Ax + B$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + 3y_P = x^2 + x$$

$$2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C = 15x^2 + x$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{3Ax^2} + \underline{\underline{(2A + 3B)x}} + (B + 3C) = \underline{15x^2} + \underline{\underline{x}}$$

$$3Ax^2 = 15x^2 \qquad \Rightarrow \qquad A = 5$$

$(2A + 3B)x = x \quad \Rightarrow \quad 3B = 1 - 2(5) \quad \Rightarrow \quad B = -3$

$B + 3C = 0 \quad \Rightarrow \quad 3C = -B \quad \Rightarrow \quad C = 1$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = 5x^2 - 3x + 1$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{-3x} + 5x^2 - 3x + 1}$$

21. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + 5y = 12e^{-2x}$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$y' + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -5y$

$\frac{dy}{y} = -5dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -5x + C$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-5x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + 5y_P = 12e^{-2x}$. El segundo miembro se trata de un factor exponencial de la forma $y_P = Ae^{-2x}$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = -2Ae^{-2x}$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + 5y_P = 12e^{-2x}$$

$$-2Ae^{-2x} + 5Ae^{-2x} = 12e^{-2x}$$

Factorizamos y evaluamos la constante A,

$$3Ae^{-2x} = 12e^{-2x} \qquad \Rightarrow \qquad A = 4$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = 4e^{-2x}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{-3x} + 4e^{-2x}}$$

22. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + y = e^{2x}$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + y_P = e^{2x}$. El segundo miembro se trata de un factor exponencial de la forma $y_P = Ae^{2x}$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = 2Ae^{2x}$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + y_P = e^{2x}$$

$$2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$$

Factorizamos y evaluamos la constante A,

$$3Ae^{2x} = e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = \frac{1}{3}e^{2x}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}}$$

23. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + y = xe^{-x}$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + y_P = xe^{-x}$. El segundo miembro se trata de un factor exponencial-lineal de la forma $y_P = e^{-x}(Ax + B)$ pero la solución homogénea tenemos un factor repetido, en consecuencia, la nueva forma es $y_P = e^{-x}(Ax^2 + Bx)$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = e^{-x}(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx)(-e^{-x})$$

$$y_P' = 2Axe^{-x} + Be^{-x} - Ax^2e^{-x} - Bxe^{-x}$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + y_P = xe^{-x}$$

$$2Axe^{-x} + Be^{-x} - Ax^2e^{-x} - Bxe^{-x} + e^{-x}(Ax^2 + Bx) = xe^{-x}$$

$$2Axe^{-x} + Be^{-x} - Ax^2e^{-x} - Bxe^{-x} + Ax^2e^{-x} + Bxe^{-x} = xe^{-x}$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{2Axe^{-x}} + Be^{-x} = \underline{xe^{-x}}$$

$2Axe^{-x} = xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$

$Be^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} = e^{-x}\left(C + \frac{1}{2}x^2\right)}$$

24. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' - 3y = \cos x$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$y' - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 3y$

$\frac{dy}{y} = 3dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = 3x + C$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{3x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' - 3y_P = \cos x$. El segundo miembro se trata de un factor sinusoidal de la forma $y_P = A\sin x + B\cos x$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$y_P' = A\cos x - B\sin x$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' - 3y_P = \cos x$$

$$A\cos x - B\sin x - 3A\sin x - 3B\cos x = \cos x$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{(A-3B)\cos x} + (-3A-B)\sin x = \underline{\cos x}$$

$(-3A-B)\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -3A \;\; (1)$

$(A-3B)\cos x = \cos x \quad \Rightarrow \quad A - 3B = 1 \;\; (2)$

La ecuación (1) sustituimos en la ecuación (2): $A - 3(-3A) = 1$

$$A = \frac{1}{10}$$

El valor de A sustituimos en la ecuación (1):

$$B = -3\left(\frac{1}{10}\right) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{3}{10}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{3x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x}$$

25. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + y = 4\sin 2x$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$y' + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -y$

$\dfrac{dy}{y} = -dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -x + C$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + y_P = 4\sin 2x$. El segundo miembro se trata de un factor sinusoidal de la forma $y_P = A\sin 2x + B\cos 2x$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$y_P' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + y_P = 4\sin 2x$$

$$2A\cos 2x - 2B\sin 2x + A\sin 2x + B\cos 2x = 4\sin 2x$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$(2A + B)\cos 2x + \underline{(A - 2B)\sin 2x} = \underline{4\sin 2x}$$

$(2A + B)\cos 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2A + B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = -2A \quad (1)$

$(A - 2B)\sin 2x = 4\sin 2x \qquad \Rightarrow \qquad A - 2B = 4 \quad (2)$

La ecuación (1) sustituimos en la ecuación (2): $A - 2(-2A) = 1$

$$A = \frac{1}{5}$$

El valor de A sustituimos en la ecuación (1):

$$B = -2\left(\frac{1}{5}\right) \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$\boxed{y_G = Ce^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x}$$

26. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + y = 3x + 2 \text{ con condición inicial } y(0) = 4$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$y' + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -y$

$\dfrac{dy}{y} = -dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -x + C$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + y_P = 3x + 2$. El segundo miembro se trata de un factor lineal de la forma $y_P = Ax + B$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = A$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + y_P = 3x + 2$$

$$A + Ax + B = 3x + 2$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{Ax} + (A + B) = \underline{3x} + 2$$

$Ax = 3x \qquad \Rightarrow \qquad A = 3$

$A + B = 2 \qquad \Rightarrow \qquad B = -1$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = 3x - 1$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$y_G = Ce^{-x} + 3x - 1$$

Con la condición inicial $y(0) = 4$ calculamos la constante C:

$$4 = Ce^0 + 3(0) - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

Finalmente, la solución es,

$$\boxed{y_G = 5e^{-x} + 3x - 1}$$

27. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' - y = \tfrac{11}{8}e^{-x/3} \text{ con condición inicial } y(0) = -1$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' - y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^x$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' - y_P = \tfrac{11}{8}e^{-x/3}$. El segundo miembro se trata de un factor exponencial de la forma $y_P = Ae^{-x/3}$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = -\frac{1}{2}Ae^{-x/2}$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' - y_P = \frac{11}{8} e^{-x/2}$$

$$-\frac{1}{2} A e^{-x/2} - A e^{-x/2} = \frac{11}{8} e^{-x/2}$$

Ordenamos y evaluamos la constante A,

$$-\frac{3}{2} A e^{-x/2} = \frac{11}{8} e^{-x/2} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{11}{12}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = -\frac{11}{12} e^{-x/2}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$y_G = C e^{x} - \frac{11}{12} e^{-x/2}$$

Con la condición inicial $y(0) = -1$ calculamos la constante C:

$$1 = C e^{0} - \frac{11}{12} e^{0} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{23}{12}$$

Finalmente, la solución es,

$$\boxed{y_G = 5e^{-x} + 3x - 1}$$

28. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + 3y = \sin 3x \;\text{ con condición inicial } y(0) = 1$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' + 3y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -3y$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -3x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-3x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + 3y_P = \sin 3x$. El segundo miembro se trata de un factor sinusoidal de la forma $y_P = A\sin 3x + B\cos 3x$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + 3y_P = \sin 3x$$

$$3A\cos 3x - 3B\sin 3x + 3A\sin 3x + 3B\cos 3x = \sin 3x$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\cos 3x\,(3A + 3B) + \underline{\sin 3x\,(3A - 3B)} = \underline{\sin 3x}$$

$\cos 3x\,(3A + 3B) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3A + 3B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \quad (1)$

