

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias para ciencias e ingeniería

Omar Cevallos Muñoz

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias para ciencias e ingeniería



Omar Cevallos Muñoz

Introducción a las ecuaciones
diferenciales ordinarias para ciencias e ingeniería



Introducción a las ecuaciones
diferenciales ordinarias para ciencias e ingeniería

© Omar Cevallos Muñoz
Universidad Técnica Estatal de Quevedo

Una obra de relevancia producto del
4to. Congreso Internacional de Educación
Superior

Publicado por acuerdo con los autores.

© 2021, Editorial Grupo Compás
Guayaquil-Ecuador

Grupo Compás apoya la protección del copyright, cada uno de sus textos han sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa del editorial.

El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

Editado en Guayaquil - Ecuador

ISBN:978-9942-33-422-0



Cita.

Cevallos, O. (2021) Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias para ciencias e ingeniería. Editorial Grupo Compás.

INDICE

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales	1
1.1. Definición de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).....	2
1.1.1 Términos en una ecuación diferencial	3
1.1.1 Orden, grado y linealidad de las ecuaciones diferenciales	5
1.2. Solución de una ecuación diferencial ordinaria	7
1.3. Origen de las ecuaciones diferenciales ordinarias	11
1.4. Teorema de existencia y unicidad	14
1.4.1. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden	14
2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	15
2.1. Formas comunes de las ecuaciones diferenciales de primer orden	15
2.2. Ecuaciones diferenciables con variables separables	16
2.3. Función homogénea	19
2.4. Ecuaciones diferenciales homogéneas	20
2.5. Ecuaciones diferenciales exactas	23
2.6. Ecuaciones diferenciales inexactas	26
2.7. Ecuaciones diferenciales de primer grado especiales.....	31
2.7.1. Ecuación de Lagrange	31
2.7.2. Ecuación de Clairaut	34
2.7.3. Ecuación de Bernoulli	34
2.8. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.....	39
2.8.1. Aplicaciones geométricas	39
2.8.1. Trayectorias ortogonales.....	41
2.9. Aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden en Física	44
3. Ecuaciones diferenciales de orden n.....	62
3.1. Ecuaciones diferenciales de segundo orden reducibles a primer orden	62
3.2. Ecuaciones diferenciales lineales	68
3.2.1. Principio de superposición o linealidad.....	70
3.2.2. Dependencia e independencia lineal	71
3.2.3. Wronskiano.....	72
3.2.4. Problemas con valor inicial.....	75

3.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas	77
3.3.1. Ecuaciones de segundo orden de coeficientes constantes.....	77
3.3.2. Ecuación de Cauchy-Euler	83
3.4. Ecuaciones de orden arbitrario con coeficientes constantes	88
3.5. Ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden	91
3.5.1. Método de coeficientes indeterminados	91
3.5.2. Método de variación de parámetros.....	98
3.6. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden	107
4. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	122
4.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales	122
4.1.1. Operadores y eliminación de incógnitas	122
4.2. Sistemas lineales homogéneos.....	128
4.2.1. Exponencial de una matriz	135
4.3. Sistemas lineales no homogéneos	138
4.3.1. Método de variación de parámetros.....	138
5. Ecuaciones diferenciales resueltas por series de potencias	142
5.1. Algunas definiciones sobre series de potencias.....	142
5.2. Resolución de ecuaciones diferenciales por series de potencias	144
5.2.1. Resolución de la serie para el caso particular $x = 0$	144
5.2.2. Resolución de ecuaciones diferenciales en puntos $x \neq 0$	150
5.3. Resolución de ecuaciones diferenciales en puntos singulares	151
5.4. Resolución de ecuaciones diferenciales mediante series específicas.....	152
5.4.1. Ecuación diferencial de Legendre.....	152
5.4.2. Polinomios de Legendre	154
5.4.3. Ecuación diferencial de Bessel.....	155
5.4.4. Funciones de Bessel.....	157
5.4.5. Propiedades de las funciones de Bessel	157
5.5. Resolución de ecuaciones diferenciales por el método de Frobenius.....	162
6. Ecuaciones diferenciales en series de potencias	167
6.1. Definición de la transformada de Laplace.....	168
6.2. Transformada inversa de Laplace.....	173

6.3. Traslación sobre el eje s.....	175
6.4. Fracciones parciales.....	177
6.5. Propiedades de la transformada de Laplace	180
6.5.1. Transformada de la derivada de una función	181
6.5.2. Transformada de la integral de una función	183
6.6. Ecuaciones diferenciales por transformadas de Laplace	188
6.7. Transformadas de funciones especiales.....	192
6.8. Convolución	199
6.9. Aplicaciones de la transformada de Laplace	201
7. Apéndice	205
A.1. Tabla de derivadas e integrales de funciones polinómicas y trascendentes	205
A.2. Métodos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales	206
A.3. Tabla de transformadas de Laplace	209
A.4. Series de potencias.....	211
8. Bibliografía	212

INTRODUCCION

Este trabajo está diseñado para facilitar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y de Orden Superior a los estudiantes de las diferentes Carreras de Ciencias e Ingeniería. A efectos de lograr el objetivo, se ha tratado de presentar cada uno de los casos en forma sencilla, evitando el uso riguroso del cálculo, introduciendo artificios sencillos, fáciles de comprender y aplicar sin menoscabar la profundidad del tema.

A la presentación teórico práctica del objeto de estudio le sucede un problemario que presenta los ejercicios resueltos en varias etapas de manera que el estudiante logre profundizar sus conocimientos en la medida que avanza en la resolución del ejercicio. Se pretende incursionar al lector en el uso de computadoras utilizando el software Matlab® el cual permite buscar la solución de problemas de cálculo, álgebra, estadística, econometría, control de calidad, series de tiempo, procesamiento de señales e imágenes, comunicaciones, diseño de sistemas de control, sistemas de prueba y medición, modelado financiero, entre otros. Es posible integrar el código Matlab con otros lenguajes y aplicaciones distribuir algoritmos y aplicaciones que se desarrollan mediante esta aplicación.

El requisito para comprender este libro es tener conocimiento de cálculo diferencial e integral. Es de destacar que la presente obra se origina gracias a la colaboración de mis colegas, alumnos y de mi familia. Cada uno de ellos aportó con lo que estaba a su alcance. Especialmente agradezco a los colegas y amigos que permitieron corregir algunos conceptos para que el aprendizaje sea eficaz, sin perder por ello la riqueza didáctica e incluso amena que se procuró desde el primer momento, así como el apoyo constante del Dr. Eduardo Díaz Ocampo, Rector de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo y sin lugar a dudas a todo el actual grupo de Directivos de la FCI y del Dr. Byron Oviedo Bayas, Director de la Unidad de Investigación.

Esperamos de los amables lectores todas las sugerencias que permitan mejorar esta obra y le sea útil en su formación profesional y en su trabajo.

El autor

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

ISABELLA, LISSET, DANIEL Y CHRISTIAN

quienes han sido parte fundamental para
escribir este libro, y porque tengo la convicción
de que Dios los convertirá en guías de su prójimo

Omar Cevallos Muñoz

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

MOTIVACIÓN

Las ecuaciones diferenciales son empleadas en muchas áreas de las matemáticas, la ciencia y la ingeniería. Es probable que el lector ya se haya encontrado con ejemplos sencillos de ellas en cursos de matemática, física o química, porque en las ciencias y la ingeniería se desarrollan modelos matemáticos para comprender mejor los fenómenos físicos. Y con frecuencia en estos modelos aparecen ecuaciones que contienen derivadas o diferenciales de una función incógnita. A esas ecuaciones, que involucran al menos una derivada de una variable, se les denomina **ecuaciones diferenciales**.

El **objetivo general** del presente capítulo es introducir las definiciones básicas y el significado de la solución de la ecuación diferencial.

PRERREQUISITOS PARA ABORDAR ESTE TEMA

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Concepto de solución de ecuaciones
- Nomenclaturas de las derivadas
- Derivadas ordinarias
- Derivadas parciales
- Teoremas sobre derivadas
- Concepto de antiderivada
- Teorema fundamental del cálculo

Se recomienda buscar información para iniciar y orientar los repasos antes de abordar el tema.

1.1. Definición de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

Antes de la definición de ecuación diferencial, recordemos la nomenclatura general de

derivadas: $\frac{dz}{dp}$

Se lee, primera derivada de z con respecto a p .

La variable z contenida en el diferencial del numerador, es la **variable dependiente**.

La variable p contenida en el diferencial del denominador, es la **variable independiente**.

Una **Ecuación Diferencial (ED)**, es una expresión matemática que contiene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Son *ejemplos* de ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{d^3z}{dt^3} - 3t \frac{d^2z}{dt^2} + 4 \frac{dz}{dt} - 2z = 0$
2. $t^2 \frac{d^5i}{dt^5} + (t-2) \frac{d^4i}{dt^4} + \frac{d^3i}{dt^3} - t \frac{d^2i}{dt^2} - 12.6 \frac{di}{dt} + 5i = 3 \cos(3t - 2\pi)$
3. $6i' - 7i = 15t^2 + 3t + 10$
4. $10x^2 y'' - 5y' - 7y = 9x$
5. $m \frac{d^2z}{dt^2} = mg - k \frac{dz}{dt}$

Una ecuación diferencial que sólo implica derivadas ordinarias con respecto a una sola variable independiente se conoce como ecuación diferencial ordinaria (**EDO**), una ecuación diferencial que implica derivadas parciales con respecto a más de una variable independiente se conoce como ecuación en derivadas parciales (**EDP**).

La ecuación $7t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 12t \frac{dx}{dt} - 2x = 0$, es una **EDO**, porque solo presenta derivadas de una variable dependiente x con respecto a una variable independiente t , mientras que, $5z \frac{\partial u}{\partial x} - 3x \frac{\partial u}{\partial z} = x - 2z$, es una **EDP** porque contiene derivadas parciales de una variable dependiente u con respecto a dos variables independientes x y z .

Asimismo, $u_{xx} + 3u_{xy} - 20 = 0$ es una **EDP** porque contiene derivadas parciales de una variable dependiente u con respecto a dos variables independientes x y y .

1.1.1. Términos en una ecuación diferencial

Si observamos la siguiente estructura de orden de los términos de las ecuaciones diferenciales:

$$a(x, y) \frac{d^n y}{dx^n} + b(x, y) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + u(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2} + v(x, y) \frac{dy}{dx} + w(x, y)y = g(x, y)$$

ésta se denomina **estructura canónica**, donde y es la *variable dependiente* y x es la *independiente*. Los coeficientes que multiplican a las derivadas, a la variable dependiente sin derivar y el término al lado derecho del igual, son funciones tanto de la variable dependiente y como de la variable independiente x .

Un caso más simple de esta ecuación diferencial se presenta cuando:

$$a(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + u(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + v(x) \frac{dy}{dx} + w(x)y = g(x)$$

donde se observa que los coeficientes que multiplican a las derivadas, a la variable dependiente sin derivar y el término al lado derecho del signo igual, no son funciones simultáneas de las variables x y y , sino que sólo son funciones de la variable independiente x .

Con el fin de identificar los términos de una ecuación diferencial, debemos recordar:

- Varias derivadas de la variable dependiente y respecto a la variable independiente x , siempre se ordenan en forma descendente de mayor a menor, al lado izquierdo del igual.
- Un término de la variable dependiente y sin derivar, que siempre se ubica en último lugar, al lado izquierdo antes del igual.
- Los coeficientes son las expresiones y/o constantes, que se encuentran ya sea multiplicando a las derivadas de la variable dependiente, y/o a la variable dependiente sin derivar.
- Las expresiones constantes y/o funciones de la variable independiente, que no están multiplicando a ninguna derivada, ni multiplicando a la variable dependiente sin derivar, por lo general, se ubican al lado derecho del signo igual. A este término lo llamaremos con el nombre de señal de entrada $g(x)$.

Ejemplos de aplicación:

$$1. \frac{d^5 i}{dt^5} + 3 \frac{d^4 i}{dt^4} + 2t \frac{d^3 i}{dt^3} - 5t^2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \frac{di}{dt} - 7i = 12 \operatorname{sen}(2t) + 10t^6 - 9$$

- Variable dependiente: i
- Variable independiente: t
- Coeficiente de la quinta derivada de i respecto a t : 1
- Coeficiente de la cuarta derivada de i respecto a t : 3
- Coeficiente de la tercera derivada de i respecto a t : $2t$
- Coeficiente de la segunda derivada de i respecto a t : $-5t^2$
- Coeficiente de la primera derivada de i respecto a t : 2
- Coeficiente de la variable dependiente sin derivar: -7
- Señal de entrada o $g(x)$: $12 \operatorname{sen}(2t) + 10t^6 - 9$

$$2. 6 \frac{dv}{dt} - 7v = 15t^2 + 3t + 10$$

- Variable dependiente: v
- Variable independiente: t

- Coeficiente de la primera derivada de v con respecto a t : 6
- Coeficiente de la variable dependiente sin derivar: -7
- Señal de entrada $g(x)$: $15t^2 + 3t + 10$

1.2.2. Orden, grado y linealidad de las ecuaciones diferenciales

Orden de una ecuación diferencial: Es lo mismo que la máxima derivada contenida en una Ecuación Diferencial (ED).

Ejemplos:

1. $\frac{d^3 y}{dx^3} - 5x \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 7y = 0$ Orden: 3
2. $\frac{d^5 i}{dt^5} + 10 \frac{d^4 i}{dt^4} + 3t \frac{d^3 i}{dt^3} - 5t^2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} - 7i = 0$ Orden: 5
3. $\frac{dv}{dt} - 7v = 15t^2 + 3t + 10$ Orden: 1
4. $10x^2 y'' - 5y' - 7y = 9x$ Orden: 2

Grado de una ecuación diferencial: Es lo mismo que el exponente de la máxima derivada contenida en una ED.

Ejemplos:

1. $\frac{d^3 y}{dx^3} - 5x \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 7y = 0$ Grado: 1
2. $6 \left(\frac{d^5 v}{dt^5} \right)^3 - 7v = 15t^2 + 3t + 10$ Grado: 3
3. $10x^2 y'' - 5y' - 7y = 9x$ Grado: 1
4. $\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^3 - 5 \left(\frac{dx}{dt} \right)^5 = y$ Grado: 3
5. $\left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right)^2 - 7 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^3 = 15t^2 + 3t + 10$ Grado: 2

Linealidad de una ecuación diferencial: Es una característica que se verifica cuando se cumplen simultáneamente las siguientes tres condiciones en una **Ecuación Diferencial**:

- El grado de la ED es igual a 1.
- El exponente de la variable dependiente sin derivar contenida en la ED, es igual a 1.
- Todos los coeficientes de las derivadas y de la variable dependiente sin derivar, deben ser constantes y/o funciones solamente de la variable independiente. No importan los exponentes de los coeficientes.

Ejemplos:

1. $6 \frac{dv^5}{dt} - 7v = 15t^2 + 3t + 10$

- Grado 5, no lineal.

$$2. 6v - 7v = 15t^2 + 3t + 10$$

- Grado 1, lineal.

El exponente de la variable dependiente sin derivar es 1.

Todos los coeficientes son constantes, ésta ED es lineal.

$$3. \frac{d^3 y}{dx^3} - 5x \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 7y = 0$$

- Grado 1

Exponente de la variable dependiente sin derivar es 1

Todos los coeficientes son constantes y/o funciones de la variable independiente x , solamente.

Esta ED es lineal.

$$4. \frac{d^5 i}{dt^5} + 10 \frac{d^4 i}{dt^4} + 3t \frac{d^3 i}{dt^3} - 5t^2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} - 7i = 0$$

- Grado 1

Exponente de la variable dependiente sin derivar es 1

Todos los coeficientes son constantes y/o funciones solamente de la variable independiente t .

Esta ED es lineal.

$$5. 6 \frac{dv^5}{dt} - 7v^3 = 15t^2 + 3t + 10$$

- Grado 5

Exponente de la variable dependiente sin derivar es 3.

Esta ED no es lineal.

$$6. \frac{d^4 y}{dx^4} - 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6y = \text{sen } x$$

- Grado 1

Exponente de la variable dependiente sin derivar es 1

Algunos coeficientes son funciones de la variable independiente x pero también de la variable dependiente y .

Esta ED es lineal.

Ejercicios propuestos:

En los siguientes ejercicios, determinar el orden, grado y linealidad en la variable dependiente indicada de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $\frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$

2. $\sqrt{y' + y} = \cos x$

3. $\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + y = 0$

4. $x^4 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - 3\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 3x$

5. $\sqrt{(y')^2 + y} = y''$

6. $(D_x y)^3 = 3x^2 - 1$

7. $x^4 \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - y^4 \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$

8. $\operatorname{sen} x (y'')^2 = \operatorname{cos} x (y'')^4 - 1$

9. $\ddot{x} - \left(1 - \frac{\dot{x}}{3}\right) \dot{x} + x = 0$

10. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$

1.2. Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Se llama solución de una EDO a cualquier función que satisfice a dicha EDO; es decir, la función solución convierte a la EDO dada en una identidad.

Si $y = F(x)$ es una función y f es la derivada de F , es decir, $\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$, de donde: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, esto corresponde a la representación de una ecuación diferencial ordinaria. Además, si, $d(G(x)) = d(F(x) + C) = f(x)$, entonces, $y = G(x) = F(x) + C$ toma el nombre de *solución general de la ecuación diferencial*, y, cuya gráfica representa una familia de curvas que dependen de la constante C .

En otras palabras, si la función satisfice a la ecuación diferencial, al conjunto de todas las soluciones de la EDO en algún intervalo I se llama *solución general* de la EDO cuando aparece la constante de integración C sin ningún valor conocido, y si no aparece esa constante o se conoce su valor se le denomina *solución particular*. Decimos que una solución está dada *explícitamente* si la variable dependiente esta despejada, en caso contrario decimos que está escrita *implícitamente*.

Ejemplos:

1. Demostrar que la función $f(x) = Ce^{-2x}$, donde C es una constante, es solución general de la EDO, $y' = -2y$ en x .

Puesto que, $f'(x) = -2(Ce^{-2x}) = -2f(x)$ satisfice a la EDO, se concluye que es la solución general de la EDO, además, se observa que dicha solución está escrita explícitamente, por otra parte, si tenemos la solución escrita como, $e^{2x} f(x) = C$, entonces, la ecuación está escrita implícitamente.

2. Demostrar que la función $x = y \ln(Cy)$, donde C es una constante, es solución general de la EDO: $y'(x + y) = y$ en x ,

En efecto, derivando implícitamente: $1 = \ln(Cy) \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}$ y sustituyendo en la EDO, $\frac{y \ln(Cy) + y}{\ln(Cy) + 1} = \frac{y(\ln(Cy) + 1)}{\ln(Cy) + 1} = y$, por tanto, $x = y \ln(Cy)$ es solución de la EDO.

Podemos abordar la solución de ecuaciones diferenciales (ED) y problemas de valor inicial (VI) desde una perspectiva experimental, mediante la aplicación de los recursos simbólicos del sistema Matlab®, por lo que a manera de ejemplo se pretende resolver la siguiente ecuación a través de un script (se recomienda al lector revisar el apéndice donde se muestra una guía básica para el manejo del software).

3. Dada la ecuación, $my'' = mg + ky'$, comprobar que, $y(t) = A + Be^{kt/m} + mgt/k$, es una solución de la ED en referencia.

Solución

Desde el menú **New**, pinchar en **Script**, esto genera una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

- a. Definir simbólicamente $y(t)$.
- b. Sustituir en la ED
- c. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t y k m g A B
y = A + B*exp(k*t/m) + m*g*t/k;
a=m*diff(y,t,2)-k*diff(y,t)+m*g;
a=1/m*B*k^2*exp(k*t/m)-k*(B*k/m*exp(k*t/m)+m*g/k)+m*g;
simplify(a)
```

Guardar con el nombre ejer_001 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida, $>> 0$

4. Comprobar que la función $y = e^x(3 \cos 2x + \text{sen } 2x)$ es solución particular de la ecuación $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Al igual que en el ejercicio precedente, se tiene,

- a. Definir simbólicamente $y(t)$.
- b. Sustituir en la ED

c. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t
y = exp(t)*(3*cos(2*t)+sin(2*t));
a=diff(y,t,2)-2*diff(y,t)+5*y;
a = exp(t)*(-12*cos(2*t)-4*sin(2*t))+...
2*exp(t)*(-6*sin(2*t)+2*cos(2*t))+...
exp(t)*(3*cos(2*t)+sin(2*t))+...
exp(t)*(12*sin(2*t)-4*cos(2*t))+...
exp(t)*(-6*cos(2*t)-2*sin(2*t))+...
exp(t)*(15*cos(2*t)+5*sin(2*t));
simplify(a)
```

Guardar con el nombre ejer_002 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida, >> 0

Ejercicios propuestos:

En los siguientes ejercicios, demostrar que la *función* dada es solución general de la *ecuación diferencial* propuesta.

1. Verificar que la función $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ satisface a la ecuación diferencial $y'' + y' - 12y = 0$

2. Comprobar que la función $y = e^{3x} \cos 2x$ satisface a la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 13y = 0$

3. Dada la función $y = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$ probar que satisface a la ecuación diferencial $y'' + y = \tan x$

4. Verificar que las funciones $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{4x}$ $x \in (-\infty, \infty)$ satisfacen a la ecuación diferencial $y'' - y' - 12y = 0$

5. Comprobar que las funciones $y_1 = \text{Cosh}(2x)$, $y_2 = \text{Senh}(2x)$ $x \in (-\infty, \infty)$ satisfacen a la ecuación diferencial $y'' - 4y' = 0$

6. Verificar que la función $x^5 y + x^4 y^2 + \frac{x^4}{4} = c$ satisfacen a la ecuación diferencial

$$(5xy + 4y^2 + 1).dx + (x^2 + 2xy).dy = 0$$

7. Comprobar que la función $y = (-3x^4 + Cx^3)^{1/3}$ satisface a la ecuación diferencial

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3 y^4$$

8. Determine los valores de m tales que $y = e^{mx}$ sea solución de cada EDO:

a. $y'' - 5y' + 6y = 0$

b. $y'' + 10y' + 25y = 0$

c. $y' + 2y = 0$

9. Desarrollar lo solicitado:

a. Demuestre que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son soluciones de $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

b. Son también soluciones $a.y_1$ y $b.y_2$ con a y b constantes arbitrarias.

c. La suma de $y_1 + y_2$, ¿es solución?

10. Sea $h(x) = \int_1^x \frac{e^z}{z} dz, x > 0$, hallar los valores de " a " de manera que la función

definida por $f(x) = \frac{e^{ah(x)}}{x}$ satisface a la ecuación diferencial $x^2 y'' + (3x - x^2)y' +$

$$(1 - x - 3e^{2x})dy = 0. \text{ Sol. } a = \pm\sqrt{3}$$

1.3. Origen de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Se puede obtener una EDO a partir de una ecuación (solución) conocida, o sea, si tenemos una ecuación (función) que relaciona de alguna manera dos variables y " n " constantes arbitrarias, es fácil obtener a partir de ésta una EDO de orden " n " o mayor que " n " que tenga a ésta ecuación como solución.

Proceso: La EDO se obtiene eliminando las constantes arbitrarias. La eliminación se puede hacer de dos maneras:

- Aislado en un miembro de la ecuación a las constantes, derivando la ecuación tantas veces como constantes arbitrarias tenga y resolviendo el sistema junto a la ecuación original.
- Otra forma es derivar la función algunas veces y relacionarlas para obtener una EDO, obteniendo alguna identidad.

Ejemplo. Encontrar la EDO cuya solución es dada:

1. $x = A \operatorname{sen}(Wt + B)$, siendo A la constante y W un parámetro que no debe ser eliminado.

Se entiende que $x=x(t)$. Derivemos la función " x " dos veces:

$$x = A \operatorname{sen}(Wt + B), x' = AW \cos(Wt + B), x'' = -AW^2 \operatorname{sen}(Wt + B)$$

Se observa que si a x le multiplicamos por W^2 y le sumamos a x'' , obtenemos la identidad $0 = 0$, por lo tanto la EDO buscada sería: $x'' + W^2x = 0$.

2. $x^2 + y^2 - Cx = 0$, donde C es la constante.

Despejando la constante C : $x + y^2/x = C, x \neq 0$.

Derivando implícitamente con respecto a " x ": $1 + \frac{x(2y)y' - y^2}{x^2} = 0$.

De donde la EDO buscada será: $x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$

3. Hallar la EDO cuya solución general es la familia de parábolas con eje paralelo al eje Y , y vértice sobre el eje X .

La familia de parábolas según el enunciado es: $(x - h)^2 = 4py$, donde, " h " es una constante, y , " p " es un parámetro de la EDO.

Derivando implícitamente con respecto a x : $2(x - h) = 4py'$.

De donde: $x - h = 2py'$ ó $h = x - 2py'$.

Reemplazando en $(x - h)^2 = 4py$, se tiene: $[x - (x - 2py')]^2 = 4py$.

Simplificando se tiene la EDO buscada: $p(y')^2 = y$ ó $p(y')^2 - y = 0$

Ejercicios propuestos:

1. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 \cos(x + C_2)$

Sol. $y'' + y = 0$

2. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Sol. $y'' + 4y' + 3y = 0$

3. Encontrar una ecuación diferencial cuya solución general sea la familia de círculos con centros sobre la recta $y = x$ y tangentes al eje y . Sol. $\frac{y''}{1+(y')^2} = \pm 1$

4. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general de la familia de curvas es $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, correspondiente a circunferencias de radio fijo r con centro en el eje x , siendo a una constante. Sol. $(1 + y'^2)y^2 = r^2$

5. Hallar la EDO cuyas soluciones son las circunferencias cuyos centros están sobre el eje OX y son tangentes a las bisectrices de los cuadrantes primero y cuarto. Sol. $y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 = x^2$

6. Hallar la EDO de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas cuya ecuación es $x^2 + (y - a)^2 = a^2$

$$\text{Sol. } y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

7. Hallar la ecuación diferencial pertenecientes a la cardioide $r = a(1 - \text{sen}\theta)$

$$\text{Sol. } (1 - \text{sen}\theta) dr + r \cos\theta d\theta$$

8. Hallar la ecuación diferencial pertenecientes a la estrafoide, $r = a(\text{sec}\theta + \text{tan}\theta)$.

$$\text{Sol. } \frac{dr}{d\theta} = r \text{sec}\theta$$

9. Un circuito en serie contiene un resistor, un capacitor y un inductor, encuentre la ecuación diferencial para la carga $q(t)$ del capacitor si la resistencia es R , la capacitancia es C , la inductancia es L y el voltaje aplicado es $E(t)$. Sol. $L \frac{dq^2}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$.

10. En la práctica, un cuerpo A de masa m que va cayendo, tal como un hombre que desciende en paracaídas) encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea $v(t)$. Empleando la segunda ley de Newton hállese una EDO para la velocidad en un instante cualquiera. Sol. $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$

1.4. Teorema de existencia y unicidad

De los ejemplos anteriores se puede observar que la solución general de una ecuación diferencial converge a una familia de funciones, y que al establecerse condiciones o valores iniciales se convierte en una solución particular, situación que puede desencadenar dos preguntas:

1. ¿Existe solución al problema?
2. ¿Existe una región del plano donde para cada (x_0, y_0) sea posible encontrar una y sólo una curva integral de la ecuación que pase por él?

Es decir, se plantea la posibilidad de resolver:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Las expresiones anteriores corresponden a un problema de EDO de condición inicial de Cauchy y las preguntas anteriormente declaradas se acogen en el siguiente teorema.

1.4.1 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden

Dada una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

Donde $f(x, y)$ está definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0) .

Si $f(x, y)$ satisface las condiciones:

a) $f(x, y)$ es continua en R .

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en R .

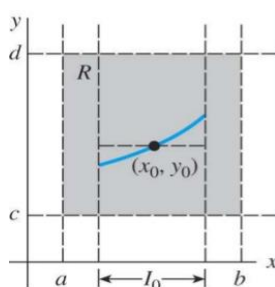


Figura 1.1

De la Figura 1, se observa que existe un intervalo I_0 con centro en x_0 y la existencia de una y sólo una función $y = g(x)$ definida en el intervalo I_0 que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$, es decir, se debe cumplir:

- Continuidad de $f(x, y)$ en R .
- Acotamiento de $f(x, y)$ en R .

Notas

1. Obsérvese que las condiciones dadas son suficientes; pero no necesarias, es decir, en el caso en que no se verifique alguna de las condiciones establecidas en el teorema, no podemos conocer si existe solución única o no al problema planteado. Puede ocurrir cualquier cosa.
2. El teorema hace referencia a una solución local de la ecuación en un punto determinado, no a una solución general.
3. Existe un enunciado general de este teorema (también llamado Teorema de Picard) válido para toda ecuación y sistema de ecuaciones diferenciales ordinarios.

Ejemplos

1. Aplicar el teorema de existencia y unicidad a la siguiente ecuación, encontrando los recintos del plano de una solución única que pase por los puntos $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$.

Considerar la expresión, $y' = \frac{1}{y^2}$

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$$

Se observa que no todos los puntos del eje x cumplen las condiciones del teorema de existencia, ya que, $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en $y = 0$ no obstante, en cada punto

del eje x pasa una sola curva solución:

$y = \sqrt[3]{3x + C}$ o también, $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$. La figura 1.2, ilustra una familia de curvas de la solución hallada.

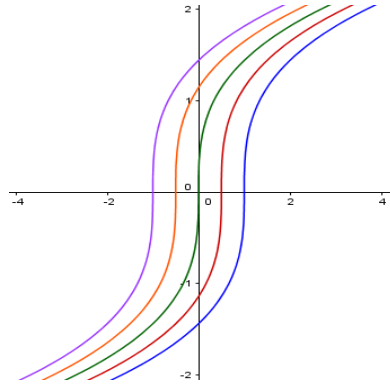


Figura 1.2

2. Empleando Matlab, resolver la ED $y' = -y - 2t$, obtener la solución local con la CI $(2,1)$ y representarla.

Se plantea la solución a través de los siguientes pasos:

- Definir simbólicamente $y(t)$.
- Sustituir en la ED
- En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
clear fig
syms t
dsolve('Dy=-y-2*t','y(-2)=1')
ezplot('-2*t+2-5*exp(-t)/exp(2)',[-4,3]),
hold on
plot(-2,1,'*r')
```

Guardar con el nombre ejer_003 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

ans =

2 - 5*exp(-t)*exp(-2) - 2*

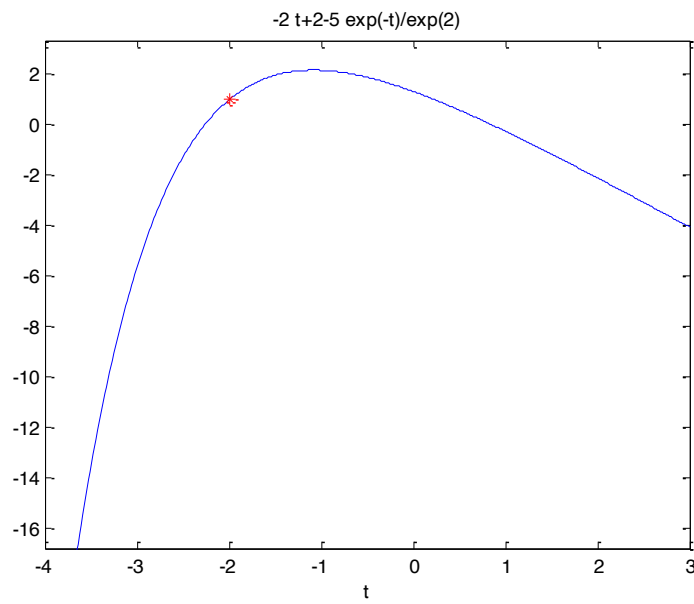


Figura 1.3

Ejercicios propuestos:

Aplicar el teorema de existencia y unicidad a la siguiente ecuación, encontrando los recintos del plano de una solución única que pase por algunos puntos:

$$1. \begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} xy' = y - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$4. y' = x^2 \operatorname{sen}(y)$$

$$5. y' = \frac{y-1}{x^2+x+1}$$

CAPÍTULO II

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

MOTIVACIÓN

Es de conocimiento general que la ciencia hoy en día nos plantea desafíos al resolver problemas no sólo de carácter estático sino también de naturaleza dinámica. Los fenómenos naturales que implican cambios se describen mejor mediante ecuaciones que relacionan cantidades variables, tal como la razón o cambio de la variable dependiente $y = f(t)$ respecto a la variable independiente t , la cual se escribe como $y' = dy/dt$, describiendo así a un universo cambiante a través de la modelización de problemas físicos, químicos, biológicos y demás aplicaciones que pueden ser resueltos como ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

El **objetivo general** del presente capítulo es resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, determinando la solución general y la solución particular de la misma.

PRE-REQUISITOS PARA ABORDAR ESTE TEMA

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Identificar las características de una ecuación diferencial ordinaria lineal.
- Aplicar diferentes técnicas de integración
- Identificar y trazar todo tipo de gráficas de relaciones polinómicas y trascendentes
- Traducir al lenguaje simbólico problemas verbales relacionados con la Física, Química y Biología y otras aplicaciones cuyo modelo matemático corresponde a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

2.1. Formas comunes de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Como se manifestó en el capítulo anterior, las ecuaciones diferenciales de primer orden, corresponden a todas aquellas en que aparecen relacionadas la variable independiente x , la dependiente o función incógnita $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$, las cuales pueden ser escritas de la siguiente manera:

- a. Forma normal: $y'(x) = f[x, y(x)]$
- b. Forma implícita: $F[(x, y(x), y'(x))] = 0$
- c. Forma diferencial: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Son algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones las que a continuación se enlistan:

1. $y' = 8 \text{ sen}(4x)$, EDO escrita en su forma normal
2. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - x^2y = 0$, EDO escrita en su forma implícita

3. $(x^2y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2x - 3y - 6)dy = 0$, EDO escrita en su forma diferencial.

Existen diferentes métodos para resolver de manera analítica una ecuación diferencial de primer orden, siendo los más comunes: separación de variables, coeficientes homogéneos, de coeficientes lineales, ecuaciones diferenciales exactas, factor integrante, y para la solución de ciertas ecuaciones diferenciales que presentan alguna complejidad se recurre al empleo de sustituciones o artificios de cálculos para ser resueltas.

2.2. Ecuaciones diferenciales con variables separables

Definición. Estas ecuaciones son aquellas que tienen la siguiente forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Como se puede observar, es una de las ecuaciones más básicas a resolver; supongamos la siguiente ecuación:

$$3xydx + e^y \operatorname{sen}(x)dy = 0$$

Si a la ecuación planteada la multiplicamos por la función $P(x, y) = \frac{1}{y \operatorname{sen}(x)}$, se tiene,

$$3x \operatorname{csc}(x)dx + \frac{e^y}{y} dy = 0$$

Esto nos conduce a tener una expresión que puede ser resuelta simplemente por integración directa, o sea,

$$\int 3x \operatorname{csc}(x)dx + \int \frac{e^y}{y} dy = C$$

Así como ésta, hay una infinidad de ecuaciones que no se presentan como “fáciles” en resolver, pero con algún artificio de cálculo puede facilitarnos su resolución. (Nota: debe tener en cuenta que no se debe alterar la expresión matemática de ningún modo), A continuación, se plantean y resuelven algunos ejercicios con estas características.

Ejercicios resueltos:

1. $x dx - (xe^y + e^y)dy = 0$

$$e^y dy = \frac{x}{x+1} dx$$

$$= \int e^y dy = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$e^y = x - \ln(x+1) + c; \text{ aplicando logaritmo}$$

$$\text{Sol. } y = \ln(x - \ln(x+1) + c)$$

2. $3xye^x dx - 4dy = 0$

$$3xe^x dx = 4 \frac{dy}{y}$$

$$3 \int xe^x dx = 4 \int \frac{dy}{y}$$

Aplicando la técnica de integración por partes, en $\int xe^x dx$, se tiene,

$$u = x : du = dx$$

$$dv = e^x dx, \text{ o sea,}$$

$\int dv = \int e^x dx, v = e^x$, y al sustituir todos los procesos realizados en la expresión,

$$3xe^x dx = 4 \frac{dy}{y}, \text{ se obtiene,}$$

$$3(xe^x - e^x + c) = 4 \ln(y)$$

$$e^{3(xe^x - e^x + c)} = e^{4 \ln(y)}$$

$$y^4 = c_1 e^{3(xe^x - e^x)}$$

$$\text{Sol. } y = \sqrt[4]{c_1 e^{3(xe^x - e^x)}}$$

$$3. (xy^2 + y^2)dx - ydy = 0$$

Reordenando la expresión anterior, se obtiene, $y^2(x+1)dx - ydy = 0$, o sea,

$$(x+1)dx = \frac{dy}{y}, \text{ y, resolviendo para cada variable,}$$

$$\int (x+1)dx = \int \frac{dy}{y}$$

$$x^2 + x + C = \ln(y)$$

$$\text{Sol. } y = C e^{x^2+x}$$

$$4. ydx - (x+1)dy = 0$$

Similar a los casos que preceden,

Reordenando, $\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y}$ e integrando de manera directa,

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(x+1) + C = \ln(y)$$

$e^{\ln(x+1)+C} = y$, luego por propiedades de los logaritmos se tiene,

$$\text{Sol. } y = C(x+1)$$

$$5. y' = (x+y)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$$

$$dy = (x+y)^2 dx$$

A diferencia de los otros ejercicios, es necesario realizar la siguiente sustitución,

$t = x + y$, luego derivamos cada término,

$$dt = dx + dy$$

$$dt - dx = t^2 dx$$

$dt = (t^2 + 1)dx$, reordenando las variables e integrando de manera directa,

$$\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \int x dx$$

$$\arctan(x + y) = x + c$$

$$x + y = \tan(x + c)$$

$$\text{Sol. } y = \tan(x + c) + x$$

A manera de ejemplo se pretende resolver las siguientes ecuaciones mediante Matlab.

$$6. y' + y^2 \sin(x) = 0$$

Solución:

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
close all
```

```
clc
```

```
x=solve('int(sin(x),x)+int(1/y^2,y)')%Se escoge como variable de salida x,debido a presencia de función Lambertw(x)=w que equivale a w*exp(w) = x
```