$\sin 3x\,(3A - 3B) = \sin 3x \quad \Rightarrow \quad 3A - 3B = 1 \quad (2)$

Sustituimos la ecuación (1) en ecuación (2):

$$3(-B) - 3B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{6}$$

Sustituimos B en la ecuación (1):

$$A = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{6}\cos 3x$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$y_G = Ce^{-3x} + \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{6}\cos 3x$$

Con la condición inicial $y(0) = 1$ calculamos la constante C:

$$1 = Ce^0 + \frac{1}{6}\sin(0) - \frac{1}{6}\cos(0) \quad \Rightarrow \quad 1 = C - \frac{1}{6}$$

$$C = \frac{7}{6}$$

Finalmente, la solución es,

$$\boxed{y_G = \frac{7}{6}e^{-3x} + \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{6}\cos 3x}$$

29. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' - 4y = \sin 2x + \cos 2x \text{ con condición inicial } y(0) = 1$$

Solución:

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' - 4y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = 4y$$

$$\frac{dy}{y} = 4dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = 4x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{4x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' - 4y_P = \sin 2x + \cos 2x$. El segundo miembro se trata de un factor sinusoidal de la forma $y_P = A\sin 2x + B\cos 2x$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' - 4y_P = \sin 2x + \cos 2x$$

$$2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 4A\sin 2x - 4B\cos 2x = \sin 2x + \cos 2x$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$\underline{\underline{\cos 2x\,(2A - 4B)}} + \underline{\sin 2x\,(-4A - 2B)} = \underline{\sin 2x} + \underline{\underline{\cos 2x}}$$

$$\cos 2x\,(2A - 4B) = \cos 2x \qquad \Rightarrow \qquad 2A - 4B = 1 \qquad (1)$$

$$\sin 2x\,(-4A-2B)=\sin 2x \quad \Rightarrow \quad -4A-2B=1 \qquad (2)$$

Aplicamos la regla de Cramer para hallar A y después sustituimos en cualesquiera de las ecuaciones (1) y (2) para hallar B.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(1)(-2)-(1)(-4)}{(2)(-2)-(-4)(-4)}=-\frac{2}{20} \qquad \Rightarrow \qquad A=-\frac{1}{10}$$

De la ecuación (2) se obtiene,

$$2B=-1-4\left(-\frac{1}{10}\right) \qquad \Rightarrow \qquad B=-\frac{3}{10}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P=-\frac{1}{10}\sin 2x-\frac{3}{10}\cos 2x$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$y_G=Ce^{4x}-\frac{1}{10}\sin 2x-\frac{3}{10}\cos 2x$$

Con la condición inicial $y(0)=1$ calculamos la constante C:

$$1=Ce^{0}-\frac{1}{10}\sin(0)-\frac{3}{10}\cos(0) \qquad \Rightarrow \qquad 1=C-\frac{3}{10}$$

$$C=\frac{13}{10}$$

Finalmente, la solución es,

$$\boxed{y_G=\frac{13}{10}e^{4x}-\frac{1}{10}\sin 2x-\frac{3}{10}\cos 2x}$$

4.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante factor integrante.

En general una ecuación diferencial lineal (EDL) de primer orden se expresa como,

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones que dependen de la variable independiente. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, debemos utilizar el método del factor integrante. Consideremos a $u(x)$ como una función desconocida de este modo tenemos,

$$\frac{d}{dx}(uy) = u\frac{dy}{dx} + y\frac{du}{dx}$$

Pero,

$$\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x)y$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(uy) = u[q(x) - p(x)y] + y\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uy) = uq(x) - up(x)y + yu'$$

$$\frac{d}{dx}(uy) = uq(x) + y[u' - up(x)]$$

Si, $u' - up(x) = 0$, por lo tanto, se obtiene la solución de la EDL,

$$\frac{d}{dx}(uy) = uq(x) + y(0)$$

$$\int d(uy) = \int uq(x)dx$$

$$uy = \int uq(x)dx$$

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}\int u(x)q(x)dx + C$$

El factor integrante se obtiene de:

$$u' - up(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u' = up(x)$$

$$p(x) = \frac{u'}{u}$$

Pero,

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{u'}{u}$$

Finalmente, el factor integrante es,

$$p(x) = \frac{d}{dx}(\ln u)$$

$$\int p(x)dx = \ln u$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\ln u}$$

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, se dan estos 4 pasos:

Paso 1: escribimos la EDL en su forma estándar o canónica

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Paso 2: calculamos el factor integrante $u(x)$ dada por,

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Paso 3: multiplicamos la ecuación en forma estándar por $u(x)$ y, si recordamos que el extremo izquierdo es solo $\frac{d}{dx}[u(x)y]$, obtenemos,

$$\underbrace{u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y} = u(x)q(x)$$

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x)q(x)$$

Paso 4: Integramos la última ecuación y obtenemos $y(x)$ dividiendo por$u(x)$ para obtener,

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}\int u(x)q(x)dx + C$$

A continuación, se presentan ejercicios resueltos mediante el uso del factor integrante.

30. Usando el método del factor integrante determine la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$xy' + 3y = x^3 \text{ con condición inicial } y(1) = 0.5$$

Solución:

Paso 1: a la EDL la dividimos para x y expresamos su forma estándar,

$$y' + \frac{3}{x}y = x^2$$

Paso 2: de la forma estándar se sabe que $p(x) = \frac{3}{x}$ y calculamos el factor integrante.

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\int \frac{dx}{x}} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3}$$

$$u(x) = x^3$$

Paso 3: multiplicamos el factor integrante $u(x)$ a la EDL en su forma estándar,

$$x^3 \cdot y' + x^3 \cdot \frac{3}{x}y = x^3 \cdot x^2$$

Ordenando lo anterior se puede observar que la expresión es la solución de la derivada del producto de dos funciones,

$$\underbrace{x^3 \cdot y' + 3x^2 y}_{\frac{d}{dx}[x^3 y]} = x^5$$

$$\frac{d}{dx}[x^3 y] = x^5$$

Paso 4: integramos la última expresión y obtenemos la solución general de la EDL,

$$\int d(x^3 y) = \int x^5 dx \qquad \Rightarrow \qquad x^3 y = \frac{1}{6}x^6 + C$$

$$y = \frac{1}{6}\frac{x^6}{x^3} + \frac{C}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{C}{x^3}$$

Dada la condición inicial $y(1) = 0.5$, calculamos la constante C,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6}(1)^3 + \frac{C}{(1)^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = C$$

$$C = \frac{1}{3}$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3x^3}}$$

31. Usando el método del factor integrante determine la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$xy' - y = x^2e^x \text{ con condición inicial } y(1) = e - 1$$

Solución:

Paso 1: a la EDL la dividimos para x y expresamos su forma estándar,

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^x$$

Paso 2: de la forma estándar se sabe que $p(x) = -\frac{1}{x}$ y calculamos el factor integrante.

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}}$$

$$u(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Paso 3: multiplicamos el factor integrante $u(x)$ a la EDL en su forma estándar,

$$\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} \cdot xe^x$$

Ordenando lo anterior se puede observar que la expresión es la solución de la derivada del producto de dos funciones,

$$\underbrace{\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2}y}_{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\cdot y\right]} = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \cdot y\right] = e^x$$

Paso 4: integramos la última expresión y obtenemos la solución general de la EDL,

$$\int d\left(\frac{1}{x} \cdot y\right) = \int e^x dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x} \cdot y = e^x + C$$

$$y = xe^x + Cx$$

$$y = x(e^x + C)$$

Dada la condición inicial $y(1) = e - 1$, calculamos la constante C,

$$e - 1 = 1(e + C) \qquad \Rightarrow \qquad C = -1$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{y = x(e^x - 1)}$$

32. Usando el método del factor integrante determine la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + 4y = e^{-x} \text{ con condición inicial } y(0) = \tfrac{4}{3}$$

Solución:

Este problema corresponde a una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes no homogénea, y se utilizan dos métodos, tales como, factor integrante (método 1) y variación de constante (método 2), respectivamente.