b. Guardar con el nombre ejer_2_1 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>>x= pi ± acos(1/y)
```

lo que puede ser escrito como, $\cos(x) + 1/y = C$

Ejercicios propuestos

$$1. (\ln(x) + y^3)dx = 5xy^2 dy \quad \text{Sol. } y = \sqrt[3]{Cx^{3/5} - \ln(x) - \frac{5}{3}}$$

$$2. x^4 \ln(x) dx = dy \quad \text{Sol. } = c_1 - \frac{x^5}{25} + \frac{1}{5}x^5 \ln(x)$$

$$3. xe^x dx = 3y dy \quad \text{Sol. } -\sqrt{\frac{2}{3}} * \sqrt{C + e^x(x + 1)}$$

$$4. (x + 4)^4 dx = dy \quad \text{Sol. } y = \frac{x^5}{5} + 4x^4 + 32x^3 + 128x^2 + 256x + C$$

$$5. (4x + 3)^2 dx = 2y dy \quad \text{Sol. } y = \frac{\sqrt{C + x(x^2 + 36x + 27)}}{\sqrt{3}}$$

$$6. (e^{2x+2y}) dx = dy \quad \text{Sol. } y = -\frac{1}{2} \ln\left(2\left(C - 2\frac{e^{2x}}{2}\right)\right)$$

$$7. \tan(y) dx = \cos(x) dy \quad \text{Sol. } y = \csc\left(e^{C+2\tanh^{-1}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right)$$

$$8. (4x + 3) dx = dT, \quad T(25^0) = 1000^0 \quad \text{Sol. } T = 2x^2 + 3x - 325$$

2.3. Función homogénea

Definición. Se le conoce como función homogénea de grado n si se cumple que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Son ejemplos de estos tipos de funciones:

1. $f(x, y) = xy$, al introducir el factor λ en cada término, se tiene,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$. $f(x, y)$ es una función homogénea de orden 2

$$2. f(x, y) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^2 x^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^2 \sqrt[3]{x^2}}$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^2} f(x, y)$. $f(x, y)$ es una función homogénea de orden $2/3$

$$3. f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$. es una función homogénea de orden 0

$$4. f(x, y) = e^{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{2\lambda^2 xy}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{2\lambda^2 xy}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$, es una función homogénea de orden 0

Ejercicios propuestos

Analizar si las siguientes funciones son homogéneas:

1. $f(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$
2. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$
3. $f(x, y) = x^7 - xy^6$
4. $f(x, y) = \sqrt{x^5 - y^5}$
5. $f(x, y) = e^{x+y}$
6. $f(x, y) = \tanh\left(1 + x + \frac{y}{x} + y\right)$
7. $f(x, y) = |xy + 4x^2|$
8. $f(x, y) = \sqrt{x^3y} + xy$
9. $f(x, y) = \sqrt[3]{x}$
10. $f(x, y) = \left| \sinh\left(e^{\frac{3\sqrt{4x+y}}{\sqrt{x}}+5}\right) xy \right|$

2.4. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición. Si generalizamos las Ecuaciones de Primer Orden como sigue:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

para que la ecuación diferencial sea considerada como homogénea se debe cumplir que el grado de $M(x, y)$ sea igual al grado de $N(x, y)$, es decir,

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x, y)$$

Realizando el cambio de variable, $\lambda = \frac{1}{x}$

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} M(x, y)$$

$$M(x, y) = x^n M\left(\frac{y}{x}\right)$$

Se realiza el mismo procedimiento para $N(x, y)$ obteniéndose finalmente

$$N(x, y) = x^n N\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si reemplazamos en nuestra ecuación homogénea tenemos que

$$x^n M\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^n N\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

Para poder resolver la ED es necesario de un cambio de variable como sigue,

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

$$x^n M(v)dx + x^n N(v)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^n (M(v)dx + vN(v)dx + xN(v)dv) = 0$$

$$(M(v) + vN(v))dx = -xN(v)dv$$

Finalmente se llega a una expresión en la cual las variables están separadas

$$-\frac{dx}{x} = \frac{N(v)}{M(v) + vN(v)} dv$$

Nota. Siempre que la ecuación sea homogénea se podrán separar sus variables.

Ejercicios de aplicación

A. Analice si las siguientes ecuaciones son homogéneas.

1. $x^3 dy + xy^2 dy = 0$. . Es una ecuación homogénea de grado 3.

2. $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) dy + \operatorname{cos}\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0$. . Es una ecuación homogénea de grado 0.

B. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

Reordenando la ecuación planteada como sigue,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right),$$

hacemos el cambio de variable, $y = vx$

luego, al derivar cada término, $dy = xdv + vdx$

y efectuar las operaciones respectivas,

$$xdv = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} + v \right) dx - vdx$$

$$xdv = \frac{1 - v^2}{2v} dx$$

$$\frac{2v}{1 - v^2} dv = \frac{dx}{x}$$

$$-\ln(1 - v^2) = \ln(x) + c$$

$$\frac{1}{1 - v^2} = cx$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{cx}}$$

$$y = x \sqrt{1 - \frac{1}{Cx}}$$

$$(x - y)dx - 2xdy = 0$$

$$2dy = \left(1 - \frac{y}{x}\right) dx$$

$$y = vx$$

$$dy = xdv + vdx$$

$$2xdv + 2vdx = (1 - v)dx$$

$$2xdv = (1 - 3v)dx$$

$$\int \frac{dv}{1 - 3v} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$-\frac{1}{3} \ln(1 - 3v) = \frac{1}{2} \ln(x) + C$$

$$\ln(1 - 3v) = -\frac{3}{2} \ln(x) + C$$

$$1 - 3v = C \sqrt[3]{x^2}$$

$$v = \frac{1}{3} (1 - C \sqrt[3]{x^2}), \text{ expresión que al sustituir en } y = vx, \text{ se tiene finalmente,}$$

$$\text{Sol. } y = \frac{x}{3} (1 - C \sqrt[3]{x^2})$$

$$2. (x + y)dx - 2xdy = 0$$

Similar al caso anterior y reordenando los términos, se tiene,

$$2dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$y = vx$$

$$dy = xdv + vdx$$

$$2xdv + 2vdx = (1 + v)dx$$

$$2xdv = (1 - v)dx$$

$$\int \frac{dv}{1 - v} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$\ln(1 - v) = \frac{1}{2} \ln(x) + C$$

$$1 - v = C \sqrt{x}$$

$$v = 1 - C \sqrt{x}, \text{ expresión que al ser reemplazada en, } y = vx, \text{ se obtiene,}$$

$$\text{Sol. } y = x(1 - C \sqrt{x})$$

Problemas propuestos

1. $xdy - \sqrt{xy}dx = 0$ Sol. $y = \frac{1}{4}(4C\sqrt{x} + c_1^2 + 4x)$

2. $xdy - \left(y + x \tan \frac{y}{x}\right) dx = 0$ Sol. $\text{sen}\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$

3. $(2x + y)dx - xdy = 0$ Sol. $y = Cx + 2x \ln(x)$

4. $xdy - \sqrt{xy}dx = 0$ Sol. $y = \frac{1}{4}(4C\sqrt{x} + C_1^2 + 4x)$

5. $(8x^3 + 4y^3)dx = 4xy^2dy$ Sol. $y = x^3\sqrt{C + 6\ln(x)}$

6. $(y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx = xdy$ Sol. $\frac{y}{x} = \text{sen}(\ln|x| + C)$

7. $x(\ln y - \ln x + 1)dy = ydx$ Sol. $y \ln \frac{y}{x} = C$

2.5. Ecuaciones diferenciales exactas

Pueden denotarse como EDE, y para el caso en referencia, una ecuación diferencial es exacta si y solo si se cumple la siguiente condición:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Se denomina diferencial a la siguiente expresión:

$$\text{Sea } f = f(x, y)$$

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} \partial x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial y$$

Resolución de ejercicios

1. $(2x + 1)dx + (3y + 2)dy = 0$

Aplicando la condición en establecer si es o no es exacta, se tiene,

$$M(x, y) = (2x + 1); N(x, y) = (3y + 2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0; \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \text{ entonces estamos frente a una EDE}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 1; \frac{\partial F}{\partial y} = 3y + 2$$

Integramos con respecto a x

$$f = x^2 + x + C(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = C'(y)$$

$$C'(y) = 3y + 2$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = \frac{3}{2}y^2 + 2y$$

$$f = x^2 + x + \frac{3}{2}y^2 + 2y, \text{ o simplemente, } 2x^2 + 2x + 3y^2 + 4y = C$$

$$2. (xy^2)dx + (x^2y + 2)dy = 0$$

$$M(x, y) = (xy^2); N(x, y) = (x^2y + 2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy; \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \text{ Entonces estamos frente a una EDE}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2; \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + 2$$

Integramos con respecto a x

$$f = \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + C'(y)$$

$$x^2y + C'(y) = x^2y + 2$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = 2y$$

$$f = \frac{1}{2}x^2y^2 + 2y, \text{ o simplemente, } x^2y^2 + 4y = C$$

$$3. \frac{y}{x} dx + \ln(x) dy = 0$$

$$M(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right); N(x, y) = \ln(x)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ entonces estamos ante una EDE}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}; \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x)$$

Integramos con respecto a x

$$f = y\ln(x) + C(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) + C'(y)$$

$$\ln(x) + C'(y) = \ln(x)$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = C$$

$$f = y \ln(x) + C$$

$$4. e^x y dx + (e^x + y) dy = 0$$

$$M(x, y) = e^x y; N(x, y) = e^x + y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x; \frac{\partial N}{\partial x} = e^x, \text{ entonces estamos frente a una EDE}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y; \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + y$$

Integramos con respecto a x

$$f = e^x y + c(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + c'(y)$$

$$e^x + C'(y) = e^x + y$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$f = e^x y + \frac{y^2}{2}, \text{ o sea, } 2e^x y + y^2 = C$$

$$5. \text{ Resolver la ED, } xy dy = (y^2 - x^2) dx$$

Se observa que la ED es homogénea, puesto que, $M(x, y) = y^2 - x^2$, $N(x, y) = xy$ son funciones homogéneas de grado 2, a su vez, reordenando la misma, se tiene:

$$(x^2 - y^2) dx + xy dy = 0$$

Realizando el cambio de variable $u = y/x$, la ED se transforma en una ecuación que puede ser resuelta por variables separadas, y, para resolverla en Matlab recurrimos al siguiente script.

```
close all
```

```
clc
```

```
syms x y u
```

```
y=x*u;
```

```
y=subs(y,'u(x)','u');
```

```
subs(diff(y,x)+(x^2-y^2)/(x*y),y,'y')
```

```
u=dsolve('u+x*Du+(x^2-x^2*u^2)/x^2/u=0','x')
```

b. Guardar con el nombre ejer_2_2 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

>>u =

$$2^{(1/2)} * (C6 - \log(x))^{(1/2)}$$

$$-2^{(1/2)} * (C6 - \log(x))^{(1/2)}$$

Realizando el cambio $u = y/x$, se obtiene en forma implícita la siguiente expresión,

$$\text{Sol. } \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\ln(x) = C$$

Ejercicios propuestos

$$1. (x - y)dx + (x + y)dy = 0$$

$$\text{Sol. } \ln(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x}\right) = C$$

$$2. (y + x \cos^2 \left(\frac{y}{x}\right)) dx - x dy = 0$$

$$\text{Sol. } \tan \left(\frac{y}{x}\right) - \ln x = C$$

$$3. (x^2 - y^2)dx + (y^2 - 2xy)dy = 0$$

$$\text{Sol. } \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$$

$$4. \sin(y)dx + (x \cos(y) + 2)dy = 0$$

$$\text{Sol. } x \sin(y) + 2y = C$$

$$5. (1 + ye^x + xye^x)dx + (xe^x + 1)dy = 0$$

$$\text{Sol. } xy e^x + x + y = C$$

2.6. Ecuaciones diferenciales inexactas

Cuando no se cumpla la relación de ecuación exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Utilizaremos el factor integrante el cual lo denotaremos como $\mu(x, y)$, expresión que corresponde a una función en términos de (x, y) , y que permite que una ecuación inexacta se vuelva exacta, es decir,

$$\frac{\mu(x, y) \partial M}{\partial y} = \frac{\mu(x, y) \partial N}{\partial x}$$

Además, surge la interrogante, ¿cómo hallar este factor integrante?

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu$$

Considerando que existe una función $\mu = \mu(x)$, de manera que se tenga,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)}{N} \mu$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)}{N} dx$$

Se puede llegar a una expresión análoga si, $\mu = \mu(y)$

Ahora integremos ambos lados de la ecuación,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N} \partial x}$$

Si se hubiera escogido de la otra manera se hubiera llegado a:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})}{M} \partial y}$$

Se pide resolver los siguientes ejercicios:

$$1. 3dy + (12y - 4)dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$12 - 0 = 0, \text{ o sea, } 12 \neq 0$$

Hemos comprobado que la ecuación diferencial **no es exacta**. Ahora dispongámonos a encontrar el factor integrante.

$$\text{Partiendo de la expresión, } \mu(x) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N} \partial x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{12}{3} \partial x}$$

$$\mu(x) = e^{4x}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial dada por el factor integrante, $\mu(x) = e^{4x}$, se obtiene,

$$3e^{4x} dy + e^{4x}(12y - 4)dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$12e^{4x} - 12e^{4x} = 0; \text{ por tanto, se transformó en una EDE, con lo cual se obtiene,}$$

$$M(x, y) = e^{4x}(12y - 4); N(x, y) = 3e^{4x}$$

Integrando M con respecto a x

$$f = e^{4x}(3y - 1) + c(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{4x} + C'(y)$$

$$3e^{4x} + C'(y) = 3e^{4x}$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = C$$

$$f = e^{4x}(3y - 1) + C$$

Despejando y , y tomando $f - C = C_1$, se obtiene finalmente

$$y = \frac{1}{3} \left(\frac{f - C}{e^{4x}} + 1 \right)$$

$$\text{Sol. } y = \frac{1}{3} \left(\frac{C_1}{e^{4x}} + 1 \right)$$

$$2. (3x + y)dx + (2x)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$1 - 2 = 0$, o sea, $-1 \neq 0$, luego nuestra ED no es exacta

Hemos comprobado que la ecuación diferencial no es exacta. Ahora dispongámonos a encontrar el factor integrante.

Al igual que en el ejercicio precedente,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-1}{2x} dx}$$

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln(x)}$$

$$\mu(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Multiplicamos nuestra ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{3x + y}{\sqrt{x}} dy + 2\sqrt{x} dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; \text{ con lo cual se obtiene una EDE, y por tanto,}$$

$$M(x, y) = \frac{3x + y}{\sqrt{x}}; N(x, y) = 2\sqrt{x}$$

Integrando M con respecto a x

$$f = 2\sqrt{x}(x + y) + c'(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{x} + C'(y)$$

$$2\sqrt{x} + C'(y) = 2\sqrt{x}$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = C$$

$$f = 2\sqrt{x}(x + y) + C$$

De la expresión anterior, al despejar y , se obtiene,

$$y = \frac{f - C}{2\sqrt{x}} - x$$

$$\text{Sol. } y = \frac{C_1}{2\sqrt{x}} - x$$

$$3. (x^3 - y)dx + (x - 2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$-1 - 1 = 0 \Rightarrow -2 \neq 0$$

Hemos comprobado que la ecuación diferencial no es exacta, luego, al tratar de encontrar el factor integrante, se obtiene lo siguiente.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x-2} dx}$$

$$\mu(x) = e^{-2 \ln(x-2)} \Rightarrow \mu(x) = (x-2)^{-2}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, se obtiene

$$\frac{x^3 - y}{(x-2)^2} dy + \frac{dx}{x-2} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} = 0; \text{ con lo cual se obtiene una EDE, y por tanto,}$$

$$M(x, y) = \frac{x^3 - y}{(x-2)^2}; N(x, y) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Integrando M con respecto a x

$$f = \frac{y-8}{x-2} + \frac{1}{2}(x-2)^2 + 6(x-2) + 12 \ln(x-2) + C(y)$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x-2} + C'(y)$$

$$\frac{1}{x-2} + C'(y) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = \frac{3-x}{(x-2)^2}$$

$$\text{Sol. } f = \frac{y-8}{x-2} + \frac{1}{2}(x-2)^2 + 6(x-2) + 12 \ln(x-2) + \frac{3-x}{(x-2)^2}$$

$$4. (x+2)\text{sen}(y)dx + x\text{cos}(y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$(x+2)\text{cos}(y) - \text{cos}(y) \neq 0$$

Hemos comprobado que la ecuación diferencial no es exacta. Ahora dispongámonos a encontrar el factor integrante.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(x+2)\text{cos}(y) - \text{cos}(y)}{x\text{cos}(y)} dx}$$

$$\mu(x) = e^{x+\ln(x)}$$

Multiplicamos nuestra ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(x) = xe^x$

$$xe^x(x+2)\text{sen}(y)dx + xe^xx\text{cos}(y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$xe^x(x+2)\text{cos}(y) - e^x\text{cos}(y)(x^2+2x)$, lo cual la convierte en una EDE, luego,

$$M(x, y) = xe^x(x+2)\text{sen}(y); N(x, y) = xe^xx\text{cos}(y)$$

Integrando M con respecto a x

$$f = e^xx^2\text{sen}(y) + c(y)$$

Derivando con respecto a y , se obtiene,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^xx^2\text{cos}(y) + c'(y)$$

$$e^xx^2\text{cos}(y) + c'(y) = xe^xx\text{cos}(y)$$

Integrando con respecto a y

$$C(y) = C$$

$$f = e^xx^2\text{sen}(y) + C$$

Despejando y

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{f-C}{e^xx^2}\right)$$

$$\text{Sol. } y = \sin^{-1}\left(\frac{c_1}{e^xx^2}\right)$$

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $ydx + (x + 3x^3y^4)dy = 0$ Sol. $y = -\frac{\sqrt{C_1 - \frac{\sqrt{C_1^2+3}}{x}}}{\sqrt{3}}$
2. $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ Sol. $y = x - \frac{\sqrt{C_1x - x^3 + 2x \ln(x)}}{\sqrt{x}}$
3. $(3x + 2y)dx + (2x + 7y)dy = 0$ Sol. $y = \frac{1}{7}(-\sqrt{7C_1 - 17x^2} - 2x)$
4. $\frac{(\sec(x) - \sen(y))}{\cot g(x)} dx + \sen(y)dy = 0$ Sol. $y = \sin^{-1} \left[\frac{1}{4} \sec(x) (C_1 + 4 \ln(\cos(x))) \right]$
5. $\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 + 3$ Sol. $y = C_1 e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4}$

2.7. Ecuaciones diferenciales de primer grado especiales**2.7.1. Ecuación de LaGrange**

Este tipo de ecuaciones tienen la forma $y' = xg(y') + j(y')$ donde j y g son funciones de la variable y' . Para poder resolver la ecuación de Lagrange se debe hacer la sustitución:

$$y' = p$$

$$y = xg(p) + j(p)$$

Derivamos esta ecuación con respecto a x

$$p = g(p) + (xg'(p) + j'(p)) \frac{dp}{dx}$$

$$p - g(p) = (xg'(p) + j'(p)) \frac{dp}{dx}$$

Esto resulta en la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dp} - \frac{xg'(p)}{p - g(p)} = \frac{j'(p)}{p - g(p)}$$

Una vez hecho esto la ecuación se puede resolver de manera lineal.

Ejercicios de aplicación

$$1. y = 1 + y'$$

Reemplazamos $y' = p$

$$y = 1 + p$$

Se deriva con respecto a x

$$p = \frac{dp}{dx}$$

Se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p}$$

$$x = \ln(p) + c$$

Ahora despejemos p

$$p = e^{x-c}$$

Y finalmente reemplazando, se tiene,

$$\text{Sol. } y = 1 + e^{x-c}$$

$$2. \ y = \text{sen}(y^2)$$

Reemplazamos $y' = p$

$$y = \text{sen}(p^2)$$

Se deriva con respecto a x

$$p = 2p \cos(p) \frac{dp}{dx}$$

Se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dp} = 2 \cos(p)$$

$$x = 2 \text{sen}(p) + c$$

Luego, despejando p, se tiene,

$$p = \text{sen}^{-1} \left(\frac{x-C}{2} \right)$$

Y finalmente se reemplaza

$$\text{Sol. } y = \text{sen} \left[\text{sen}^{-1} \left(\frac{x-C}{2} \right) \right]$$

$$3. \ y = x(y')^2 - y'$$

Al reemplazar $y' = p$

$$y = xp^2 - p$$

Se deriva con respecto a x

$$p = p^2 + (2xp - 1) \frac{dp}{dx}$$

Se resuelve la ecuación diferencial

$$(p - p^2)dx = (2xp - 1)dp$$

$$(2xp - 1)dp + (p^2 - p)dx = 0$$

De lo visto con anterioridad, esta expresión corresponde a la forma de una ecuación inexacta, o sea,

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial p} = 0$$

$$2p - (2p - 1) \neq 0$$

Ahora se trata de encontrar el factor integrante, o sea,

$$\mu(p) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial p})}{N} dp}$$

$$\mu(p) = e^{\int \frac{1}{p^2 - p} dp}$$

$$\mu(p) = e^{\ln(p-1) - \ln(p)} = e^{\ln\left(\frac{p-1}{p}\right)}$$

$$\mu(p) = C_1 \left(\frac{p-1}{p} \right)$$

Al multiplicar esta ecuación diferencial por, $\mu(p) = C_1 \left(\frac{p-1}{p} \right)$, se obtiene,

$$\left(\frac{p-1}{p} \right) (2xp - 1) dp + \left(\frac{p-1}{p} \right) (p^2 - p) dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial p} = 0$$

$$2p \left(\frac{p-1}{p} \right) - (2p - 2) = 0$$

$$M(p, x) = \left(\frac{p-1}{p} \right) (2xp - 1); N(p, x) = (p-1)^2$$

Integrando M con respecto a p

$$f = xp^2 - p + \ln(p) - 2xp + C(x)$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p^2 - 2p + C'(x)$$

$$p^2 - 2p + C'(x) = p^2 - 2p + 1$$

Integrando con respecto a x

$$C(x) = x$$

$$f = xp^2 - p + \ln(p) - 2xp + x$$

Despejando x

$$x(p-1)^2 = f - \ln(p) + p$$

$$x = \frac{f - \ln(p) + p}{(p-1)^2}$$

Reemplazando en la ecuación inicial, se obtiene,

$$y = \frac{f - \ln(p) + p}{(p - 1)^2} p(p - 1)$$

$$y = \frac{p}{p-1} (f - \ln(p) + p), \text{ ecuación que puede ser escrita como,}$$

$$\text{Sol. } y = \frac{p}{p-1} (C - \ln(p) + p)$$

2.7.2. Ecuación de Clairaut

Se presenta de la siguiente forma:

$$y = xy' + f(y')$$

Se soluciona de manera similar a la del tipo de LaGrange, es decir, la solución general tiene la forma:

$$y = cx + f(c)$$

Pero además posee una solución singular la cual se obtiene eliminando p de las ecuaciones.

$$y = xp + f(p), x + f'(p) = 0$$

Una solución singular es denominada así, cuando es solución de una ecuación diferencial pero no está incluida en la solución general.

2.7.3. Ecuación de Bernoulli

Se presenta de la siguiente forma:

$$y' + yP(x) = y^n Q(x)$$

Se observa que el factor que la distingue es y^n del segundo miembro, para lo cual el cambio de variable: $y^{1-n} = u$, la convierte en una ecuación diferencial lineal de primer orden, o sea,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \text{ y tomando } y^{1-n} = u, \text{ se tiene,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}} \frac{du}{dx}, \text{ que al reemplazarse en la expresión anterior se tiene,}$$

$$\left(\frac{1}{1-n} u^{\frac{1}{1-n}} \frac{du}{dx} \right) + P(x)u^{\frac{1}{1-n}} = Q(x) \left(u^{\frac{1}{1-n}} \right)^n$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x), \text{ lo cual puede ser escrito como,}$$

$$\frac{dz}{dx} + P_0(x)u = Q_0(x), \text{ donde: } P_0(x) = (1-n)P(x), \quad Q_0(x) = (1-n)Q(x)$$

Ejercicios de aplicación

1. $y = x(y') - (y')^2$

Reemplazando y' por p

$$y = xp - p^2$$

Derivando con respecto a x

$$p = p + (x - 2p) \frac{dp}{dx}$$

Se elimina p de la ecuación

$$0 = (x - 2p) \frac{dp}{dx}$$

Si, $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = C$; donde C es una constante arbitraria

Por tanto la solución de la ecuación quedaría así:

$$y = Cx - C^2$$

Ahora si $x - 2p = 0$; y teniendo en cuenta que $p = \frac{dy}{dx}$

Se tiene que: $\frac{x}{2} = \frac{dy}{dx}$

Luego, integrando ambos lados de esta expresión se tiene,

$\frac{x^2}{4} = y$, luego al reemplazar $p = \frac{x}{2}$ en nuestra ecuación diferencial para comprobar

$$y = x \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$\text{Sol. } y = \frac{x^2}{4}$$

$$2. \quad xy' = y + e^{y'}$$

Reemplazando y' por p

$$y = xp - e^p$$

Derivando con respecto a x

$$p = p + (x - e^p) \frac{dp}{dx}$$

Se elimina p de la ecuación

$$0 = (x - e^p) \frac{dp}{dx}$$

Si, $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = C$; donde C es una constante arbitraria

Por tanto la solución de la ecuación quedaría así:

$$y = Cx + e^C$$

Ahora si $x - e^p = 0$; y teniendo en cuenta que $p = \frac{dy}{dx}$

Se tiene que: $\ln(x) = \frac{dy}{dx}$

Integrando ambos lados de la ecuación,

$$x(\ln(x) - 1) = y$$

Reemplazamos $p = \ln(x)$ en nuestra ecuación diferencial para comprobar

$$y = x\ln(x) - e^{\ln(x)}, \text{ o simplemente puede escribirse como,}$$

$$\text{Sol. } y = x\ln(x) - x$$

$$3. y = xy' + \cos(y')$$

Reemplazando y' por p

$$y = xp + \cos(p)$$

Derivando con respecto a x

$$p = p + (x - \text{sen}(p)) \frac{dp}{dx}$$

Se elimina p de la ecuación

$$0 = (x - \text{sen}(p)) \frac{dp}{dx}$$

Si, $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = C$; donde C es una constante arbitraria

Por tanto la solución de la ecuación quedaría así:

$$y = Cx + \cos(C)$$

Ahora si $x - \text{sen}(p) = 0$; y teniendo en cuenta que $p = \frac{dy}{dx}$

Se tiene que, $\arcsen(x) = \frac{dy}{dx}$

Integrando ambos lados de la ecuación,

$$x(\arcsen(x)) + \sqrt{1-x^2} = y$$

Reemplazamos $p = \arcsen(x)$ en nuestra ecuación diferencial para comprobar

$$y = x(\arcsen(x)) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}, \text{ lo cual puede escribirse como,}$$

$$\text{Sol. } y = x(\arcsen(x)) + \sqrt{1-x^2}$$

$$4. \frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$$

Por similitud con el modelo de EDO de Bernoulli, se tiene que la EDO planteada es una ecuación de Bernoulli, con:

$u = y^{1-n}$, con $n = 2$, o sea, $u = y^{-1}$, de manera equivalente, $y = u^{-1}$

Luego, de $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$ que al sustituir en la expresión inicial, se tiene,

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$$

$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} - \frac{1}{u} = e^x \left(\frac{1}{u}\right)^2$, expresión que puede ser escrita como,

$$\frac{du}{dx} + \frac{u^2}{u} = e^x \left(\frac{-u^2}{u}\right), \text{ o sea,}$$

$$\frac{du}{dx} + u = -e^x, \text{ que la convierte en una EDO lineal}$$

Al resolver la ecuación diferencial anterior por factor integrante, se tiene,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int dx} = e^x, \text{ o sea, } \mu(x) = e^x$$

Por tanto, se tiene, $(e^x y)' = -e^{2x}$, expresión que ser resuelta tiene por solución,

$$y = -\frac{e^x}{2} + \frac{C}{e^x}$$

$$5. y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$$

Se observa que la ED es una ecuación del tipo de Clairaut, por lo que, al escribir el script respectivo en Matlab, se tiene:

```
close all
```

```
clc
```

```
syms x y
```

```
y=dsolve('y=x*Dy+1/2*Dy^2','x')
```

b. Guardar con el nombre ejer_2_3 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>>y =
```

```
    -x^2/2
```

```
    C27^2/2 + x*C27
```

Donde, la función $y = -x^2/2 + C$, es la envolvente de la familia integral de la ecuación diferencial respectiva.

$$6. \frac{dy}{dx} = xy^2 + y$$

Se observa que la ED es una ecuación del tipo de Bernoulli, por lo que, al escribir el script respectivo en Matlab, se tiene:

```
close all
```

clc

syms x y

y=dsolve('Dy=x*y^2+y','x');

y1=simplify(y);

pretty(y1)

b. Guardar con el nombre ejer_2_6 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>>y1 =
      exp(x)
-----
C3 - exp(x)(x - 1)
```

Problemas propuestos

$$1. y = xy' + y' - y'^2 \quad \text{Sol.} \begin{cases} y = cx + c + c^2 \\ y = \frac{(x+1)^2}{4} \end{cases}$$

$$2. y = xy' + 1 + x^2y' \quad \text{Sol.} y = 1 + \frac{xc_1^2}{x+1}$$

$$3. y^2 - 4xyy' + 4x^2(y')^2 - y' = 0 \quad \text{Sol.} y = \frac{2\left(c_1 - \frac{\sqrt{p^3}}{3}\right)}{p} \pm \sqrt{p}$$

$$4. y = xy' + \frac{(y')^2}{2} \quad \text{Sol.} \begin{cases} y = Cx + \frac{C^2}{2} \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$5. y = xy' + \frac{1}{y'} \quad \text{Sol.} \begin{cases} y = Cx + \frac{1}{C} \\ y = 2\sqrt{2x} \end{cases}$$

$$6. \frac{dy}{dx} = xy^2 + y \quad \text{Sol.} y = \frac{e^x}{C_1 + e^x - xe^x}$$

$$7. x^2 \frac{dy}{dx} = xy - y^2 \quad \text{Sol.} y = \frac{x}{C_1 + \ln x}$$

$$8. x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x \quad \text{Sol.} y = \frac{1}{C_1 x + \ln x + 1}$$

$$9. \frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1) \quad \text{Sol.} y = \frac{3}{3C_1 e^{3x} + 3x + 1}$$

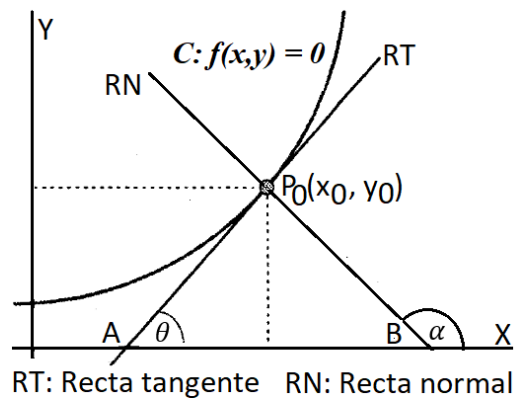
$$10. x \frac{dy}{dx} = xy^2 + (1+x)y \quad \text{Sol.} y = \frac{xe^x}{C_1 - xe^x + e^x}$$

2.8. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales se aplican en muchos campos de las ciencias, esto es debido a que describen cualquier fenómeno donde algo cambia. Como se conoce, el cambio de una variable con respecto a otra se le llama derivada, de aquí que, las ecuaciones diferenciales se utilizan para representar situaciones o problemas físicos de ingeniería como aerodinámica, mecánica de fluidos, circuitos electrónicos, intercambiadores de calor, economía, biología, entre otras. Para solucionar los problemas que son representados por las ecuaciones diferenciales, hay que solucionar las ecuaciones. Algunas de las principales aplicaciones son:

2.8.1. Aplicaciones geométricas

El uso de las ecuaciones diferenciales en geometría plana y del espacio permite obtener el modelo de algunas figuras geométricas. Si se considera una curva C , definida por la ecuación $C: f(x, y) = 0$, y un punto $P(x_0, y_0) \in C$, y a partir de,



Se tiene las siguientes definiciones:

- La pendiente de la recta tangente es: $m_{RT} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_P = y'_0$,
cuya ecuación es, $RT: y - y_0 = y'_0(x - x_0)$
- La pendiente de la recta normal se define por: $m_{RN}m_{RT} = -1$, o sea, $m_{RN} = -\frac{1}{y'_0}$
cuya ecuación es, $RN: y - y_0 = \frac{1}{y'_0}(x - x_0)$

Respecto al punto de intersección de la recta tangente con el eje X, este corresponde a:

Puesto que, $y = 0$, $0 - y_0 = \frac{1}{y'_0}(x - x_0)$, esto nos da, $A\left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, 0\right)$

De manera similar se tiene que el punto de intersección de la recta normal con el eje X, este corresponde a:

Puesto que, $y = 0$, $0 - y_0 = \frac{1}{y'_0}(x - x_0)$, esto nos da, $B(x_0 + y_0 y'_0, 0)$

- La longitud del segmento de la tangente entre P_0 y el eje x está dado por,

$$L_T = d(A, P_0) = \sqrt{\left[x_0 - \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}\right)\right]^2 + (y_0 - 0)^2} = \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + y_0'^2}$$

- La longitud del segmento de la subtangente es la proyección del segmento tangente AP_0 sobre el eje x está dado por,

$$L_{ST} = d(A, C) = \sqrt{\left[x_0 - \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}\right)\right]^2 + 0} = \frac{y_0}{y'_0}$$

- La longitud del segmento de la normal es la proyección entre P_0 y el eje x está dado por,

$$L_N = d(B, P_0) = \sqrt{[x_0 - (x_0 + y_0 y'_0)]^2 + (y_0 - 0)^2} = y_0 \sqrt{1 + y_0'^2}$$

- La longitud del segmento de la subnormal es la proyección entre BP_0 y el eje x está dado por,

$$L_{SN} = d(C, B) = \sqrt{[x_0 + y_0 y'_0 - x_0]^2 + (0 - 0)^2} = y_0 y'_0$$

Ejercicios de aplicación.

Determinar las ecuaciones de las curvas que cumplen las siguientes condiciones:

- Pasa por el punto $P_0(3,10)$ y su pendiente es igual al doble de su abscisa.

Solución

De las condiciones del problema, se tiene, $m = \frac{dy}{dx} = 2x$

Resolviendo la ED por separación de variables se tiene,

$y = x^2 + C$, y de la condición inicial $P_0(3,10)$, y

finalmente:

$10 = 3^2 + C$, o sea, $C = 1$, luego la curva es: $y = x^2 + 1$

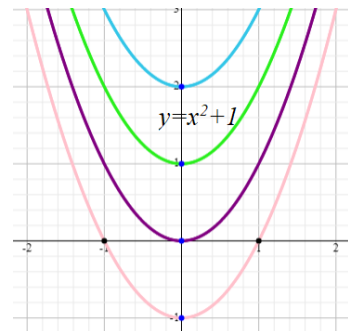


Figura 2.1

- Ecuación de la familia de curvas cuyas normales pasan siempre por el origen de coordenadas.

Por definición, $m \cdot m_n = -1$, o sea,

$m_n = -\frac{dx}{dy}$, y de la ecuación de la recta:

$y - y_0 = -\frac{dx}{dy}(x - x_0)$, además esta pasa por

$(x_0, y_0) = (0,0)$

$y = -\frac{dx}{dy}x$, resolviendo la ED por separación de variables, se tiene,

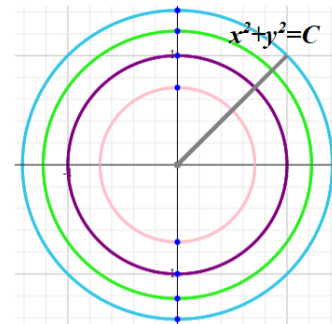


Figura 2.2

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C, \text{ o sea, } x^2 + y^2 = C$$

que corresponde a una familia de circunferencias centrada en el origen y radio C

2.8.2. Trayectorias ortogonales

Una familia de curvas forma un conjunto de trayectorias ortogonales de otra familia si cada miembro de la primera familia interseca a todo miembro de la segunda familia en ángulos rectos, las familias son mutuamente ortogonales. Para obtener la familia de curvas a ortogonales de una familia dada se realiza lo siguiente.

Si dos curvas son ortogonales entonces las tangentes a dichas curvas en los puntos de corte son perpendiculares y, por tanto, si $y'(x)$ es la pendiente de una de ellas, la de la otra es $-1/y'(x)$.

De esta manera, obtener las trayectorias ortogonales a una familia de curvas de las cuales se conoce su expresión analítica $f(x, y, C) = 0$, requiere los siguientes pasos:

- Diferenciar la ecuación $f(x, y, C) = 0$.
- Eliminar C del sistema formado por la ecuación y su derivada, para así obtener la ecuación diferencial de la familia.
- Obtener la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales aplicando el resultado precedente.
- Integrar la ecuación resultante.

Ejercicios de aplicación

Determinar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas para los casos siguientes:

1. $x^2 - y^2 = C$

Tomando derivadas y reordenando los términos, se tiene,

$$2xdx - 2ydy = 0, \text{ o sea, } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\text{Además, } -\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \text{ nos lleva a, } \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{Es decir, } \ln y = -\ln x + \ln C, \quad xy = C$$

Por tanto, la ecuación de la familia de curvas de trayectoria ortogonal es una familia de hipérbolas equiláteras.

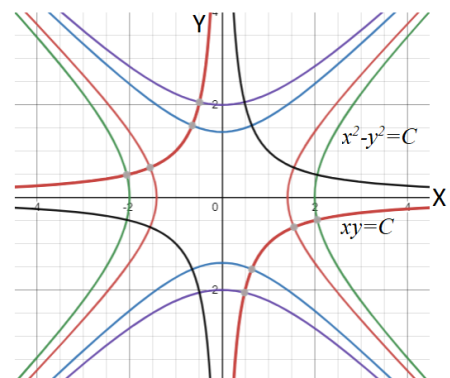


Figura 2.3

$$2. \quad x^2 + 2y^2 = C$$

Tomando derivadas y reordenando los términos, se tiene,

$$2xdx + 4ydy = 0, \text{ o sea, } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$$\text{Además, } -\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}, \text{ nos lleva a, } \frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}$$

$$\text{Es decir, } \ln y = -\ln x^2 + \ln C, \quad x^2 y = C$$

Por tanto, la ecuación de la familia de curvas de trayectoria ortogonal es una familia de hipérbolas.

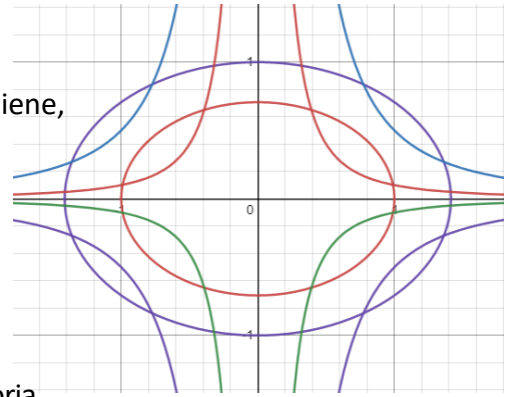


Figura 2.4

$$3. \quad ye^x = -xe^x - e^x + C$$

Reescribiendo la expresión y tomando derivadas respecto a x , se tiene,

$$y = -x - 1 + \frac{C}{e^x}, \quad \frac{dy}{dx} = -1 + \frac{C}{e^x} = \frac{C - e^x}{e^x}$$

y tomando la familia de trayectorias ortogonales,

$$\text{o sea, } -\frac{dx}{dy} = \frac{C - e^x}{e^x}, \text{ esto nos conduce a,}$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x - C} = \int dy, \text{ o sea, } y = \ln|e^x - C|$$

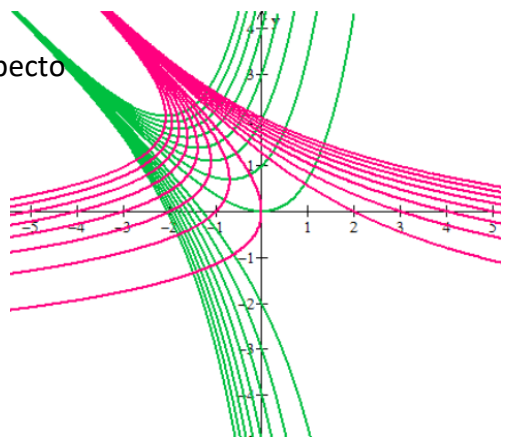


Figura 2.5

Problemas propuestos

1. Determinar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0,2)$ y en cada punto (x, y) tiene pendiente $-xy$. Sol. $y = 2e^{-x^2/2}$

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, e)$ y en cada punto (x, y) la pendiente de su normal es $\frac{x^2}{y}$. Sol. $y = e^{1/x}$

3. La proyección de la recta normal desde un punto P de la curva sobre el eje x tiene una longitud igual a la abscisa en P . Encontrar la ecuación de esta curva que además pasa por el punto $P(2,3)$. Sol. $x^2 + y^2 = 13$

4. Determinar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, -1)$, y a la vez, la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos es igual a la abscisa del punto, aumentada en 5 unidades. Sol. $y = \frac{x^2}{2} + x - 1$

5. A partir de la familia de rectas $y = Cx$, encontrar la familia de trayectorias isogonales que forman con dichas rectas un ángulo de $\pi/3$. Sol. $\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \ln c(x^2 + y^2)$

6. Determine el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x^2 + 3y^2 = Cy$ que pase por el punto $P(1,2)$. Sol. $y^2 = x^2(3x + 1)$
7. Determine la trayectoria ortogonal que pase por el punto $P(0,4)$ de la familia de $3xy^2 = 3Cx + 2$. Sol. $y = 4e^{x^3}$
8. Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de elipses con centro en $C(0,0)$ y vértices en $(1,0)$ y $(-1,0)$. Sol. $x^2 + y^2 = 2 \ln(Cx)$
9. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas, $y = C(\sec x + \tan x)$. Sol. $y^2 = 2(C - \text{sen } x)$
10. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias que pasan por los puntos $A(0, -3)$ y $B(0,0)$. Trazar la gráfica para ambas familias. Sol. $\frac{x^2}{2y+3} + y - 3 \ln|2y + 3| = C$

2.9. Aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden en Física

Las ecuaciones diferenciales de primer orden poseen una amplia gama de uso en la Física, donde en casi todas las diferentes leyes y definiciones propias de la Física caen en modelizarse mediante derivadas e integrales. A continuación, se resume las aplicaciones más usuales en el campo de la Física.

A. Ley de decaimiento o incremento radioactivo.

1. Inicialmente se tiene una masa radioactiva de 100g. Después de 6 min su masa ha disminuido en un 10%. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda cuando pase una hora.

Solución

Inicialmente se tienen 100 g de masa, pero nos dicen que después de 6 min ha disminuido un 10%

$$C(6) = 100 - 10 = 90 \text{ g}$$

Prestar atención a la parte subrayada del ejercicio que nos va ayudar a modelar nuestra ecuación.

$$\frac{dC}{dt} = kC$$

Resolviendo la ecuación diferencial se tiene

$$\ln(C) = kt + a$$

Donde k es una constante de integración y ' a ' un constante resultado de resolver la integral, despejemos C .

$$C(t) = Ae^{kt}$$

Pero para dar por terminado el ejercicio es necesario hallar el valor de las constantes A y k .

Para ello utilizamos los valores iniciales que el mismo ejercicio nos otorga

$$C(0) = Ae^{h*0} = 100; A = 100$$

$$C(6) = 100e^{k*6} = 90; k = \frac{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{6}$$

$$k \approx -0,01756$$

$$C(t) = 100e^{-0,01756t}$$

$$C(60) = 100e^{-0,01756*60}$$

$$100e^{-1,0536} = 34,86g, \text{ es decir, al cabo de una hora se dispone solamente de } 34.86 \text{ g}$$

2. Un material radioactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 50g de material y al cabo de 25 min se ve que ha perdido el 40% de la materia. Hallar:

- La cantidad de masa en cualquier momento.
- La cantidad de masa en 1 hora.
- El tiempo que transcurre para que quede el 85% de masa.

$$C(25) = 50 - 20 = 30g$$

$$\frac{dC}{dt} = kC, \text{ o sea, } C(t) = Ae^{kt}$$

$$C(0) = Ae^{k*0} = 50; A = 50$$

$$C(25) = 50e^{k*25} = 30; k = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{25}$$

$$k \approx -0,0204$$

$$\text{Sol(a). } C(t) = 50e^{-0,0204*t}$$

$$C(60) = 50e^{-1,22598} = 14,67g$$

$$\text{Sol(b). } C = 14,67g$$

$$C(t_m) = 50 - 42,5 = 7,5g$$

$$7,5 = 50 e^{-0,0204*t}$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{7,5}{50}\right)}{0,0204}$$

$$\text{Sol(c). } t = 93 \text{ min}$$

B. Problemas de mezclas

3. Un recipiente contiene 2000 ml de agua oxigenada donde se han añadido 5 g de una sustancia B. Otra mezcla que contiene 100 mg de sustancia B por 10 ml de agua oxigenada es suministrada a razón de 10 ml por minuto, y de la solución mezclada se extrae a razón de 20 ml por minuto. Determinar una función que permita observar la cantidad de sustancia B a cada instante.

Solución

Utilizemos una notación que nos facilite la escritura de la resolución del ejercicio.

$$B = 5000 \text{ mg}; V_0 = 2000 \text{ ml}; a = 10 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}; v_1 = 10 \frac{\text{ml}}{\text{min}}; v_2 = 20 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

La ecuación para este tipo de ejercicios viene dada por:

$$B'(t) + \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)t} B(t) = v_1 \cdot a$$

$$B'(t) + \frac{20}{2000 - 10t} B(t) = 100$$

$$B'(t) + \frac{2}{200 - t} B(t) = 100$$

Ahora, para este tipo de ejercicio en particular, es necesario hallar un factor integrante que nos facilite su resolución, o sea,

$$p(t) = \frac{2}{200-t}, \text{ o sea,}$$

$$\int p(t) = \int \frac{2}{200-t} dt = \ln \frac{1}{(200-t)^2}$$

$$\text{Por lo que, } \mu(x) = e^{\int \frac{2}{200-t} dt} = \frac{1}{(200-t)^2}$$

$$\frac{1}{(200-t)^2} B'(t) + \frac{2}{(200-t)^3} B(t) = \frac{100}{(200-t)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{(200-t)^2} B(t) \right] = \frac{100}{(200-t)^2}$$

$$\frac{1}{(200-t)^2} B(t) = \int \frac{100}{(200-t)^2} dt$$

$$B(t) = 100(200-t) + 100C(200-t)^2$$

Recordando que nuestra concentración inicial, $B = 5000 \text{ mg}$ en $t = 0$

$$5000 = 100(200 + C(200)^2)$$

$$-\frac{150}{40000} = C; C = 0,00375$$

$B(t) = 100(200 - t) + 0,375(200 - t)^2$, expresión que nos permite observar la cantidad de sustancia B a cada instante.

4. En un tanque se tienen 1000 L de agua a los cuales se le han añadido 20 kg de sal. Otra mezcla la cual tiene 1 kg de sal por cada litro es bombeada al tanque a razón de 25 L por minuto. La solución mezclada es bombeada al exterior a razón de 50 L por minuto. Se pide determinar: a) la ecuación que permite observar la cantidad de sal en cualquier instante. b) El qué tiempo en que se vacía el tanque?

$$B = 20kg; \quad V_0 = 1000Lt; \quad a = 1 \frac{kg}{Lt}; \quad v_1 = 25 \frac{L}{min}; \quad v_2 = 50 \frac{L}{min}$$

$$B'(t) + \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)t} B(t) = v_1 * a$$

$$B'(t) + \frac{50}{1000 + (25 - 50)t} B(t) = 25 * 1$$

$$B'(t) + \frac{50}{25(40 - t)} B(t) = 25$$

$$B'(t) + \frac{2}{40 - t} B(t) = 25$$

$$e^{\int \frac{2}{40-t} dt} = \frac{1}{(40-t)^2}$$

$$\frac{1}{(40-t)^2} B'(t) + \frac{2}{(40-t)^3} B(t) = \frac{1}{(40-t)^2} 25$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{(40-t)^2} B(t) \right] = \frac{25}{(40-t)^2}$$

$$\frac{1}{(40-t)^2} B(t) = \int \frac{25}{(40-t)^2} dt$$

$$B(t) = 25(40 - t) + 25C(40 - t)^2$$

Recordando de nuestra concentración inicial, $B = 20$ kg en $t = 0$

$$20 = 25[40 + C(40^2)]$$

$$20 = 1000 + C * 1600$$

$$C = -0,6125$$

$$\text{Sol(a). } B(t) = 25(40 - t) + (15,3125)(40 - t)^2$$

$$B(t) = 0$$

$$25(40 - t) + (15,3125)(40 - t)^2 = 0$$

$$(40 - t)(25 - 15,3125(40 - t)) = 0$$

$$t_1 = 40 \text{ min}$$