Método 1: FACTOR INTEGRANTE

Paso 1: la EDL ya está expresada en su forma estándar,

$$y' + 4y = e^{-x}$$

Paso 2: de la forma estándar se sabe que $p(x) = 4$ y calculamos el factor integrante.

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 4dx} = e^{4\int dx}$$

$$u(x) = e^{4x}$$

Paso 3: multiplicamos el factor integrante $u(x)$ a la EDL en su forma estándar,

$$e^{4x} \cdot y' + e^{4x} \cdot 4y = e^{4x} \cdot e^{-x}$$

Ordenando lo anterior se puede observar que la expresión es la solución de la derivada del producto de dos funciones,

$$\underbrace{e^{4x} \cdot y' + 4ye^{4x}}_{\frac{d}{dx}[e^{4x} \cdot y]} = e^{3x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{4x} \cdot y] = e^{3x}$$

Paso 4: integramos la última expresión y obtenemos la solución general de la EDL,

$$\int d(e^{4x} \cdot y) = \int e^{3x}dx \qquad \Rightarrow \qquad e^{4x} \cdot y = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$y = \frac{1}{3}e^{-3x} + Ce^{-4x}$$

Dada la condición inicial $y(0) = \frac{4}{3}$, calculamos la constante C,

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3}e^{-0} + Ce^{0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = C$$

$$C = 1$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{y = \frac{1}{3}e^{-3x} + e^{-4x}}$$

Método 2: VARIACION DE CONSTANTE

Se sabe que la ecuación diferencial es lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea. Vamos a utilizar el método de variación de constante.

Paso 1: obtener la solución homogénea de,

$$y' + 4y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -4y$$

$$\frac{dy}{y} = -4dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = -4x + C$$

Por lo tanto, la solución homogénea es,

$$y_H = Ce^{-4x}$$

Paso 2: obtener la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $y_P' + 4y_P = e^{-x}$. El segundo miembro se trata de un factor exponencial de la forma $y_P = Ae^{-x}$. Por lo tanto, derivamos y_P:

$$y_P' = -Ae^{-x}$$

Después, sustituimos en la ecuación:

$$y_P' + 4y_P = e^{-x}$$

$$-Ae^{-x} + 4Ae^{-x} = e^{-x}$$

Ordenamos y evaluamos las constantes A y B,

$$3A = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$y_P = \frac{1}{3}e^{-x}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial dada es,

$$y_G = Ce^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-x}$$

Con la condición inicial $y(0) = \frac{4}{3}$ calculamos la constante C:

$$\frac{4}{3} = Ce^0 + \frac{1}{3}e^0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = C$$

$$C = 1$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{y = \frac{1}{3}e^{-3x} + e^{-4x}}$$

Al comparar las soluciones se observa que los dos métodos dan siempre el mismo resultado. Aunque esto siempre sucede cuando se tienen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.

33. Usando el método del factor integrante determine la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$t^3x' + 3t^2x = t \text{ con condición inicial } x(2) = 0$$

Solución:

Paso 1: a la EDL la dividimos para t^3 y expresamos su forma estándar,

$$x' + \frac{3t^2}{t^3}x = \frac{t}{t^3} \qquad \Rightarrow \qquad x' + \frac{3}{t}x = \frac{1}{t^2}$$

Paso 2: de la forma estándar se sabe que $p(t) = \frac{3}{t}$ y calculamos el factor integrante.

$$u(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{3}{t}dt} = e^{3\int \frac{dt}{t}} = e^{3\ln t} = e^{\ln t^3}$$

$$u(t) = t^3$$

Paso 3: multiplicamos el factor integrante $u(t)$ a la EDL en su forma estándar,

$$t^3 \cdot x' + t^3 \cdot \frac{3}{t}x = t^3 \cdot \frac{1}{t^2}$$

Ordenando lo anterior se puede observar que la expresión es la solución de la derivada del producto de dos funciones,

$$\underbrace{t^3 \cdot x' + 3t^2 x}_{\frac{d}{dt}[t^3 \cdot x]} = t$$

$$\frac{d}{dt}[t^3 \cdot x] = t$$

Paso 4: integramos la última expresión y obtenemos la solución general de la EDL,

$$\int d(t^3 \cdot x) = \int t dt \qquad \Rightarrow \qquad t^3 \cdot x = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$x = \frac{t^2}{2t^3} + \frac{C}{t^3}$$

$$x = \frac{1}{2t} + \frac{C}{t^3}$$

Dada la condición inicial $y(2) = 0$, calculamos la constante C,

$$0 = \frac{1}{2(2)} + \frac{C}{(2)^3} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{4} = \frac{C}{8} \qquad \Rightarrow \qquad C = -2$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{x = \frac{1}{2t} - \frac{2}{t^3}}$$

34. Usando el método del factor integrante determine la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y' + \frac{3}{x}y + 2 = 3x \text{ con condición inicial } y(1) = 1$$

Solución:

Paso 1: a la EDL la expresamos en su forma estándar,

$$y' + \frac{3}{x}y = 3x - 2$$

Paso 2: de la forma estándar se sabe que $p(x) = \frac{3}{x}$ y calculamos el factor integrante.

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{3\int\frac{dx}{x}} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3}$$

$$u(x) = x^3$$

Paso 3: multiplicamos el factor integrante $u(x)$ a la EDL en su forma estándar,

$$x^3 \cdot y' + x^3 \cdot \frac{3}{x} y = x^3 \cdot (3x - 2)$$

Ordenando lo anterior se puede observar que la expresión es la solución de la derivada del producto de dos funciones,

$$\underbrace{t^3 \cdot y' + 3x^2 y}_{\frac{d}{dx}[x^3 \cdot y]} = (3x^4 - 2x^3)$$

$$\frac{d}{dx}[x^3 \cdot y] = (3x^4 - 2x^3)$$

Paso 4: integramos la última expresión y obtenemos la solución general de la EDL,

$$\int d(x^3 \cdot y) = \int (3x^4 - 2x^3)dx \qquad \Rightarrow \qquad x^3 \cdot y = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + C$$

$$y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{C}{x^3}$$

Dada la condición inicial $y(1) = 1$, calculamos la constante C,

$$1 = \frac{3}{5}(1)^2 - \frac{1}{2}(1) + \frac{C}{(1)^3} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = C \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{9}{10}$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{10x^3}}$$

35. Usando el método del factor integrante determine la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$\cos x\, y' + y \sin x = 2x \cos^2 x \text{ con condición inicial } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32}$$

Solución:

Paso 1: a la EDL la expresamos en su forma estándar,

$$y' + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) y = 2x \cos x$$

$$y' + (\tan x) y = 2x \cos x$$

Paso 2: de la forma estándar se sabe que $p(x) = \tan x$ y calculamos el factor integrante.

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln(\cos x)} = e^{\ln(\cos x)^{-1}}$$

$$u(x) = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$$

Paso 3: multiplicamos el factor integrante $u(x)$ a la EDL en su forma estándar,

$$\frac{1}{\cos x} \cdot y' + \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) y = \frac{1}{\cos x} \cdot 2x \cos x$$

Ordenando lo anterior se puede observar que la expresión es la solución de la derivada del producto de dos funciones,

$$\underbrace{\frac{1}{\cos x} \cdot y' + \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) y}_{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos x} \cdot y\right]} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos x} \cdot y\right] = 2x$$

Paso 4: integramos la última expresión y obtenemos la solución general de la EDL,

$$\int d\left(\frac{1}{\cos x} \cdot y\right) = \int 2x dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\cos x} \cdot y = x^2 + C$$

$$y = x^2 \cos x + C \cos x$$

Dada la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32}$, calculamos la constante C,

$$\frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + C \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{32} = \frac{\sqrt{2}}{2} C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-\sqrt{2}\pi^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} C$$

$$C = -\pi^2$$

Finalmente, la solución de la EDL es,

$$\boxed{y = x^2 \cos x - \pi^2 \cos x}$$

4.4. Aplicaciones de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en circuitos eléctricos.

Los componentes básicos de los circuitos lineales son las resistencias (R), las capacitancias (C) y las inductancias (L). El comportamiento de un circuito compuesto únicamente por estos elementos se rige por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Por ejemplo, el estudio de un circuito RL se basa en la resolución de una ecuación diferencial de primer orden. Por este motivo, el circuito se denomina "circuito de primer orden".