$$25 = 15,3125(40 - t)$$

$$\frac{25}{15,3125} = 40 - t$$

$$\text{Sol(b). } t \approx 38,3675 \text{ min}$$

C. Población

4. De cierto análisis se sabe que en una población la rapidez de nacimientos y muertes es proporcional al número de individuos que estén con vida en ese momento. Encontrar una ecuación que nos permita analizar el comportamiento de crecimiento de la población.

$$\frac{dN}{dt} = \text{rapidez de nacimientos}; \frac{dM}{dt} = \text{rapidez de muertes}$$

K_n = constantes de nacimientos; k_m = constante de muertos

$$\frac{dN}{dt} = k_n y \quad ; \quad \frac{dM}{dt} = k_m y$$

$$\frac{dy}{dt} = (k_n - k_m)y$$

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$\ln(y) = (k_n - k_m)t + c$$

$y = ce^{(k_n - k_m)t}$, expresión que nos permite analizar el comportamiento de crecimiento de la población.

5. Una población de la amazonía de aproximadamente 200 habitantes está desapareciendo debido a las siguientes situaciones, el 80% de su población son mujeres, además cada mujer solo puede tener 2 hijos, y si los 2 hijos son varones ambos mueren; por ello se cuenta con que la rapidez de nacimientos es de 4 por día, pero la rapidez de muertes es de 6 por día. Se solicita determinar:

- Las constantes de nacimientos y muertes.
- Que tiempo le queda a la población para que solo queden 20 habitantes.

$$\frac{dN}{dt} = k_n y \quad ; \quad \frac{dM}{dt} = k_m y$$

$$4 = k_n * 200 \quad ; \quad 6 = k_m * 200$$

$$\text{Sol(a). } k_n = 0,02 \quad \text{y} \quad k_m = 0,03$$

$$y = ce^{(k_n - k_m)t}$$

La población es de $y = 200 \text{ hab}$ en $t = 0$

$$c = 200$$

$$y = 200e^{(-0,01)t}$$

$$\frac{1}{10} = e^{(-0,01)t}$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{0,01}$$

Sol(b). $t \approx 230,258$ días

D. Epidemias

6. En cierto instituto se declara una epidemia de una enfermedad 'x'. Se requiere encontrar de un modelo matemático que describa la propagación de la enfermedad, tomando en cuenta que existen ya un cierto número de estudiantes enfermos.

Solución

Para resolver este tipo de ejercicios se deben tomar en cuenta varios aspectos.

E = # de estudiantes; Ei = # de estudiantes enfermos; En
= # de estudiantes no enfermos

- $\frac{dEi}{dt}$ = la razón de cambio de los alumnos infectados
- $\frac{dEi}{dt} = a + bEi + cEi^2$ (Es una ecuación que se acerca a la realidad)
- $E = Ei + En$, para cada instante t
- $\frac{dEi}{dt} = 0$; de donde surgen 2 situaciones

Si $Ei = 0$ entonces $a = 0$ y,

si $Ei = E$ entonces $c = -\frac{b}{E}$

Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\frac{dEi}{dt} = \frac{b}{E}Ei(E - Ei)$$

$\frac{b}{E} = k$; que es un valor constante

Resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{1}{E} \ln(Ei) - \frac{1}{E} \ln(E - Ei) = kt + c$$

Sabemos que en $t = 0$ existen estudiantes infectados E_0

Por lo tanto $Ei = E_0$

$$c = \frac{1}{E} \ln\left(\frac{E_0}{E - E_0}\right)$$

$$\frac{1}{E} \ln \left(\frac{Ei}{E - Ei} \right) = kt + \frac{1}{E} \ln \left(\frac{E_0}{E - E_0} \right); \text{ multiplicamos toda la ecuación por } E$$

$$\ln \left(\frac{Ei}{E - Ei} \right) - \ln \left(\frac{E_0}{E - E_0} \right) = Ekt$$

$$\ln \left(\frac{Ei(E - E_0)}{E_0(E - Ei)} \right) = Ekt$$

$$\frac{Ei(E - E_0)}{E_0(E - Ei)} = e^{Ekt}$$

Y finalmente al despejar Ei , se tiene,

$$Ei = \frac{E}{\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)e^{-Ekt} + 1}, \text{ que corresponde a la expresión que describe la situación del}$$

problema planteado.

7. En un zoológico únicamente de primates, se ha propagado una enfermedad muy parecida a la varicela, si se sabe que hay 500 primates de los cuales 50 están infectados. Se supone que el virus llegó a través de los nuevos 5 primates que llegaron hace 2 días.

- Hallar la constante k .
- Determinar en que tiempo solo quedará un primate sano.
- Que tiempo debe transcurrir para que la mitad de los primates estén enfermos.

$$Ei = \frac{E}{\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)e^{-Ekt} + 1}$$

$$Ei = E_0 = 5; t = 2 \text{ días}$$

$$50 = \frac{500}{\left(\frac{500}{5} - 1\right)e^{-k \cdot 1000} + 1}$$

$$(100 - 1)e^{-k \cdot 1000} + 1 = 10$$

$$99e^{-k \cdot 1000} = 9$$

$$k = -\frac{\ln\left(\frac{1}{11}\right)}{1000}$$

Sol(a). $k = 0,00239$

$$Ei = \frac{E}{\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)e^{-Ekt} + 1}$$

$$499 = \frac{500}{(10 - 1)e^{-500 \cdot 0,00239 \cdot t} + 1}$$

$$9e^{-1,1989t} + 1 = 1,002$$

$$t = -\frac{\ln(0,0002222)}{1,1989}$$

$$t = 7,016 \text{ días} + 2 \text{ días}$$

$$\text{Sol(b). } t \approx 9,016 \text{ días}$$

$$Ei = \frac{E}{\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)e^{-Ekt} + 1}$$

$$250 = \frac{500}{(10 - 1)e^{-1,1989t} + 1}$$

$$9e^{-1,1989t} + 1 = 2$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{1,1989}$$

$$t = 1,8327 \text{ días}$$

Quiere decir que desde que llegaron los 5 primates han transcurrido 3,8327 días

$$\text{Sol(c). } t \approx 3,83 \text{ días}$$

E. Problemas de temperatura

8. Un pirata gusta en tomar licor a una temperatura de 25° , mientras está en altamar el deja su botella en una habitación del barco donde los rayos del sol llegan directo y la temperatura ambiente es de 30° , si se sabe que la temperatura inicial es de 15° y que en 10 min en la habitación la temperatura se incrementó en 1° . ¿Qué tiempo le tomará llegar a la temperatura deseada?

Solución:

La ley de Newton expresa que la rapidez con la que un cuerpo cambia su temperatura es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente.

Interpretando esta ley se tiene que:

$$\frac{dT}{dt} = K(T(t) - T_a)$$

Desarrollando la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{T(t) - T_a} = K dt$$

$$\ln(T(t) - T_a) = Kt + c$$

$$T(t) - T_a = ce^{Kt}$$

$$T(t) = T_a + ce^{Kt}$$

Ahora para hallar los valores de las constantes c y K se utilizan las condiciones iniciales

$$T(0) = 30^0 + ce^0 = 15^0$$

$$c = -15^0$$

$$T(10) = 30^0 - 15e^{10k} = 16^0$$

$$-15e^{10k} = -14$$

$$k = \frac{\ln(0,9333333)}{10}$$

$$k = -0,002996$$

$$T(t) = T_a + ce^{Kt}$$

Ahora daremos los valores correspondientes a cada valor de la ecuación:

$$T(t) = 30^0 - 15e^{-0,02996t}$$

Finalmente hallamos el tiempo en el que se llega a los 25°.

$$25^0 = 30^0 - 15e^{-0,02996t}$$

$$\frac{1}{3} = e^{-0,02996t}$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{0,02996}$$

Sol. $t = 36,67 \text{ min}$

9. Un profesor cansado de sus estudiantes decide acabar con su vida ahorcándose en su casa, al cabo de unas horas un oficial encuentra su cuerpo con una temperatura de 19°, considerando que había dejado el aire acondicionado a 16°, y que su temperatura estando vivo era de 36°, ¿qué tiempo lleva muerto, considerando que la temperatura baja 1° cada 10 min?

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = K(T(t) - T_a)$$

Utilicemos nuestra relación de proporcionalidad para hallar constante K

$$-\frac{1}{10 \text{ min}} = K(36^0 - 16^0)$$

$$K = -0,005 \frac{1}{\text{min}}$$

Luego utilizaremos nuestra ecuación ya modelada para poder hallar la constante C

$$T(t) = T_a + ce^{Kt}$$

$$t = 0$$

$$36^0 = 16^0 + ce^0$$

$$c = 20^0$$

Entonces nuestra ecuación nos quedaría así:

$$T(t) = 16^0 + 20e^{-0,005t}$$

Ahora hallemos el valor de t para obtener los 19⁰ del cuerpo

$$19^0 = 16^0 + 20e^{-0,005t}$$

$$e^{-0,005t} = \frac{3}{20}$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{3}{20}\right)}{0,005}$$

$$t = 379,42 \text{ min o } 6,32 \text{ horas.}$$

F. Caída libre

10. Se lanza un cuerpo desde una altura de 50 metros con una velocidad de 4 metros por segundo. Se toma en cuenta la resistencia al aire, y además se sabe que el objeto pesa 50N; Se tiene que la velocidad límite que puede alcanzar el cuerpo es de 50 metros por segundo.

- Determinar la ecuación que describa la velocidad en función del tiempo.
- Hallar una ecuación que describa la posición en función del tiempo.
- Cuál será la velocidad al cabo de 5 segundos.

Solución:

Mientras un objeto cae desde una cierta altura la fuerza se describe con la siguiente ecuación:

$$F = mg - kv$$

$$ma = mg - kv$$

$g = \text{gravedad}; k = \text{consante de proporcionalidad}; v = \text{velocidad}; m = \text{masa}$

El ejercicio nos propone que el cuerpo pesa 50 N, por lo siguiente y tomando en cuenta a $g=10 \text{ m/s}^2$.

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = 5 \text{ kg}$$

Además de esto la aceleración está definida como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, esto quiere decir:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Para encontrar el valor de k es necesario utilizar el valor de la velocidad límite, supongamos que esa velocidad límite es constante, la ecuación se tornaría así:

$$0 = mg - kv$$

$$k = \frac{mg}{v_{lim}}$$

$$k = \frac{50}{50} * \frac{N}{m/s}$$

$$k = 1 \frac{N \cdot s}{m}$$

Reemplazando los valores en la ecuación llegamos a:

$$5 \frac{dv}{dt} = 50 - v$$

Y resolvemos la ecuación diferencial

$$\ln(v - 50) = -\frac{t}{5} + C$$

$$v - 50 = Ce^{-\frac{t}{5}}$$

$$v = 50 + Ce^{-\frac{t}{5}}$$

Consideremos que el cuerpo se lanza en tiempo, $t = 0$ y que conlleva una cierta velocidad inicial.

$$4 = 50 + Ce^0$$

$$C = -46$$

$$\text{Sol(a). } v = 50 - 46e^{-\frac{t}{5}}$$

Para hallar la ecuación de la posición con respecto al tiempo debemos de recordar que la velocidad es simplemente la derivada de la posición con respecto al tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 50 - 46e^{-\frac{t}{5}}$$

$$x = 50t + \frac{46}{5}e^{-\frac{t}{5}} + c_2$$

Recordamos que en un tiempo 0 el objeto recién se estaba lanzando por lo que:

$$50 = 50(0) + \frac{46}{5}e^0 + C_2$$

$$C_2 = \frac{206}{5}$$

$$\text{Sol(b). } x = 50t + \frac{46}{5}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{206}{5}$$

Finalmente evaluamos un $t = 5$ en la ecuación de velocidad.

$$v = 50 - 46e^{-\frac{5}{5}}$$

$$v = 50 - \frac{46}{e}$$

$$v = 50 - 16,97$$

$$\text{Sol(c). } v \approx 43 \frac{m}{s}$$

11. Un cuerpo de masa 15 Kg es lanzado desde un edificio con una velocidad de 3 metros por segundo. Se halla además que existe una fuerza de resistencia contra el aire dada por $5v^2$. Halle la velocidad para un tiempo $t = \sqrt{5}$ segundos.

Solución:

El ejercicio nos plantea que la fuerza de resistencia tiene un valor variable, entonces colocamos este valor en vez de nuestra fuerza de resistencia en la ecuación fuerza.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 5v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{5}{15}v^2$$

$$\int \frac{dv}{10 - \frac{1}{3}v^2} = \int dt$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{10}} (\ln(v + \sqrt{30}) - \ln(\sqrt{30} - v)) = t + c$$

$$\ln\left(\frac{v + \sqrt{30}}{\sqrt{30} - v}\right) = \sqrt{\frac{40}{3}}t + c$$

$$\frac{v + \sqrt{30}}{\sqrt{30} - v} = ce^{\sqrt{\frac{40}{3}}t}$$

$$v = \sqrt{30}ce^{\sqrt{\frac{40}{3}}t} - vce^{\sqrt{\frac{40}{3}}t} - \sqrt{30}$$

$$v = \frac{\sqrt{30}ce^{\sqrt{\frac{40}{3}}t} - \sqrt{30}}{1 + ce^{\sqrt{\frac{40}{3}}t}}$$

Ahora debemos halla la constante, para ello evaluaremos la función en un $t = 0$.

$$3 = \frac{\sqrt{30}ce^0 - \sqrt{30}}{1 + ce^0}$$

$$3 + 3c = \sqrt{30}c - \sqrt{30}$$

$$c = -\frac{\sqrt{30} + 3}{3 - \sqrt{30}}$$

$$c \approx 3,43$$

Ahora debemos evaluar en el tiempo requerido y habremos finalizado el ejercicio

$$t = \sqrt{5}$$

$$v = \frac{\left(\sqrt{30} * (3,43)e^{\sqrt{\frac{40}{3}}\sqrt{5}} - \sqrt{30}\right)}{1 + 3,43 * e^{\sqrt{\frac{40}{3}}\sqrt{5}}}$$

$$v = \frac{(18,78 * e^{8,16} - 5,48)}{1 + 3,43 * e^{8,16}}$$

$$v = \frac{64.646,5 - 5,48}{1 + 11.998,8}, \text{ para finalmente tener: } v = 5,39 \frac{m}{s}$$

G. Circuitos Eléctricos

12. Un circuito RL tiene una fem de 20 voltios, una inductancia de 2 henrios y una resistencia de 40 ohmios, sin una corriente inicial. Determinar el modelo matemático que permita analizar la corriente en cualquier tiempo t.

Solución:

Para este tipo de circuitos la ecuación diferencial que describe el paso de la corriente es:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

$R = \text{resistencia}; L = \text{inductancia}; I = \text{corriente}; E = \text{fem}$

Entonces reemplazando los datos en la ecuación diferencial llegamos a:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{40}{2}I = \frac{20}{2}$$

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 10$$

Resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} = 10 - 20I$$

$$\frac{dI}{10(1 - 2I)} = dt$$

$$-\frac{1}{10} \frac{1}{2} \ln(1 - 2I) = t + c$$

$$\ln(1 - 2I) = -20t - c$$

$$1 - 2I = -ce^{-20t}$$

$$I = \frac{1}{2} - ce^{-20t}$$

En $t=0, I=0$

$$0 = \frac{1}{2} - ce^0$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-20t}$$

13. En cierto circuito RC se genera una *fem* de $400 \cos(2t)$ voltios, una resistencia de 100 ohmios y una capacitancia de 0,01 faradios. En un $t = 0$ el capacitor se encuentra descargado. Se pide hallar la corriente en cualquier instante t .

Solución:

Para este tipo de circuitos la ecuación diferencial que describe el paso de la corriente es:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$$

Como dato adicional se debe recalcar que la corriente es la derivada de la carga con respecto al tiempo, es decir:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Reemplazando los datos en la ecuación tenemos:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{100 * 0,01}q = \frac{400 \cos(2t)}{100}$$

$$\frac{dq}{dt} + q = 4 \cos(2t)$$

Cuya solución es la siguiente:

$$q(t) = \frac{4}{5} \cos(2t) + \frac{8}{5} \sen(2t) + Ce^{-t}$$

Sabemos que para $t = 0, q = 0$; por lo tanto

$$0 = \frac{4}{5} \cos(0) + \frac{8}{5} \sen(0) + Ce^0$$

$$C = -\frac{4}{5}$$

Finalmente obtenemos que la ecuación de la carga con respecto al tiempo es:

$$q(t) = \frac{4}{5} \cos(2t) + \frac{8}{5} \operatorname{sen}(2t) - \frac{4}{5} e^{-t}$$

Y para hallar la corriente lo que nos queda es derivar esta expresión

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{16}{5} \cos(2t) - \frac{8}{5} \operatorname{sen}(2t) + \frac{4}{5} e^{-t}$$

H. Resortes

14. Un resorte de masa despreciable se encuentra unido al techo por un extremo y por el otro se encuentra una masa de 50 kg. Considere que se le propicia al cuerpo una fuerza que de tal manera lo hace obtener una velocidad inicial de 2 metros por segundos y además se sabe que en un principio el cuerpo se encontraba estático pero alargado 1 metro.

a. Hallar una ecuación de velocidad en función de la posición.

b. Encuentre la velocidad cuando el resorte se estire 5 metros.

Solución:

Ley de Hooke establece que: “La fuerza es proporcional al alargamiento”, y con el cumplimiento de la Ley de Newton, se tiene,

$$ma = mg - kx$$

$$m \left(\frac{dv}{dt} \right) = mg - kx$$

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - kx$$

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - kx$$

Resolviendo la ecuación diferencial llegamos a:

$$v^2 = 2gx - \frac{k}{m}x^2 + mv_0^2$$

Reemplazamos los valores del ejercicio

$$v^2 = 2(10)x - \frac{k}{50}x^2 + 50(2)^2$$

$$v^2 = 20x - \frac{kx^2}{50} + 200$$

Consideremos las condiciones iniciales $v=0$, $x=0,1$

$$0 = 20 - \frac{k}{50} + 200$$

$$k = 4,4 \text{ N/m}^2$$

Nuestra ecuación nos quedaría así:

$$\text{Sol(a). } v^2 = 20x - 0,088x^2 + 200$$

Ahora evaluamos en $x = 1$

$$v = \pm\sqrt{100 + 2000 - 0,44}$$

$$\text{Sol(b). } v = 45,85 \frac{m}{s}$$

Empleo del software Matlab en la resolución de problemas verbales:

16. Un objeto se coloca en una habitación que está a temperatura constante de 20 °C. Se sabe que la constante de enfriamiento del objeto es $k=0.025$. Si al comienzo la temperatura del objeto es de 50 °C. ¿Qué temperatura tendrá después de 40 minutos?

Un script sencillo correspondiente en Matlab podría ser:

```
close all
clc
syms y t
y=dsolve('Dy=0.025*(20-y)', 'y(0)=50', 't')
t=0:5:100;
ysalida=eval(y);
tsalida=t;
plot(tsalida,ysalida)
grid on
t=40; y=eval(y)
```

b. Guardar con el nombre ejer_2_5 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>> y =
30*exp(-t/40) + 20
>>y =
31.0364
```

Y su representación gráfica es:

17. Se supone que la población de un país era de 14.5 millones en el año 2010 y que crece siguiendo la ley de Malthus: $y' = 0.045y(t)$, donde $y(t)$, representa el número de millones de habitantes en el instante t . ¿Cuántos millones de habitantes habrá en 2016?

Un script sencillo correspondiente en Matlab podría ser:

```
close all
clc
syms y t
y=dsolve('Dy=0.45*y', 'y(0)=14.5', 't')
```

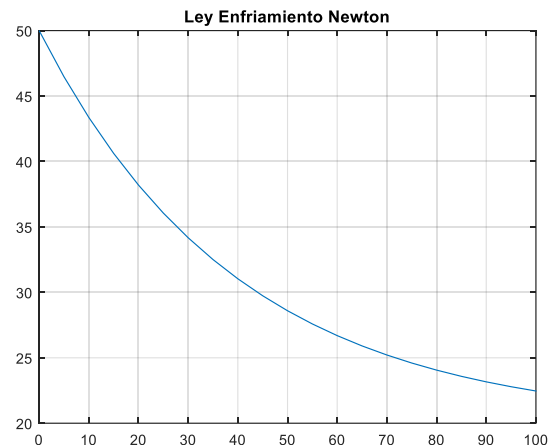


Figura 2.7

```

t=0:1:10;
ysalida=eval(y);
tsalida=t;
plot(tsalida,ysalida)
title('Ley Malthus')
grid on
t=6; y=eval(y)

```

b. Guardar con el nombre ejer_2_6 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```