Cuando la corriente eléctrica fluye a través de un circuito que contiene estos elementos, se produce una caída de voltaje (diferencia o caída de potencial) a través de cada uno de ellos, y puede medirse experimentalmente con un voltímetro. Posteriormente se mide el voltaje, que tiene como unidad el voltio (V). La caída de voltaje a través del elemento x se denota como V_x. Para calcular teóricamente estas caídas de tensión, se aplican las siguientes 3 reglas:

a) La caída de voltaje (V_R) a través de una resistencia es igual al producto de la resistencia por la corriente (conocida como ley de Ohm).

$$V_R = iR$$

b) La caída de voltaje (V_L) a través de una bobina es igual al producto de la inductancia y la variación (instantánea) de la corriente:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

c) La caída de voltaje (V_C) a través del condensador es igual a la relación entre la carga eléctrica (q) y la capacitancia (C):

$$V_C = \frac{q}{C}$$

Utilizando esta última relación y considerando que la corriente eléctrica, i, es el ritmo de cambio de carga en función del tiempo.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV_C) = C\frac{dV_C}{dt}$$

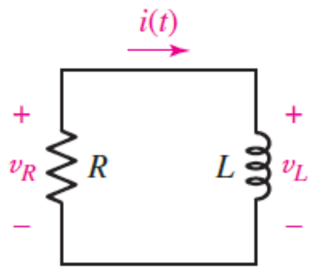
Las leyes de Kirchhoff de Corriente (LKC) y Voltaje (LKV) permiten traducir en ecuaciones el comportamiento de todas estas magnitudes. Puesto que sólo se estudia aquí el caso de circuitos sencillos, con elementos en serie, bastará con la 2ª ley (LKV) o ley de mallas. Si en un circuito eléctrico se recorre una malla (un camino cerrado), la suma de las caídas de voltaje debe ser cero. Dado que una fuente se considera un aumento de voltaje, esta ley puede reformularse diciendo que la suma de las caídas de voltaje debe ser igual al voltaje suministrado por la fuente. Si $V_s(t)$ es la fuente de voltaje, tenemos:

$$V_s = V_R + V_L + V_C$$

A continuación, se resuelven circuitos RL y RC de primer orden, mientras que los circuitos RLC son de segundo orden, pero, no son parte de estudio del texto. Los problemas resueltos son tomados de los ejercicios propuestos por (Hayt et al., 2007).

A continuación, se presenta el desarrollo de ejercicios de circuitos RC y RL de primer orden mediante cualquier método de resolución de ecuaciones diferenciales vistas en las secciones previas.

36. La figura muestra un circuito RL de primer order, se pide determinar (a) la corriente $i(t)$ en términos de R y L, y (b) $i(t)$ con condición inicial $i(0) = 2\ mA$ para $R = 4.7\ k\Omega$ y $L = 1\ \mu H$.



Solución:

(a) Tenemos un circuito RL simple sin fuente de voltaje, con resistencia R y bobina (inductor) L en serie. Se sabe que las caídas de voltaje $V_R = iR$ y $V_L = L\ di/dt$. Por lo tanto, aplicamos LKV:

$$V_R + V_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad iR + L\frac{di}{dt} = 0$$

Esta se expresa como EDL homogénea de coeficientes constantes, por lo tanto:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

Utilizamos el método de separación de variables e integramos.

$$\int \frac{di}{i} = \int -\frac{R}{L} dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln i = -\frac{R}{L}t + k$$

Despejamos la corriente, en consecuencia,

$$\boxed{i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}}$$

(b) Dado que $R = 4.7\ k\Omega$, $L = 1\ \mu H$ y condición inicial $i(0) = 2\ mA$, calculamos primero la constante k:

$$i(0) = 2\ mA \qquad \Rightarrow \qquad 2\ mA = Ce^{0} \qquad \Rightarrow \qquad C = 2\ mA$$

y finalmente obtenemos $i(t)$:

$$i(t) = 2e^{-\frac{4.7\times10^{3}}{10^{-6}}t}\ [mA] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i(t) = 2e^{-4.7\times10^{9}t}\ [mA]}$$

37. La figura del ejercicio 36 muestra un circuito RL de primer order, determinar el valor de la inductancia L, si $i(0) = 2\ mA$, $R = 100\ \Omega$ e $i(50\ \mu s) = 735.8\ \mu A$.

Solución:

Para este ejercicio se utiliza el valor de la corriente $i(t)$ en términos de R y L obtenido en el ejercicio 36 inciso (a) de esta sección para sustituir $R = 100\ \Omega$. Adicional, puede verse que para $i(0) = 2\ mA = k$ y nos queda,

$$i(t) = 2e^{-\frac{100}{L}t}\ [mA]$$

También, se sabe que $i(50\ \mu s) = 735.8\ \mu A$, por lo tanto,

$$i(50\ \mu s) = 2\times10^{-3}e^{-\frac{100}{L}(50\ \mu s)}$$

$$735.8\times10^{-6} = 2\times10^{-3}e^{-\frac{100(50\times10^{-6})}{L}}$$

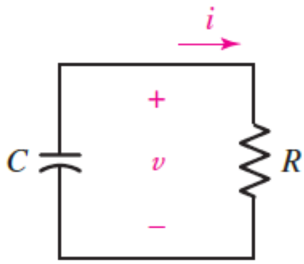
$$367.9\times10^{-3} = e^{-\frac{5\times10^{-3}}{L}}$$

Finalmente, aplicando propiedades de logaritmo natural obtenemos la inductancia L,

$$\ln(0.3679) = \ln e^{-\frac{5\times10^{-3}}{L}} \qquad \Rightarrow \qquad -1 = -\frac{5\times10^{-3}}{L}$$

$$\boxed{L = 5\;mH}$$

38. La figura muestra un circuito RC de primer order, de pide determinar (a) el voltaje $v(t)$ en términos de R y C, (b) $v(t)$ con condición inicial $v(0) = 45\;V$ para $R = 100\;M\Omega$ y $C = 1\;\mu F$, y (c) $v(20)$ e $i(20)$.

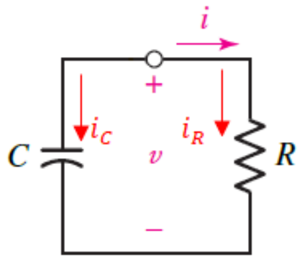


Solución:

(a) Tenemos un circuito RC simple sin fuente de voltaje, con resistencia R y capacitor C en serie. En el nodo superior (véase la figura) salen las corrientes i_C e i_R. Por lo tanto, aplicamos LKC:

$$i_C + i_R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

La última expresión es la EDL homogénea de coeficientes constantes, en consecuencia:



$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0$$

Utilizamos el método de separación de variables e integramos.