>> y =
(29*exp(t/25))/2

```

```

>>y =
    18.4331

```

Y su representación gráfica es:

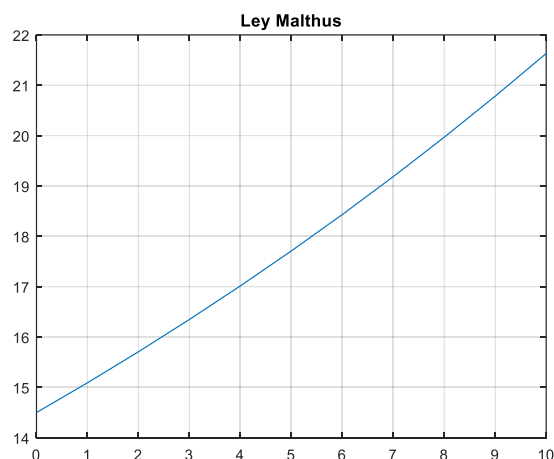


Figura 2.8

Ejercicios propuestos

1. Un tanque con capacidad 400 litros está parcialmente lleno con 100 litros de vinagre, y en ella se encuentran disueltos 10 kg de azúcar. Ingresamos medio kilo de azúcar por litro de vinagre a razón de 6 litros/hora. Una vez mezclado el contenido sale a una razón de 4 litros/hora. Se pide determinar:

- La cantidad de sal después de 30 min. Sol. 64,38 kg
- ¿Después de cuánto tiempo el tanque empieza a derramarse? Sol. 150 horas

2. Cierto profesor tiene una manera particular de escribir los apuntes de su materia (la escribe con una rapidez proporcional al número de hojas escritas). Pero, por otro lado uno de sus alumnos puede leer estos apuntes con rapidez constante. Se inicia un curso cada año, el profesor entrega una cantidad inicial de 10 hojas a sus alumnos y luego el resto conforme las escribe. Después de 3 meses el alumno presentaba un atraso de 20 páginas, y al finalizar el sexto mes ya eran 70 páginas de atraso. Se pide determinar:

- Determine cuántas páginas entregó el profesor en el noveno mes. Sol. 290 páginas
- Si el curso solo durara 9 meses ¿Cuántas páginas le faltaron leer al alumno? Sol. 240 páginas

3. En cierta ciudad de Italia la mafia, no puede dejar que un forense encuentre el veneno con el que asesinaron a su víctima. La sala de disección del forense se mantiene a una temperatura constante de 5° C, cuando se disponía a inspeccionar el cuerpo es asesinado, y el cuerpo de la víctima robado. A las 9 am un oficial encuentra el cuerpo del forense con una temperatura de 21° C. Ya al medio día la temperatura del cuerpo del forense era de 13° C. Si suponemos que el forense tenía una temperatura de 37° mientras estaba vivo. ¿A qué hora murió el forense? Sol. 6 am

4. Una población tiene un crecimiento proporcional al número de habitantes que hay en un momento dado en ella. Pasados 5 años la población se triplica, y después de 8 años esa cifra se incrementa a 45000 habitantes. ¿Cuál era la población inicial? Sol. 7760 habitantes

5. En cierta reserva natural se espera incrementar el número de bellas aves que conviven. Si después de 5 años ahora hay el doble de aves y después de 7, su número se ha elevado a 576. Halle el número de aves que había al fundar la reserva. Sol. 218 aves

6. Para poder enfriar un líquido altamente sensible a la variación de su temperatura se propone dejarlo en una sala de refrigeración de 5° C sí después de 30 horas tiene una temperatura de 8° C, transcurridos 40 horas su temperatura se reducen en 2 grados. Encuentre a qué temperatura se encontraba inicialmente el líquido. Sol. 86°

3. Un entrenador pokemón, se encuentra sobre un barranco para poder atrapar un Snorlax que solo se lo puede atrapar cuando está despertándose, este pokemón se encuentra a 300 metros, la clave para atraparlo es dejar caer una 'Peso ball' la cual tiene una masa de 9,7 kg. Se sabe que la velocidad límite es de 95 metros por segundo. Se pide determinar:

a. La posición de la 'Peso ball' en cualquier instante. Sol. $x(t) = 95t + 921.5(e^{-\frac{t}{9.7}} - 1)$

b. El tiempo en el que la 'Peso ball' golpea al Snorlax. Sol. 27578,5 s

8. Existe una sustancia radioactiva en ciertos fósiles, que se desintegra en cada momento a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Su vida media es de 5750 años. Hallar la edad del fósil considerando que contiene un 77,7% de la sustancia radioactiva. Sol. 2093 años

9. Un depósito contiene inicialmente 20 kg de sal disuelta en 500 L de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito 12 L/min de salmuera (disolución que contiene 0,25 kg de sal por litro), y que, simultáneamente, se sacan del

depósito 8 L/min en la mezcla resultante. ¿Qué cantidad de sal habrá en el depósito al cabo de 1 hora? Sol. 137 kg de sal

10. Un circuito consta de una inductancia de $L = 0.5$ henrio, una resistencia $R = 20$ ohmio, un condensador cuya capacidad es $C = 0.0025$ faradio y una fem $E = 100$ voltio. Hallar la corriente, sabiendo que, $q(0)=0$, $i(0)=0$. Sol. $i(t) = 10e^{-20t} \text{sen}(20t)$

11. Un circuito consta de una inductancia de $L = 3/2$ henrio, una resistencia $R = 10$ ohm y una fem $E = 9$ voltio. Hallar la corriente, sabiendo que $i(0) = 6$ Amp. Sol. $i(t) = \frac{1}{10}(9 + 51e^{-20t/3})$.

12. Un cuerpo de 20 N de peso se deja caer desde una altura de 100 m con velocidad inicial de 5 m/s. Suponiendo que el aire ofrece una resistencia de $-0.8v$, encuentre la altura que desciende al cabo de 4 segundos (considere, $g = 10 \text{ m/s}^2$). Sol. $y = 60.10 \text{ m}$.

13. En un grupo de 500 cabras se detecta un animal contagiado de un virus. Se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al producto del número de animales contagiados y el tiempo transcurrido. Hallar el momento en el cual todos los animales han sido contagiados si se observa que después de 5 días hay 8 animales con el virus. Sol. 7.64 días

14. Una epidemia se desarrolla en una población de tal forma que, en cada momento del tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas enfermas por el número de personas sanas. Si la población tiene 10000 habitantes, y se sabe que el número de personas infectadas inicialmente era de 50, junto con el hecho de que, al cabo de 3 días había 250 enfermos, ¿qué cantidad de

enfermos habrá en 12 días? Sol. $\frac{10^4 \cdot \frac{1}{9950} \cdot e^{12 \cdot 10^4 k}}{1 + \frac{1}{9950} \cdot e^{12 \cdot 10^4 k}}$

CAPÍTULO III

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN n

MOTIVACIÓN

En este capítulo se estudian los métodos básicos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de segundo orden y superior, tanto en el caso homogéneo como en el no homogéneo. Métodos de resolución que nos permiten obtener la solución de muchos problemas prácticos de cinemática, dinámica, circuitos eléctricos, vibraciones libres y forzadas, flexión de vigas, entre otras aplicaciones para diferentes áreas del conocimiento.

El **objetivo general** del presente capítulo es familiarizarse con las técnicas desarrolladas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n , determinando la solución general y la solución particular de la misma.

PRERREQUISITOS PARA ABORDAR ESTE TEMA

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Identificar las características de una ecuación diferencial ordinaria superior.
- Aplicar los conocimientos teóricos cubiertos en cursos regulares de cálculo diferencial e integral, algebra lineal y física.
- Identificar y trazar todo tipo de gráficas de relaciones polinómicas y trascendentes.
- Traducir al lenguaje simbólico problemas verbales relacionados con la Física, y otras aplicaciones cuyo modelo matemático corresponde a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n .

3.1. Ecuaciones diferenciales de segundo orden reducibles a primer orden

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden presentan un mayor grado de complejidad que las de primer orden; sin embargo, existen métodos que reducen esta dificultad y facilitan la búsqueda de resolución.

Un ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden sería:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - e^{5x} = 5$$

En general, este tipo de ecuaciones son difíciles de resolver, no obstante, una manera fácil de hacerlo es reducir el orden de la ecuación, para lo cual existe una variedad de casos, donde cualquier sustitución no es conveniente a cualquier problema. Para ello citaremos entre las posibles alternativas las siguientes:

a. Cuando no aparece la variable independiente ni su primera derivada.

A continuación, se muestra un claro ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x = 0$$

La sustitución para este caso corresponde a:

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Esto hace que la ecuación quede reducida a,

$$\frac{dz}{dx} = -2x$$

$$\int dz = -2 \int x dx$$

$$z = -x^2 + C_1 \quad (1)$$

No obstante, debemos recordar nuestra sustitución inicial que al reemplazar $z = \frac{dy}{dx}$ en

(1), se obtendrá,

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 + C_1$$

$$\int dy = \int -x^2 + C_1 dx$$

$$\text{Sol. } y = -\frac{x^3}{3} + xC_1 + C_2$$

Como se puede observar en las ecuaciones de segundo orden se generan 2 constantes de integración; es fundamental percatarse de esto y no confundirse al momento de integrar.

b. Cuando no aparece la variable dependiente

Para ello se cita el siguiente ejemplo,

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} = 0$$

Donde, al utilizar la sustitución,

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

La expresión anterior puede ser reescrita como sigue,

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - 4z = 0$$

$$\frac{dz}{4z} = x dx$$

$$\frac{\ln(z)}{4} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$z = e^{2x^2+4C_1} \quad (1)$$

Recordando nuestra sustitución inicial de $z = \frac{dy}{dx}$ en (1), se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x^2+4C_1}$$

$$\text{Sol. } y = \frac{C_1 e^{2x^2}}{4x} + C_2$$

c. Cuando no aparece la variable independiente.

Se cita como ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$$

Utilizando la sustitución,

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Reemplacemos en la ecuación:

$$z \frac{dz}{dy} - z^2 = z$$

$$\frac{dz}{dy} = 1 + z$$

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int dy$$

$$\ln(1+z) = y + C_1$$

$$z = e^{y+C_1} - 1 \quad (1)$$

Recordamos nuestra sustitución inicial de $z = \frac{dy}{dx}$ en (1), se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^y - 1$$

$$\ln(1 - C_1 e^y) = x + C_2$$

$$1 - C_1 e^y = e^{x+C_2}$$

$$C_1 e^y = 1 - e^{x+C_2}$$

$$e^y = \frac{1 - e^{x+C_2}}{C_1}, \text{ y aplicando propiedades logarítmicas, se tiene,}$$

$$\text{Sol. } y = \ln\left(\frac{1-e^{x+C_2}}{C_1}\right)$$

Luego de revisar algunos de los casos para reducir el orden de nuestras ecuaciones diferenciales, a continuación, se propone otros ejercicios con algunas variantes respecto a los ejercicios anteriormente desarrollados.

Ejercicios de aplicación

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} - \text{sen}(x) = x$$

Sustituimos en la ecuación

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = x + \text{sen}(x)$$

$$z = \frac{x^2}{2} - \text{cox}(x) + C_1 \quad (1)$$

Y luego reemplazamos nuestra sustitución inicial de $z = \frac{dy}{dx}$ en (1), se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \text{cox}(x) + C_1$$

$$\text{Sol. } y = \frac{x^3}{6} - \text{sen}(x) + xC_1 + C_2$$

$$2. y^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

Sustituimos en la ecuación

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y^2 z \frac{dz}{dy} = z^3$$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{y^2}$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$z = \frac{y}{1-yC_1} \quad (1)$$

Y luego se reemplaza la sustitución inicial de $z = \frac{dy}{dx}$ en (1), se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 - yC_1}$$

$$\frac{1 - yC_1}{y} dy = dx$$

$$\text{Sol. } \ln(y) - yC_1 = x + C_2$$

$$3. \frac{d^2y}{dx^2} = 4x; y'(1) = 4, y(1) = 2$$

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = 4x$$

$$z = 2x^2 + C_1 \quad (1)$$

Este ejercicio nos propicia dos condiciones iniciales, con las cuales encontraremos los valores de las constantes de integración que surgen del proceso de integración.

$$\frac{dy}{dx} = 4; x = 1$$

$$4 = 2 + C_1$$

$$C_1 = 2$$

Reemplazamos la sustitución inicial, y utilizamos la condición inicial de $z = \frac{dy}{dx}$ en (1), se

obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C_2$$

$$y = 2; x = 1$$

$$2 = \frac{2}{3} + 2 + C_2$$

$$C_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Sol. } y = \frac{2}{3}x^3 + 2x - \frac{2}{3}$$

$$4. 2 \frac{d^2y}{dx^2} = y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4$$

Sustituimos en la ecuación

$$z = \frac{dy}{dx}$$

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$2z \frac{dz}{dy} = yz^4$$

$$\frac{2}{z^3} dz = y dy$$

$$-\frac{1}{z^2} = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$z = \pm \sqrt{-\frac{2}{y^2 + 2C_1}} \quad (1)$$

Reemplazamos nuestra sustitución inicial de $z = \frac{dy}{dx}$ en (1), se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{2}{y^2 + 2C_1}}$$

$$\pm \sqrt{-\frac{y^2}{2} - C_1} dy = dx$$

$$\text{Sol. } \frac{y\sqrt{-y^2-2C_1} - 2C_1 \tan^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{-y^2-2C_1}}\right)}{2\sqrt{2}} = x + C_2$$

En este ejercicio se evidencia que usualmente es mejor aislar la variable 'x'.

Ejercicios propuestos

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 1$ Sol. $y = C_1 e^x + C_2 - x$
2. $2x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ Sol. $y = C_1 e^{\frac{3}{2}} + C_2$
3. $\sec(x) \frac{d^2y}{dx^2} - 2 = 0$ Sol. $y = C_1 + C_2 x - 2\cos(x)$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Sol. $y = \frac{\ln(C_1 + e^x) - x}{C_1} + C_2$
5. $y \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Sol. $y = C_2 e^{xC_1}$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + e^x$ Sol. $y = xe^x + C_1 e^x + C_2$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{1-x}$ Sol. $y = (1-x) \ln(1-x) + xC_2 + C_1$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} = \arctg(x)$ Sol. $y = \frac{1}{2} \arctg(x)(x^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + xC_2 + C_1$

$$1. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad \text{Sol. } y = \frac{C_1 x^3}{12} + \frac{C_1^2}{4} + C_2 + \frac{x^5}{80}$$

$$2. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} \quad \text{Sol. } y = C_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} (C_1 + x)^{3/2}$$

3.2. Ecuaciones diferenciales lineales

Estás ecuaciones diferenciales presentan la siguiente forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1(x) \frac{d^1 y}{dx^1} + a_0(x)y = h(x)$$

Con condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

$$y''(x_0) = y''_0$$

⋮

$$y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$$

Considerando a $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$ como constantes iniciales.

De la ecuación anterior lo más común es que se presente una $n=2$, generándose así:

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{d^1 y}{dx^1} + a_0(x)y = h(x)$$

En donde se divide toda la ecuación para $a_2(x)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \frac{d^1 y}{dx^1} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = \frac{h(x)}{a_2(x)}$$

La expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{d^1 y}{dx^1} + g(x)y = H(x)$$

Está de aquí, se la conoce con el nombre de ecuación general de segundo orden.

El factor $H(x)$ nos permite determinar si la ecuación lineal propuesta es o no homogénea, a partir de los siguientes criterios.

1. Si $H(x)$ es igual a 0 la ecuación es homogénea.
2. Si $H(x)$ no es igual a 0 la ecuación no es homogénea.

A manera de ejemplo podemos citar los siguientes,

Dada la siguiente ED, determinar si es o no homogénea

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y = 6$$

En virtud de que $H(x) \neq 0$, la ecuación aquí presente no es homogénea, pero si es lineal.

Es decir, para ser homogénea debería haber sido planteada como sigue,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Sin embargo, hay casos en las que una ecuación puede ser homogénea pero no lineal, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{\frac{dy}{dx}} + 10y = 0$$

Podemos apreciar que $H(x) = 0$, pero el factor $\frac{dy}{dx}$, está dentro de una raíz, por lo tanto, la convierte en no lineal.

Como bien sabemos la solución de una ecuación diferencial está casi siempre en función de la variable independiente, a esta le vamos a denominar $y = h(x)$, tal que esta solución debe ser n veces derivables en algún intervalo de manera que al sustituirla en la ecuación se logre una identidad. A continuación, se ilustran algunos ejemplos de lo anteriormente citado.

1. Comprobar que $y = 4x$, satisface la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 4$

Comenzamos el ejercicio derivando la solución que nos brinda el ejercicio:

$$\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Luego nos disponemos a reemplazar en la ecuación para comprobar:

$$0 + 4 = 4$$

Entonces hemos comprobado que el valor $4x$ si es solución para la ecuación diferencial.

2. Demuestre que $y = e^x + 1$, es solución para $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 1$

Al derivar y en la expresión propuesta, se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

Y al reemplazar en la ecuación diferencial inicial, se obtiene,

$$e^x - 2(e^x) + e^x + 1 = 1$$

$1 = 1$, lo cual permite concluir que la solución planteada satisface la ecuación diferencial.

3. Comprobar si $y = \text{sen}(x)$, es solución para $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \text{sen}(x)$

Al derivar y en la expresión inicial, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{sen}(x)$$

Luego, al reemplazar en la ecuación diferencial respectiva, se obtiene,

$$-\text{sen}(x) + \cos(x) \neq \text{sen}(x)$$

Esto nos permite concluir que la solución planteada no es una solución de la ecuación.

3.2.1. Principio de superposición o linealidad

Teorema. Sea $\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0$, una ecuación diferencial, homogénea y lineal, tal que presenta como soluciones a C_1y_1, C_2y_2 , entonces $C_1y_1 + C_2y_2$ también debe ser solución de la ecuación diferencial.

Demostración:

Sea la expresión,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + f(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + g(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + f(x)C_1y_1' + f(x)C_2y_2' + g(x)C_1y_1 + g(x)C_2y_2 = 0$$

$$C_1(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1) + C_2(y_2'' + f(x)y_2' + g(x)y_2) = 0$$

Pero como C_1y_1, C_2y_2 son soluciones de la ecuación diferencial entonces:

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

Se probará lo anteriormente señalado con los siguientes ejercicios.

1. Para la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ se tiene como solución $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$,

comprobar que su suma también corresponde a ser solución.

Solución.

Primero dispongámonos a derivar la suma de las soluciones.

$$\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x}$$

Y luego reemplacemos en la ecuación diferencial

$$e^x + e^{-x} - (e^x + e^{-x}) = 0$$

Se observa que se cumple el Teorema de Superposición o Linealidad.

2. Para la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ se tiene como solución

$$y_1 = \text{sen}(x), y_2 = \text{cos}(x), \text{ comprobar que su suma también sea solución.}$$

Solución.

Derivamos la suma de las soluciones

$$\frac{dy}{dx} = \text{cos}(x) - \text{sen}(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{cos}(x) - \text{sen}(x)$$

Y luego reemplazamos en la ecuación diferencial.

$$-\text{cos}(x) - \text{sen}(x) + \text{sen}(x) + \text{cos}(x) = 0$$

Hemos comprobado que se cumple el principio de superposición y linealidad.

3.2.1. Dependencia e independencia lineal

Dependencia lineal. Se tienen dos funciones $y_1(x), y_2(x)$ las cuales son linealmente independientes, si y solo si se cumple que $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$, siendo k un valor constante no igual a 0.

Independencia lineal. Se dice que una ecuación no es linealmente independiente cuando $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$, es decir que no son proporcionales entre sí.

A continuación, se citan algunos ejemplos respecto a lo señalado.

Verificar la dependencia o independencia de las siguientes funciones:

1. $y_1 = e^{3x}, y_2 = 2e^{3x}$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{3x}}{2e^{3x}}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}$$

Se concluye que las funciones son linealmente dependientes.

2. $y_1 = \text{sen}(x), y_2 = \text{cos}(x)$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \text{tg}(x)$$

Como no hemos obtenido un valor constante entonces se concluye que las funciones son linealmente independientes.

3.2.3 Wronskiano

Creado por el matemático polaco Józef Hoene-Wronski, es un determinante de orden n (número de funciones), que se calcula con la matriz construida de la siguiente forma:

1. En la primera fila se colocan las funciones.
2. En la siguiente fila las primeras derivadas, y así consecutivamente hasta la derivada de orden $(n - 1)$.

Lo señalado anteriormente puede ser escrito de manera simbólica como sigue:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Para el caso de dos funciones la expresión general queda reducida a:

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

Y para el caso de tres funciones quedará de la siguiente manera,

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix}$$

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos respecto a probar el desarrollo del Wronskiano.

1. Encuentre el Wronskiano para los siguientes conjuntos de funciones

- a. Dadas las funciones, $y_1 = e^x$, $y_2 = \text{sen}(x)$, $y_3 = 1$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix}$$

$$W(e^x, \text{sen}(x), 1) = \begin{pmatrix} e^x & \text{sen}(x) & 1 \\ e^x & \cos(x) & 0 \\ e^x & -\text{sen}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$W(e^x, \text{sen}(x), 1) = 1(-e^x \text{sen}(x) - e^x \cos(x))$$

$$W(e^x, \text{sen}(x), 1) = -e^x(\text{sen}(x) + \cos(x))$$

- b. $y_1 = x^2$, $y_2 = \ln(x)$

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$W(x^2, \ln(x)) = \begin{bmatrix} x^2 & \ln(x) \\ 2x & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

$$W(x^2, \ln(x)) = x - 2x \ln(x)$$

$$c. y_1 = \text{sen}(x), y_2 = \cos(x)$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$W(\text{sen}(x), \cos(x)) = \begin{bmatrix} \text{sen}(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\text{sen}(x) \end{bmatrix}$$

$$W(x^2, \ln(x)) = -\text{sen}^2(x) - \cos^2(x)$$

$$W(x^2, \ln(x)) = -1$$

Como ya sabemos, para saber si dos funciones son linealmente independientes simplemente se dividen entre sí, pero que pasa cuando se tienen tres o más funciones; en cuyo caso se debe aplicar el Wronskiano de tal manera que si $W \neq 0$ las funciones son linealmente independientes.

A manera de ejemplo a lo anteriormente señalado se tiene el desarrollo de los siguientes ejemplos.

$$a. y_1 = 5x, y_2 = \ln(x)$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$W(5x, \ln(x)) = \begin{bmatrix} 5x & \ln(x) \\ 5 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

$$W(5x, \ln(x)) = 5 - 5 \ln(x)$$

Se concluye que las dos funciones son linealmente independientes.

$$b. y_1 = e^x, y_2 = 2e^x$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$W(e^x, 2e^x) = \begin{bmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{bmatrix}$$

$$W(e^x, 2e^x) = 2e^{2x} - 2e^{2x}$$

Aquí el Wronskiano es igual a 0, lo cual significa que las funciones son linealmente dependientes.

Empleando Matlab, se pide determinar si un grupo de funciones son linealmente independiente (Wronskiano $\neq 0$)

c. Determinar si las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, son linealmente independientes

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t
a=[exp(t),exp(2*t)];
b=diff(a,t);% determinar la primera derivada
c=diff(b,t);% determinar la segunda derivada
d=[a;b];% establecer el vector de funciones
w=det(d) % determinar el Wronskiano
```