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{1}{RC}dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln v = -\frac{1}{RC}t + k$$

Despejamos el voltaje, en consecuencia,

$$\boxed{v(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}}$$

(b) Dado que $R = 100\ M\Omega$ y $C = 1\ \mu F$ y condición inicial $v(0) = 45\ V$, calculamos primero la constante C:

$$v(0) = 45\ V \qquad \Rightarrow \qquad 45 = ke^0 \qquad \Rightarrow \qquad k = 45\ V$$

y finalmente $v(t)$:

$$v(t) = 45e^{-\frac{1}{(100\times10^6)(10^{-6})}t}\ [mA]$$

$$\boxed{v(t) = 45e^{-0.01t}\ [V]}$$

(c) Nos piden $v(20)$ e $i(20)$, esto indica que evaluamos $v(t)$ e $i(t)$ cuando $t = 20\ s$. Primero evaluamos $v(20)$,

$$v(20) = 45e^{-0.01(20)} = 45e^{-0.2} = 45(0.819)$$

$$\boxed{v(20) = 36.843\ [V]}$$

y finalmente, mediante ley de ohm obtenemos $i(20)$,

$$i(20) = \frac{v(20)}{100\times10^6} = \frac{36.843}{100\times10^6}$$

$$\boxed{i(20) = 36.843\times10^8 = 368.43\ nA}$$

39. La figura del ejercicio 38 muestra un circuito RC de primer order, determinar el valor de la resistencia R, si se sabe que $C = 100\ pF$, $v(0) = 1.5\ V$, y $v(2\ ns) = 100\ mV$.

Solución:

Para este ejercicio se utiliza el valor del voltaje $v(t)$ obtenido en el ejercicio 38 inciso (a) de esta sección para sustituir $C = 100\ pF$. Adicional, puede verse que para $v(0) = 1.5\ V = k$ y nos queda,

$$v(t) = 1.5e^{-\frac{1}{R(100\times10^{-12})}t}$$

También, se sabe que $v(2\ ns) = 100\ mV = 0.1\ V$, por lo tanto,

$$v(2\ ns) = 1.5e^{-\frac{10^{10}}{R}(2\times10^{-9})}$$

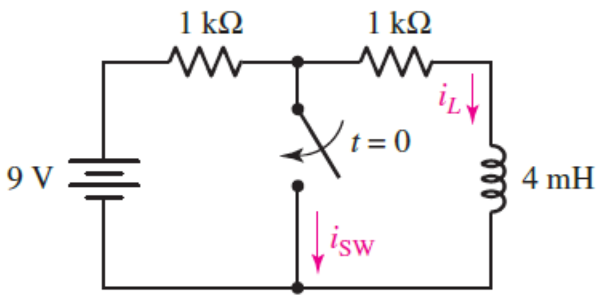
$$\frac{0.1}{1.5} = e^{-\frac{20}{R}}$$

Finalmente, aplicando propiedad de logaritmo natural obtenemos la resistencia R,

$$\ln(0.0667) = \ln e^{-\frac{20}{R}} \qquad \Rightarrow \qquad -2.708 = -\frac{20}{R}$$

$$\boxed{R = 7.386\ \Omega}$$

40. Después de permanecer por horas en la configuración indicada, el interruptor del circuito de la figura se cierra en $t = 0$. Determinar (a) $i_L(5\ \mu s)$ y (b) $i_{sw}(5\ \mu s)$.



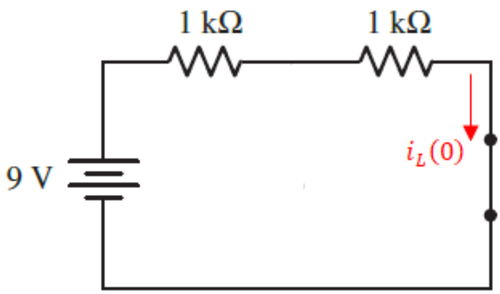
Solución:

Para resolver este tipo de circuitos RL con interruptor, se debe analizar cuando el switch está abierto y cerrado. Cuando el switch está abierto ($t = 0^-$) la bobina L queda en cortocircuito y obtenemos la corriente inicial $i_L(0)$. La figura muestra el circuito cuando el switch está abierto.

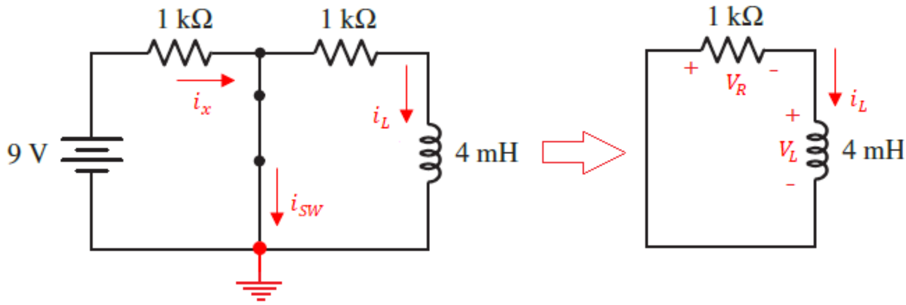
Aplicamos ley de ohm para obtener $i_L(0)$, en consecuencia,

$$i_L(0) = \frac{9}{1k + 1k} = \frac{9}{2k}$$

$$i_L(0) = 4.5\ mA$$



Cuando el switch se cierra nos queda en corto el lado izquierdo del circuito, quedando un circuito RL de primer orden sin fuente de voltaje, tal como se muestra en la figura.



En el ejercicio 36 se da los pasos para resolver circuitos RL de primer orden sin fuentes de accionamiento. Aplicando LKV, separando variables e integrando obtenemos i_L:

$$V_R + V_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_L R + L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{di_L}{i_L} = \int -\frac{1\times 10^3}{4\times 10^{-3}} dt$$

$$\ln i_L = -250\times 10^3 t + k$$

Despejamos la corriente, por lo tanto,

$$i_L(t) = ke^{-250\times 10^3 t}$$

Dado que en condiciones iniciales $i_L(0) = 4.5\ mA$, nos queda,

$$i_L(0) = 4.5\ mA \qquad \Rightarrow \qquad 4.5\ mA = ke^0 \qquad \Rightarrow \qquad k = 4.5\ mA$$

En consecuencia, $i(t)$ es,

$$i_L(t) = 4.5e^{-250\times 10^3 t}\ [mA]$$

(a) Para $t = 5\ \mu s$, se obtiene,

$$i_L(5\ \mu s) = 4.5e^{-250\times 10^3(5\times 10^{-6})}\ [mA] = 4.5e^{-1.25}\ [mA]$$

$i_L(5\ \mu s) = 4.5(0.287)\ [mA]$

$$\boxed{i_L(5\ \mu s) = 1.289\ [mA]}$$

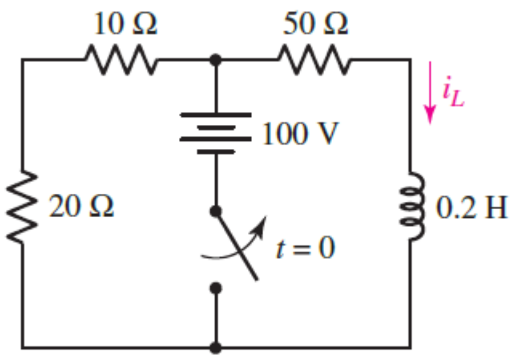
(b) Para $t = 5\ \mu s$, se obtiene,

$$i_x = i_{SW}(5\ \mu s) + i_L(5\ \mu s) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{9}{1k} = i_{SW}(5\ \mu s) + 1.289\ mA$$

$i_{SW}(5\ \mu s) = 9\ mA - 1.289\ mA$

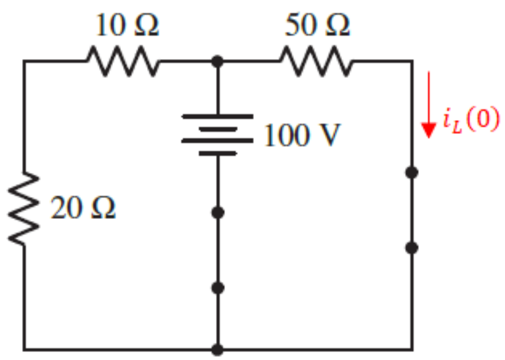
$$\boxed{i_{SW}(5\ \mu s) = 7.711\ mA}$$

41. Luego de estar cerrado durante largo tiempo, el interruptor del circuito de la figura se abre en $t = 0$. Determinar (a) $i_L(t)$ para $t > 0$, (b) $i_L(10\ ms)$ y (c) calcular t_1 si $i_L(t_1) = 0.5 i_L(0)$.



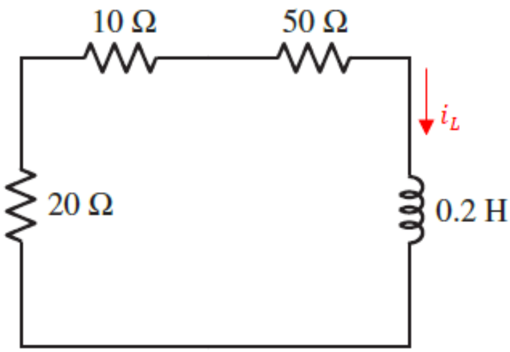
Solución:

Este tipo de circuitos RL con interruptor es analizado cuando el switch inicialmente estaba cerrado durante largo tiempo, y a posteriori se analiza cuando se abre. Dado que el switch está cerrado $(t = 0^-)$ obtenemos la corriente inicial $i_L(0)$, tal como se observa en el circuito de la figura.



$$i_L(0) = \frac{100}{50} = 2\ A$$

(a) Cuando el switch se abre nos queda abierto el ramal central del circuito, quedando un circuito RL de primer orden sin fuente de voltaje, tal como se muestra en la figura. La resistencia equivalente es la sumatoria de las tres resistencias en serie, $R_s = 20 + 10 + 50 = 80\ \Omega$.



En el ejercicio 36 se da los pasos para resolver circuitos RL de primer orden sin fuentes de accionamiento. Aplicando LKV, separando variables e integrando obtenemos i_L:

$$V_R + V_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_L R_s + L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_s}{L} i_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{di_L}{i_L} = \int -\frac{80}{0.2} dt$$

$$\ln i_L = -400t + k$$

Despejamos la corriente, por lo tanto,

$$i_L(t) = ke^{-400t}$$

Dado que en condiciones iniciales $i_L(0) = 2\ A$, nos queda,

$$i_L(0) = 2\ A \qquad \Rightarrow \qquad 2\ A = ke^0 \qquad \Rightarrow \qquad k = 2\ A$$

En consecuencia, $i(t)$ es,

$$\boxed{i_L(t) = 2e^{-400t}\ [A]}$$

(b) Para $t = 10\ ms$, se obtiene,

$$i_L(10\ ms) = 2e^{-400(10\times10^{-3})}\ [A] = e^{-4}\ [A]$$

$$i_L(10\ ms) = 2(0.018)\ [A]$$

$$\boxed{i_L(5\ \mu s) = 0.03663\ A = 36.63\ [mA]}$$

(b) Para $i_L(t_1) = 0.5i_L(0)$, se obtiene t_1,

$$i_L(t_1) = 0.5i_L(0) \qquad \Rightarrow \qquad 2e^{-400t_1} = 0.5(2)$$

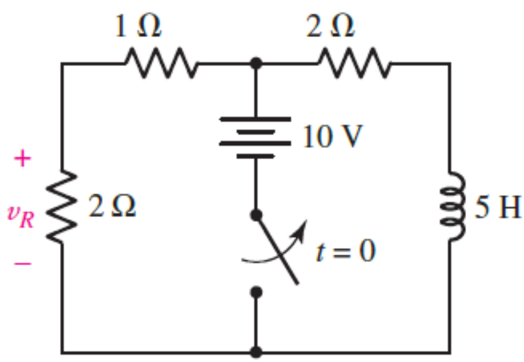
$$\frac{2}{e^{400t_1}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = e^{400t_1}$$

Aplicamos propiedades de logaritmo natural para obtener t_1,

$$\ln 2 = \ln e^{400t_1} \qquad \Rightarrow \qquad 0.693 = 400t_1$$

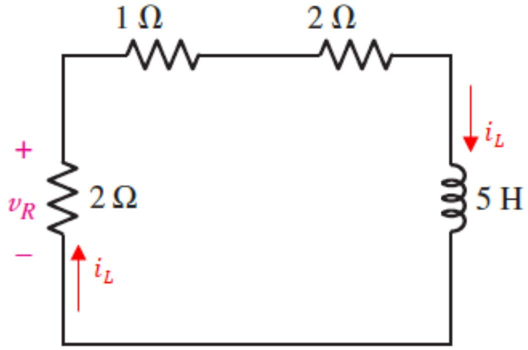
$$\boxed{t_1 = 0.00173\ s = 1.73\ ms}$$

42. En el caso del circuito que se muestra en la figura, (a) escribir la ecuación diferencial que describe la tensión v_R en el resistor para $t > 0$, (b) resolver la ecuación característica, y (c) calcular v_R justo antes de que se abra el interruptor, exactamente después de que se abra el interruptor en $t = 1\ s$.



Solución:

(a) El circuito de la figura tiene la misma configuración del ejercicio 41 cuando el interruptor está abierto, los valores de las resistencias y bobina son diferentes. La resistencia equivalente en serie es $R_s = 5\ \Omega$. De manera similar al ejercicio 41, aplicamos LKV:



$$V_R + V_L = 0$$

$$i_L R_s + L\frac{di_L}{dt} = 0$$

Pero, por ley de ohm:

$$v_R = -i_L R = -2i_L$$

$$i_L = -\frac{v_R}{2}$$

Por lo tanto,

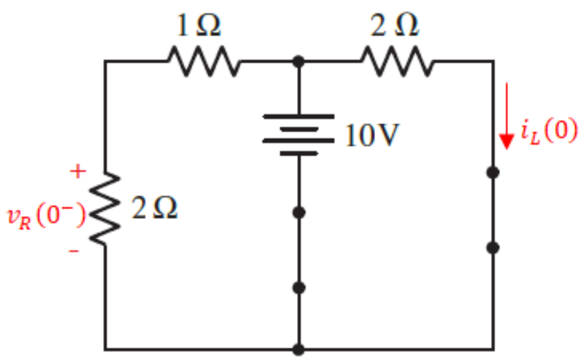
$$\frac{d\left(-\frac{v_R}{2}\right)}{dt} + \frac{5}{5}\left(-\frac{v_R}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dv_R}{dt} + v_R = 0}$$

(b) de la ED calculamos v_R mediante separación de variables e integramos,

$$\int \frac{dv_R}{v_R} = \int -dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln v_R = -t + k$$

$$\boxed{v_R = ke^{-t}}$$

(c) la ED obtenida en el inciso (a) describe la tensión v_R, pero, depende de i_L. Es decir, que primero calculamos i_L justo antes de abrir el interruptor para $t = 0^-$. La figura muestra el circuito cuando el interruptor está cerrado y aplicamos ley de ohm para obtener $i_L(0) = i_L(0^-) = i_L(0^+)$, por lo tanto,



$$i_L(0) = \frac{10}{2} = 5\ A$$

Este valor $i_L(0)$ después que se abre el interruptor es $i_L(0^+)$, y se sabe del inciso (a) que $v_R(0^+) = -2i_L(0^+) = -2(5) = -10\ V$, entonces, $v_R(0^+) = k$. Por lo tanto,

$$v_R(t) = v_R(0^+)e^{-t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_R(t) = -10e^{-t}}$$

No confundir que $v_R(0^-)$ sea la condición inicial de la ED obtenida en el inciso (a), por lo tanto, aplicamos divisor de voltaje,

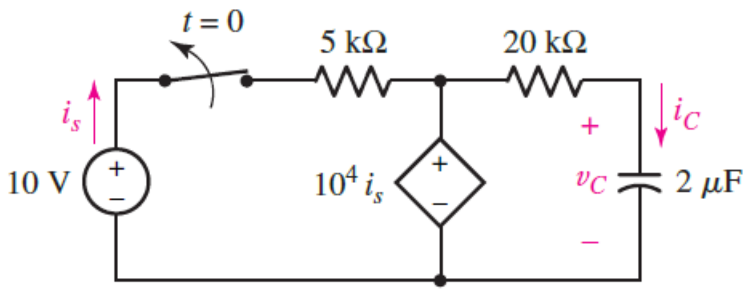
$$\boxed{v_R(0^-) = \frac{20}{3}\ [V] = 6.667\ [V]}$$

Y finalmente calculamos $v_R(1)$,

$$v_R(1) = -10e^{-1} = -\frac{10}{e}$$

$$\boxed{v_R(1) = -3.679\ [V]}$$

43. Determinar $v_C(t)$ e $i_C(t)$ para el circuito de la figura.

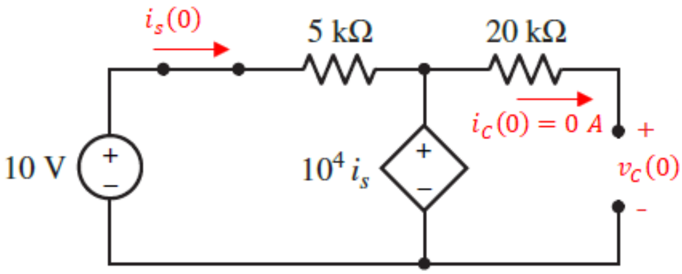


Solución:

Sabemos que este tipo de problemas son resueltos cuando está cerrado y abierto el interruptor, y viceversa. Primero analizamos cuando el interruptor está cerrado (véase figura), y el capacitor queda en circuito abierto para calcular el voltaje en condiciones iniciales. Observamos en el ramal de 20 $k\Omega$ que la corriente de circuito abierto $i_C(0) = 0\ A$. Aplicamos análisis de mallas en el ramal del interruptor para determinar $i_s(0)$.

$$10 = 5ki_s(0) + 10^4 i_s(0) \qquad \Rightarrow \qquad 10 = 15ki_s(0)$$

$i_s(0) = i_s(0^-) = \frac{2}{3}\ mA$



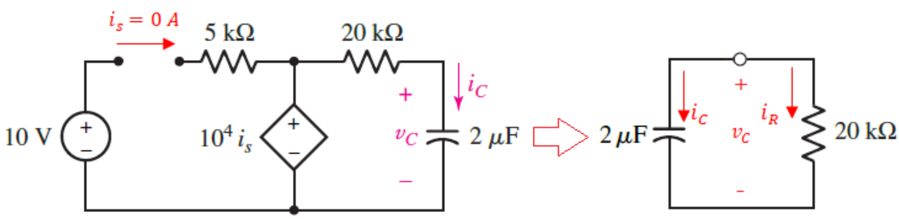
Ahora aplicamos análisis de mallas en el ramal abierto para determinar $v_C(0)$,

$$10^4 i_s(0) = 20k i_C(0) + v_C(0)$$

$$10^4\left(\frac{2}{3} \times 10^{-3}\right) = v_C(0)$$

$$v_C(0) = v_C(0^-) = \frac{20}{3}\ V = 6.667\ \ V$$

Ahora se analiza cuando abrimos el interruptor (ver figura). Al abrir el switch la corriente $i_s = 0\ A$ y la fuente dependiente sería $0\ V$, lo que nos quedaría un circuito RC de primer orden sin fuente de voltaje en condiciones iniciales $v_C(0) = 6.667\ V$.



En el ejercicio 38 se aprendió a resolver este tipo de circuitos, por lo tanto, aplicamos LKC:

$$i_C + i_R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{1}{(20 \times 10^3)(2 \times 10^{-6})}dt$$

$$\ln v = -\frac{10^3}{40}t + k \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = ke^{-25t}$$

Sabemos que $v_C(0) = k = 6.667\ V$, por lo tanto,

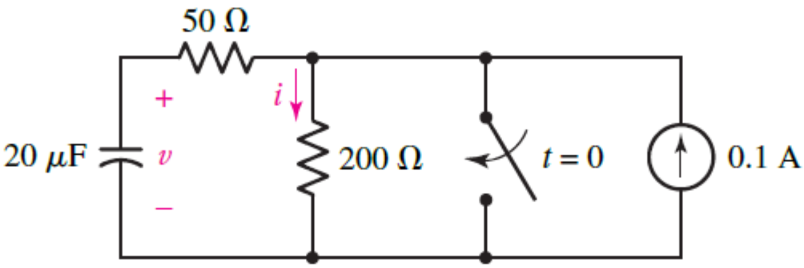
$$\boxed{v(t) = 6.667e^{-25t}\ [V]}$$

Por ley de ohm, determinamos i_C,

$$i_C = \frac{v_C}{20k} = \frac{6.667e^{-25t}}{20 \times 10^3}$$

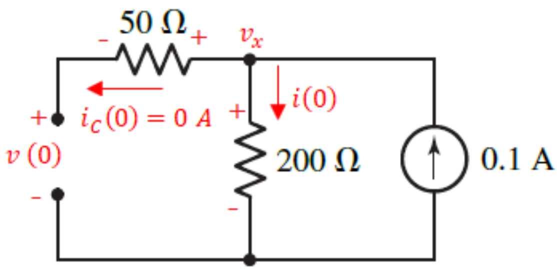
$$\boxed{i_C = 0.333e^{-25t}\ [mA]}$$

44. Determinar $v(t)$ e $i(t)$ para el circuito de la figura.



Solución:

La figura muestra el circuito cuando el interruptor está abierto y, además, el capacitor de $20\ \mu F$ queda en circuito abierto con lo que calculamos $v(0)$ en condiciones iniciales. Observamos en el ramal de $50\ \Omega$ y $20\ \mu F$ que la corriente para circuito abierto es, $i_C(0) = 0\ A$.



En el nodo v_x aplicamos LKC,

$$i(0) + i_C(0) = 0.1$$

$$i(0) = 0.1$$

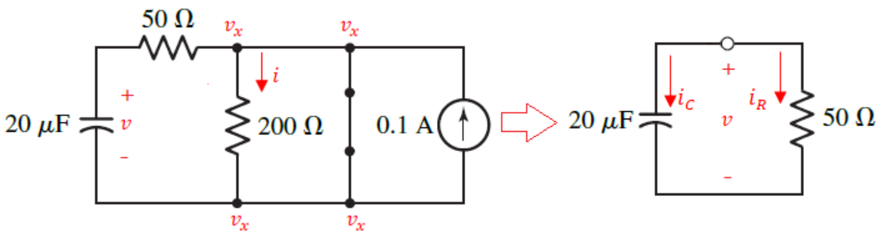
Del lado izquierdo del circuito aplicamos LKV para determinar el voltaje en condiciones iniciales,

$$v(0) + 50i_C(0) = 200i(0)$$

$v(0) = 200(0.1)$

$v(0) = v(0^-) = 20\ V$

Ahora, analizamos cuando el interruptor se cierra (ver figura izquierda). Observamos que el nodo v_x provoca que la corriente $i(t) = 0$, y la resistencia se anula debido a que está en corto. La figura derecha muestra el circuito RC de primer orden equivalente, por lo tanto, aplicamos LKC.



$$i_C + i_R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{1}{(50)(20 \times 10^{-6})}dt$$

$$\ln v = -\frac{10^9}{1000}t + k \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = ke^{-10^6 t}$$

Sabemos que $v_C(0^-) = k = 20\ V$, por lo tanto,

$$\boxed{v(t) = 20e^{-10^6 t}\ [V]}$$

La corriente $i(t)$ ya fue explicada, finalmente,

$$\boxed{i(t) = 0\ [A]}$$

Edwin Fernando Palacios Meléndez
https://orcid.org/0009-0001-3531-3037
edwin.palacios@iaen.edu.ec
Edwin Fernando Palacios Meléndez es Ingeniero en Telecomunicaciones, Magíster en Telecomunicaciones y candidato Ph. D. en Ingeniería Eléctrica con mención en Control y Automatización. Cuenta con amplia experiencia en redes ópticas, sistemas embebidos y automatización, y ha liderado proyectos de innovación tecnológica tanto en el sector académico como institucional. Se ha desempeñado como docente universitario por más de 20 años en asignaturas como Cálculo, Física, Sistemas de Control y Telecomunicaciones. Además, ha publicado artículos en revistas indexadas en IEEE y Scopus, y es autor de libros en las áreas de matemáticas aplicadas e instrumentación. Actualmente se desempeña como Director de Innovación Tecnológica en el Instituto de Altos Estudios Nacionales (IAEN), promoviendo iniciativas de transformación digital y desarrollo científico en el Ecuador.

Karla Erenia Jácome Guerrero
https://orcid.org/0009-0001-3945-8698
karla.jacomeg@gmail.com
Ingeniera de Telecomunicaciones orientada a resultados, con una Maestría en Ingeniería de Telecomunicaciones. Durante mi tiempo en la universidad, tuve el honor de servir como ayudante de cátedra en las asignaturas de Cálculo I y Física I durante dos años, donde no solo fortalecí mi propio conocimiento, sino que también ayudé a mis compañeros estudiantes a comprender estos temas críticos. Esta experiencia me brindó habilidades valiosas en la enseñanza, la resolución de problemas y la comunicación, cualidades que aplico con éxito en mi carrera profesional. Mi compromiso con la excelencia académica y mi habilidad para simplificar conceptos complejos me hacen un recurso valioso en cualquier entorno técnico y educativo. Durante mi trabajo de tesis de Ingeniería, tuve la oportunidad de participar en el desarrollo del diseño e implementación de un robot móvil Soccer, utilizando la tarjeta Arduino Nano y controlado mediante Bluetooth. También, en el trabajo de fin de máster de mi Maestría en Ingeniería de Telecomunicaciones, tuve la oportunidad de trabajar como ingeniera de investigación y desarrollo en un sistema de generación termoeléctrico, donde trabajé creando la ecuación de un dispositivo de generación termoeléctrica.

Robert Andrés Vega Zambrano
https://orcid.org/0009-0000-9798-7216
robertvega22@gmail.com
Ingeniero en Telecomunicaciones con enfoque práctico y vocación por el desarrollo tecnológico, en constante formación mediante certificaciones internacionales en áreas como telecomunicaciones y domótica. Durante mi etapa universitaria, me desempeñé como ayudante estudiantil en asignaturas especializadas como Comunicaciones Ópticas, Sistemas Satelitales y Electrónica, lo que me permitió no solo reforzar conocimientos técnicos clave, sino también desarrollar habilidades en la transmisión de ideas complejas de forma clara, el trabajo colaborativo y el liderazgo académico. Como parte de mi proyecto de titulación, diseñé e implementé un robot seguidor de línea integrando un sistema de control PID lógico para su estabilización. Esta experiencia fue clave para aplicar e integrar conocimientos en programación, electrónica, control y diseño de sistemas embebidos, consolidando mi interés en la automatización, comunicaciones y la robótica aplicada.

Pablo José Palacios Chafla
pablo.palacios03@cu.ucsg.edu.ec
Pablo José Palacios Chafla es estudiante de Ingeniería en Telecomunicaciones en la Universidad Católica de Santiago de Guayaquil, actualmente cursando el séptimo semestre. Su formación se ha enfocado en el estudio de sistemas de comunicaciones analógicas y digitales, fundamentos de redes, propagación de señales y diseño de circuitos. A lo largo de su trayectoria académica ha demostrado compromiso, constancia y desempeño sobresaliente, siendo reconocido con la distinción al mejor promedio de su carrera en el periodo 2024–2025. Cuenta con experiencia en simulación de sistemas eléctricos y electrónicos utilizando herramientas como MATLAB, Simulink y Multisim, así como conocimientos aplicados en redes de nueva generación como FTTH y WiFi 6E. Ha participado en jornadas académicas y técnicas, fortaleciendo su dominio en temas actuales como la implementación de redes ópticas, tecnologías móviles y conectividad rural. En el ámbito profesional, realizó pasantías en Semoinset S.A. y CNT EP, donde colaboró en tareas relacionadas con el soporte técnico, cableado estructurado y diagnóstico de fallas en sistemas de red. Actualmente, sus intereses se centran en el diseño de soluciones tecnológicas orientadas a la mejora de la conectividad en zonas de difícil acceso, el desarrollo de sistemas embebidos y la innovación en redes móviles y ópticas.

Efrén André Herrera Baños
Magíster en Automatización y Control Industrial, e Ingeniero en Electrónica y Automatización. Se desempeña como docente universitario, consultor e ingeniero de soporte en el sector industrial, donde ha participado activamente en proyectos de automatización de procesos, integración de tecnologías y mejora continua en sistemas industriales.
Su labor profesional combina la experiencia técnica con el compromiso académico, contribuyendo tanto a la formación de nuevos profesionales como al fortalecimiento de soluciones tecnológicas en entornos productivos. eaherrer@espol.edu.ec

Luis Efrén Herrera Baños
Magíster en Automatización y Control Industrial, e Ingeniero en Electrónica y Automatización. Se ha desempeñado como docente universitario, consultor e ingeniero de soporte en el sector industrial, donde ha participado en diversos proyectos de automatización, control de procesos y modernización tecnológica.
Es becario gracias a un convenio entre la Fundación RETECA y la University of Applied Sciences and Arts of Southern Switzerland (SUPSI), donde ha desarrollado actividades investigativas en el área científica de Electrónica Digital, Microelectrónica y Bioelectrónica en el Departamento de Electrónica Aplicada. Su experiencia combina la docencia, la investigación aplicada y la intervención directa en procesos industriales, con un enfoque en la eficiencia y la innovación tecnológica.
Para contacto profesional: luefherr@espol.edu.ec

Efrén Vinicio Herrera Muentes es Ph.D.
Ingeniería, con una sólida formación académica que incluye una Maestría en Ingeniería de Control Industrial y una Maestría en Docencia y Gerencia en Educación Superior. Posee además un Diplomado en Microcontroladores, un Diplomado en Gerencia en Educación Superior y es Especialista en Docencia en Educación Superior. Es Ingeniero Eléctrico con especialización en Electrónica.
Con más de 25 años de experiencia como docente universitario, ha contribuido significativamente a la formación de profesionales en el área de ingeniería, destacándose por su compromiso con la excelencia educativa y la innovación en el aula. Paralelamente, ha trabajado como consultor e ingeniero de soporte en el sector industrial desde 1990 hasta la actualidad, colaborando en múltiples proyectos tecnológicos e industriales a nivel nacional.
Es coautor de libros sobre Electrónica, donde ha plasmado su experiencia y conocimiento técnico para enriquecer la formación académica de estudiantes y profesionales del área. Su enfoque integral entre docencia, investigación y práctica industrial lo posiciona como un referente en el ámbito de la ingeniería aplicada y la educación superior en Ecuador.
Para contacto profesional: eherrera@espol.edu.ec

ISBN: 978-9942-53-140-7
9 789942 531407

Compás
capacitación e investigación