b. Guardar con el nombre ejer_3_1 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>>w=exp(3t)
```

lo que puede ser escrito como, $w = e^{3x}$, luego, el grupo de funciones son linealmente independientes.

Ejercicios propuestos

a. Compruebe si las siguientes funciones son soluciones de sus respectivas ecuaciones.

1. $y_1 = x$; $5 \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 5$

2. $y_1 = x + 2$; $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = (x + 1)^2$

3. $y_1 = \sqrt{x}$; $-2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y^2 = x$

4. $y_1 = e^{x^2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

5. $y_1 = \text{sen}(x)$; $\frac{d^2y}{dx^2} - \text{ctg}(x) \frac{dy}{dx} = -\text{csc}(x)$

6. $y_1 = \text{tg}(x)$; $\frac{d^2y}{dx^2} - \text{ctg}(x) \frac{dy}{dx} = -\text{csc}(x)$

7. $y_1 = x^2$; $2x \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + \sqrt{y} = x$

b. Compruebe si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes.

1. $y_1 = 2x, y_2 = 3x$

2. $y_1 = \sqrt[3]{x}, y_2 = \sqrt{x}$

3. $y_1 = e^x, y_2 = \ln(x)$

4. $y_1 = (x + 2)^2, y_2 = x$

5. $y_1 = x^3, y_2 = \frac{x}{3}$

6. $y_1 = \arctg(x), y_2 = tg(x)$

7. $y_1 = \cos(2x), y_2 = \cos^2(x)$

c. Halle el Wronskiano de las siguientes funciones y determine si son linealmente dependientes o independientes.

1. $y_1 = \cos(x), y_2 = \text{sen}(x), y_3 = tg(x)$

2. $y_1 = x^2, y_2 = 4x^2, y_3 = (x + 4)^2$

3. $y_1 = x^2, y_2 = e^{2\ln(x)}$

4. $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{x}, y_3 = x$

5. $y_1 = \text{senh}(x), y_2 = e^{-x}$

6. $y_1 = \text{sen}(2x), y_2 = \cos(2x), y_3 = 1$

7. $y_1 = x + 3, y_2 = x - 3, y_3 = 3$

8. $y_1 = 4, y_2 = e, y_3 = \ln(x)$

9. $y_1 = x, y_2 = \ln(x)$

10. $y_1 = \cosh(x), y_2 = e^x, y_3 = e^{-x}$

3.2.4. Problemas con valor inicial

Cuando se tiene una cierta ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = r(x)$, se generan soluciones las cuales están acompañadas de constantes; para poder hallar estos valores constantes se deben aplicar los valores iniciales de tal modo que $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \dots$, y así consecutivamente dependiendo del orden de la ecuación diferencial.

A manera de ejemplo se citan los siguientes:

1. Sea la siguiente ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, que tiene como solución las siguientes funciones $y_1 = C_1 \text{sen}(x), y_2 = C_2 \cos(x)$, con C_1 y C_2 como constantes cualesquiera, determine el valor de dichas constantes conociendo la siguiente condición inicial.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Entonces consideremos como solución general a la suma de las 2 funciones que se definen como solución para la ecuación diferencial:

$$y = C_1 \text{sen}(x) + C_2 \cos(x)$$

La cual derivamos una vez para poder hacer cumplir la condición inicial.

$$y' = C_1 \cos(x) - C_2 \text{sen}(x)$$

Evaluamos las condiciones iniciales

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$C_1 = 2$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - C_2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$C_2 = -1$$

Una vez conocidos los valores constantes dejamos expresado completamente la solución general.

$$\text{Sol. } y = 2\text{sen}(x) - \cos(x)$$

2. Sea la siguiente ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, que tiene como solución las siguientes funciones $y_1 = C_1 e^x$, $y_2 = C_2 e^{-x}$, donde C_1 y C_2 corresponden a cualquier constante. Se pide, determinar el valor de estas constantes conociendo la siguiente condición inicial.

$$y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Al considerar como solución general a la suma de las dos funciones que se definen como solución para la ecuación diferencial $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, realizamos la primera derivada con el fin de hacer cumplir la condición inicial, es decir,

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \quad (1)$$

La expresión (1) al ser evaluado mediante las condiciones iniciales, se obtiene,

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{-0} = 1$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = C_1 e^0 - C_2 e^{-0} = 2$$

$$C_1 - C_2 = 2$$

Esto genera sistema de ecuaciones que al ser resuelto nos conduce a lo siguiente:

$$C_1 = \frac{3}{2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$

Valores que al ser reemplazados en la expresión $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, se obtiene finalmente, $y = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

3.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

3.3.1. Ecuaciones de segundo orden de coeficientes constantes

Este tipo de ecuaciones se presentan en la siguiente forma:

$$y'' + ay' + by = 0$$

Donde a y b representan valores constantes

Para resolver este tipo de ecuaciones se recurre a la siguiente forma auxiliar:

$$m^2 + am + b = 0$$

Lo cual evidencia la representación de una ecuación cuadrática a la cual queremos encontrar sus raíces, para ello empleamos la formula general, con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

Que de manera desglosada corresponde a las siguientes dos raíces:

$$m_1 = \frac{(-a + \sqrt{a^2 - 4b})}{2} \quad (1); \quad m_2 = \frac{(-a - \sqrt{a^2 - 4b})}{2} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) generan los siguientes criterios de búsqueda de solución.

1. Si se tiene un discriminante $\sqrt{a^2 - 4b}$ positivo entonces m_1 y m_2 son reales y diferentes, por siguiente las soluciones de la ecuación diferencial serán de la forma:

$$y_1 = C_1e^{m_1x}, \quad y_2 = C_2e^{m_2x}$$

2. Si el discriminante $\sqrt{a^2 - 4b}$ es igual a 0 entonces m_1 y m_2 son reales e iguales, por siguiente la solución general de la ecuación diferencial será de la forma:

$$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$$

3. Si el discriminante $\sqrt{a^2 - 4b}$ es negativo a 0 entonces m_1 y m_2 son raíces imaginarias, por siguiente la solución general de la ecuación diferencial será de la forma:

$$y_1 = C_1e^{m_1x}, y_2 = C_2e^{m_2x}$$

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

Pero $m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \alpha - \beta i$, que reemplazando en la ecuación:

$$y_1 = C_1e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2 = C_2e^{(\alpha - \beta i)x}$$

$$y = C_1e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Factorizando, se tiene,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x})$$

Debemos considerar que: $e^{\beta i x} = \cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)$ y $e^{-\beta i x} = \cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x)$

Que al reemplazar en la solución general se tiene que:

$$y = e^{\alpha x}((C_1 (\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)) + C_2 (\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))))$$

$$y = e^{\alpha x} \left(\frac{(C_1 + C_2)}{\text{constante}} \cos(\beta x) + \frac{i(C_1 - C_2)}{\text{constante}} \operatorname{sen}(\beta x) \right)$$

Lo cual finalmente puede ser escrito como,

$$y = e^{\alpha x} C_1 \cos(\beta x) + e^{\alpha x} C_2 \operatorname{sen}(\beta x)$$

A manera de ejemplo a lo anteriormente señalado a continuación se citan algunos ejemplos.

Ejercicios de aplicación

1. $8y'' + 10y' + 2y = 0$

Solución:

Al expresar la ecuación diferencial de manera general, se obtiene,

$$y'' + \frac{5}{4}y' + \frac{1}{4}y = 0$$

Expresión que, al ser escrita en la forma auxiliar, se tiene,

$$m^2 + \frac{5}{4}m + \frac{1}{4} = 0$$

Y aplicando la fórmula general para encontrar las raíces de la función, se obtiene,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}}{2}$$

$$m = \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}}}{2}$$

$$m = \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}}{2}$$

Hemos obtenido un discriminante positivo, por ello nos encontramos en el primer caso.

$$m = \frac{-\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}}{2}$$

$$m_1 = -\frac{1}{4} \text{ y } m_2 = -1$$

Por lo tanto, la solución general para el ejercicio propuesto será:

$$\text{Sol. } y = C_1 e^{-\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x}$$

$$2. \ 9y'' + 30y' + 25y = 0$$

Solución:

Primero debemos dejar expresada a la ecuación diferencial de manera general como sigue,

$$y'' + \frac{10}{3}y' + \frac{25}{9}y = 0$$

Expresando la expresión anterior en su forma auxiliar, se obtiene,

$$m^2 + \frac{10}{3}m + \frac{25}{9} = 0$$

Luego, aplicamos la fórmula general para encontrar las raíces de la función, o sea,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{100}{9}}}{2}$$

$$m = \frac{-\frac{10}{3} \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$m = -\frac{10}{6}$$

Se observa que se obtiene un discriminante igual a 0, por ello nos encontramos en el segundo caso.

$$m = -\frac{5}{3}$$

$$m_1 = -\frac{5}{3} \text{ y } m_2 = -\frac{5}{3}$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$\text{Sol. } y = C_1 e^{-\frac{5}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{5}{3}x}$$

$$3. \ 5y'' + 10y' + 10y = 0$$

Solución:

Primero debemos dejar expresada a la ecuación diferencial de manera general, o sea,

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Después la expresamos en su forma auxiliar

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

Y aplicando la fórmula general para encontrar las raíces de la función, se obtiene,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

Se logra obtener un discriminante negativo, por ello nos encontramos en el tercer caso.

$$m = -1 \pm i$$

$$m_1 = -1 + i \text{ y } m_2 = -1 - i$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$\text{Sol. } y = e^{-x}C_1 \cos(x) + e^{-x}C_2 \text{sen}(x)$$

Como una variante a los ejercicios anteriormente resueltos, a continuación, se presentan algunos en que se logra hallar el valor de las constantes de integración.

1. Encuentre la solución general para la siguiente ecuación diferencial homogénea

$$2y'' + 4y' + y = 0, \text{ considerando que } y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Solución:

Primero debemos dejar expresada a la ecuación diferencial de manera general, o sea,

$$y'' + 2y' + \frac{y}{2} = 0$$

Después lo expresemos en nuestra forma auxiliar, o sea,

$$m^2 + 2m + \frac{1}{2} = 0$$

Aplicando la fórmula general para encontrar las raíces de la función, se obtiene,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Se logra obtener un discriminante mayor que 0, por lo que, nos encontramos en el primer caso, o sea,

$$m_1 = \frac{(-2 + \sqrt{2})}{2} \quad y \quad m_2 = \frac{(-2 - \sqrt{2})}{2}$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$y = e^{\frac{(-2+\sqrt{2})}{2}x} C_1 + e^{\frac{(-2-\sqrt{2})}{2}x} C_2$$

Ahora, al evaluar la expresión anterior mediante las condiciones iniciales, se obtiene lo siguiente,

$$y(0) = e^0 C_1 + e^0 C_2 = 1$$

$$y'(0) = \frac{(-2 + \sqrt{2})}{2} e^0 C_1 + \frac{(-2 - \sqrt{2})}{2} e^0 C_2 = \frac{1}{2}$$

Esto nos genera un sistema de ecuaciones, o sea,

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(-2 + \sqrt{2})C_1 + (-2 - \sqrt{2})C_2 = 1$$

Sistema que al ser resuelto nos conduce a lo siguiente,

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} \quad y \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$\text{Sol. } y = e^{\frac{(-2+\sqrt{2})}{2}x} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} \right) + e^{\frac{(-2-\sqrt{2})}{2}x} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} \right)$$

2. Encuentre la solución general para la siguiente ecuación diferencial homogénea

$$4y'' + 8y' + 20y = 0, \text{ considerando que } y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Solución:

Primero debemos dejar expresada la ecuación diferencial de manera general

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Después lo traducimos a la forma de escritura de la función auxiliar

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

Y aplicamos la fórmula general para encontrar las raíces de la función

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Hemos obtenido un discriminante menor que 0, por ello nos encontramos en el segundo caso.

$$m_1 = \frac{(-2 + 4i)}{2} \quad y \quad m_2 = \frac{(-2 - 4i)}{2}$$

$$m_1 = -1 + 2i \quad y \quad m_2 = -1 - 2i$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$y = e^{-x}C_1 \cos(2x) + e^{-x}C_2 \operatorname{sen}(2x)$$

Ahora evaluemos las condiciones iniciales para poder hallar el valor de las constantes.

$$y(0) = e^0 C_1 + e^0 C_2 * 0 = 2$$

$$y' = -e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)) + 2e^{-x}(C_2 \cos(2x) - C_1 \operatorname{sen}(2x))$$

$$y'(0) = -e^0(C_1 * 1 + C_2 * 0) + 2e^0(C_2 * 1 - C_1 * 0) = 2$$

Entonces tenemos un sistema de ecuaciones, tal que:

$$C_1 = 2$$

$$-C_1 + 2C_2 = 2$$

De aquí obtenemos que:

$$C_1 = 2 \quad y \quad C_2 = 2$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$y = 2e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \operatorname{sen}(2x)$$

3. Se tiene como solución general a $y = e^x + e^{-3x}$, encuentre la ecuación diferencial a la cual satisfaga esta solución.

Solución:

Podemos darnos cuenta que la solución representa el primer caso para coeficientes constantes; es decir que del polinomio auxiliar han surgido como raíces 1 y -3, por ello:

$$(m - 1)(m + 3) = 0$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

Y si llevamos esto a la expresión de ecuación diferencial tenemos que:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

4. Empleando Matlab, se pide determinar la función solución de la EDO de coeficientes constantes siguiente:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y''(0) = 3, \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 1$$

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t
y1=dsolve('D3y-3*D2y+3*Dy-y=0','D2y(0)=3','Dy(0)=2','y(0)=1');
y=simplify(y1);
pretty(y)
```

b. Guardar con el nombre ejer_3_2 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>>exp(t)(t + 1)
```

lo que puede ser escrito como, $y = e^x(x + 1)$

3.3.2 Ecuación de Cauchy-Euler

La ecuación de Cauchy-Euler se presenta de la forma $x^2y'' + axy' + by = 0$, donde a y b se consideran constantes. Para poder hallar la solución se plantea la siguiente sustitución, $y = x^m$, que al ser introducida en la expresión que la define, se obtiene lo siguiente,

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = (m - 1)mx^{m-2}$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial se tiene:

$$x^2(m - 1)mx^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

Agrupando por factor común

$$x^m(m(m - 1) + am + b) = 0$$

Tenemos que considerar que $x^m \neq 0$, por lo que tenemos que igualar a 0 nuestro otro factor.

$$m(m - 1) + am + b = 0$$

$$m^2 + (a - 1)m + b = 0$$

Al igual que en el caso precedente, tenemos que considerar los siguientes posibles tres casos de solución.

1. Si se tiene un discriminante positivo se obtienen 2 raíces reales y diferentes. Se tiene como solución general $y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$.
2. Si el discriminante es igual a 0, solo se obtienen 2 raíces reales pero iguales. Se tiene como solución general $y = C_1x^m + C_2\ln(x)x^m$.
3. Si el discriminante es negativo se obtienen 2 raíces imaginarias y diferentes. Se tiene como solución general $y = x^\alpha \left(A\cos(\ln(x^\beta)) + B\sen(\ln(x^\beta)) \right)$

A manera de ejemplo, a continuación, se desarrollan algunos ejercicios respecto a lo anteriormente señalado.

Ejercicios de aplicación

Encuentre la solución para las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$1. x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

Solución:

Primero debemos identificar los valores a y b de la ecuación y colocarlos en nuestra ecuación auxiliar, o sea,

$$m^2 + (-3 - 1)m + 3 = 0$$

Luego, se deben hallar las raíces de la ecuación mediante la fórmula general,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

Se obtiene un discriminante positivo que nos permite concluir que estamos frente al primer caso de solución, o sea,

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$m_1 = 3, m_2 = 1$$

La solución general será:

$$y = C_1x^3 + C_2x$$

$$2. x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Solución:

En primer lugar, se debe identificar los valores a y b de la ecuación y colocarlos en nuestra ecuación auxiliar, o sea,

$$m^2 + (4 - 1)m + 2 = 0$$

Luego, debemos hallar las raíces de la ecuación a través de la fórmula general.

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

Con ello se obtiene un discriminante positivo, lo cual nos permite concluir que estamos frente al primer caso de solución, o sea,

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$m_1 = -1, m_2 = -2$$

Finalmente, esto nos conduce a la siguiente solución general,

$$\text{Sol. } y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$$

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0$$

Solución:

Al identificar los valores de a y b de la ecuación y colocarlos en nuestra ecuación auxiliar, se tiene,

$$m^2 + (1 - 1)m + 4 = 0$$

Se hallan las raíces de la ecuación con la fórmula general, o sea,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 16}}{2}$$

Con esto logramos obtener un discriminante positivo que nos permite concluir que nos encontramos en el primer caso de solución, o sea,

$$m = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$m_1 = 0 + 2i, m_2 = 0 - 2i$$

$$\alpha = 0; \beta = 2$$

Finalmente, la solución general será:

$$\text{Sol. } y = (A \cos(\ln(x^2)) + B \sin(\ln(x^2)))$$

$$3. x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Solución:

Primero debemos identificar los valores a y b de la ecuación y colocarlos en nuestra ecuación auxiliar, o sea,

$$m^2 + (-3 - 1)m + 4 = 0$$

Luego, hallamos las raíces de la ecuación con la fórmula general, o sea,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

Esto nos proporciona un discriminante positivo, el cual nos permite concluir que estamos frente a un primer caso de solución, o sea,

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$m = 2$$

Finalmente, la solución general corresponde a:

$$\text{Sol. } y = x^2(C_1 + C_2 \ln(x))$$

$$4. \quad x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$$

Solución:

Primero debemos identificar los valores a y b de la ecuación y colocarlos en nuestra ecuación auxiliar, o sea,

$$m^2 + (-4 - 1)m + 4 = 0$$

Luego, al hallar las raíces de la ecuación con la fórmula general, se obtiene,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

Hemos obtenido un discriminante positivo, lo cual nos permite concluir que estamos frente a primer caso de solución, o sea,

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$m_1 = 4, m_2 = 1$$

La solución general será:

$$y = C_1 x^4 + C_2 x$$

5. Empleando Matlab, se pide determinar la función solución de la EDO siguiente:

$$x^3 y''' + 16x^2 y'' + 79xy' + 125y = 0, y'''(0) = 1, y(0) = 0, y(0) = 0$$

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t
y1=dsolve('t^3*D3y+16*t^2*D2y+79*t*Dy+125*y=0','D2y(2)=1','Dy(2)=0',...
'y(2)=0');
y=simplify(y1);
pretty(y)
```

b. Guardar con el nombre ejer_3_3 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>>t sin(3 log(t) - log(8)) 32 - t cos(3 log(t) - log(8)) 96 + 192
-----
          5
         15 t
```

lo que puede ser escrito como,

$$y = \frac{1}{15}x^{-5}(32x \operatorname{sen}(3 \log(x) - \log(8)) - 96x \operatorname{cos}(3 \log(x) - \log(8)) + 192)$$

Ejercicios propuestos

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método adecuado.

- $y'' + y' - 2y = 0$ Sol. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$
- $y'' + 4y' - 3y = 0$ Sol. $y = C_1 e^{(-2+\sqrt{7})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{7})x}$
- $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ Sol. $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$
- $3y'' + 9y' + 5y = 0$ Sol. $y = C_1 e^{\frac{(-9+\sqrt{21})}{6}x} + C_2 e^{\frac{(-2-\sqrt{21})}{6}x}$
- $y'' + y' + y = 0$ Sol. $y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \operatorname{cos} \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$
- $y'' + 2y' + 2y = 0$ Sol. $y = e^{-x}(C_1 \operatorname{cos}x + C_2 \operatorname{sen}x)$
- $x^2 y'' + 4xy'' + 3y = 0$ Sol. $y = C_1 x^{-3} + \frac{C_2}{x}$
- $x^2 y'' - 2xy'' - 7y = 0$ Sol. $y = \frac{1}{x^4}(C_1 + C_2 \ln(x))$
- $x^2 y'' + xy' - 6y = 0$ Sol. $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^3}$

j. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ Sol. $y = C_1 \cos(2 \ln(x)) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln(x))$

2. Para cada literal anterior encuentre el valor de las constantes considerando las siguientes condiciones iniciales:

a. $y(0) = 2; y'(0) = 4$

b. $y(0) = 2 + \sqrt{7}; y'(0) = \sqrt{7}$

c. $y(0) = 3; y'(0) = 1$

d. $y(0) = 6; y'(0) = \frac{1}{6}$

e. $y(0) = \pi; y'(0) = \frac{\pi}{2}$

f. $y(0) = \frac{3}{2}\pi; y'(0) = \pi$

g. $y(1) = 2; y'(1) = -2$

h. $y(1) = 2; y'(1) = e$

i. $y(1) = 5; y'(1) = 5$

j. $y(1) = \pi; y'\left(\frac{2}{\pi}\right) = \pi$

3.4. Ecuaciones de orden arbitrario con coeficientes constantes

Anteriormente habíamos aplicado este método en ecuaciones diferenciales de segundo orden, pero también podemos aplicarlo cuando nos encontremos con ecuaciones de tercer, cuarto, quinto orden, y así sucesivamente. Situación que presenta una facilidad en la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior con coeficientes constantes, tal como se ilustra en los siguientes ejemplos.

1. Si logramos obtener raíces reales e iguales, la solución quedara de la forma:

$$y = e^{mx}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_nx^{n-1})$$

2. Si las raíces son reales y diferentes, la solución se expresa de la forma:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + \dots + C_ne^{m_nx}$$

3. Si se obtienen raíces con multiplicidad y otras no, es decir si se llegara a tener un número de raíces tanto iguales como diferentes la solución se expresaría así:

Supongamos que se obtienen 4 raíces de las cuales:

$$m_1 = m_2 = m_3 \neq m_4$$

Entonces, la solución corresponde a:

$$y = e^{mx}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4e^{m_4x}$$

4. Si las raíces son complejas para cada par conjugado la solución es:

$$y = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \operatorname{sen}(\beta x))$$

Pero si hay más de un par conjugado, entonces el otro debería quedar así:

$$y = xe^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

A continuación, se resuelven algunos ejercicios respecto a lo anteriormente señalado.

Ejemplos:

1. Encuentre la solución para:

a. $y''' + y'' + y' + y = 0$

Solución:

Expresamos la ecuación diferencial con ayuda de la función auxiliar, o sea,

$$m^3 + m^2 + m + 1 = 0$$

Obteniéndose las raíces del polinomio de grado tres como sigue,

$$m_1 = 1 \quad m_2 = i \quad m_3 = -i$$

Recordando cada uno de los casos, podemos determinar que la solución debería ser la siguiente:

Sol. $y = C_1 e^x + (A\cos(x) + B\sin(x))$

b. $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$

Expresamos la ecuación diferencial con ayuda de la función auxiliar como sigue,

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0$$

Se obtienen las siguientes raíces del polinomio de grado tres,

$$m_1 = -1 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 3$$

Recordando cada uno de los casos, podemos determinar que la solución debería de quedar de la siguiente manera:

Sol. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

c. $2y''' - 2y'' - 10y' - 6y = 0$

Expresamos la ecuación diferencial con ayuda de la función auxiliar como sigue,

$$2m^3 - 2m^2 - 10m - 6 = 0$$

Se obtienen las siguientes raíces del polinomio de grado tres, o sea,

$$m_1 = m_2 = -1 \quad m_3 = 3$$

Recordando los diferentes casos de solución, podemos determinar que la solución corresponde a la siguiente,

Sol. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{3x}$

d. $y^v - 2y^{iv} - y'' + 2y = 0$

Expresamos la ecuación diferencial con ayuda de la función auxiliar, o sea,

$$m^5 - 2m^4 - m^2 + 2 = 0$$

Obteniéndose las siguientes raíces del polinomio de grado tres, o sea,

$$m_1 = 1 \quad m_2 = -1 \quad m_3 = 2 \quad m_4 = i \quad m_5 = -i$$

Recordando cada uno de los casos de solución, podemos determinar que la solución corresponde a,

$$\text{Sol. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + A \text{sen}(x) + B \text{cos}(x)$$

$$\text{d. } y^{iv} - y = 0$$

Expresamos la ecuación diferencial con ayuda de la función auxiliar, o sea,

$$m^4 - m = 0$$

Se obtienen las siguientes raíces del polinomio de grado tres, o sea,

$$m_1 = 1 \quad m_2 = -1 \quad m_3 = i \quad m_4 = -i$$

Recordando cada uno de los casos de solución, podemos determinar que la solución debería de quedar como sigue:

$$\text{Sol. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \text{sen}(x) + B \text{cos}(x)$$

$$\text{e. } y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$$

Expresamos la ecuación diferencial con ayuda de la función auxiliar, o sea,

$$m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 1 = 0$$

Obtenemos las raíces del polinomio de grado tres como sigue,

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$$

Recordando cada uno de los casos de solución, podemos determinar que la solución finalmente será:

$$\text{Sol. } y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3)$$

Ejercicios propuestos

$$1. \quad y''' - y'' - 3y' - y = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_3 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

$$2. \quad y''' - 2y'' - y' = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

$$3. \quad y''' + 4y'' + 4y' = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 + e^{-2x}(C_2 + C_3 x)$$

$$4. \quad y^{iv} + 2y'' + y = 0 \quad \text{Sol. } y = (C_1 + C_3 x) \text{cos} x + (C_2 + C_4 x) \text{sen} x$$

$$5. \quad y^{iv} + 3y'' - 4y = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \text{cos}(2x) + C_4 \text{sen}(2x)$$

$$6. \quad 2y''' - y'' - 2y = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\frac{x}{2}}$$

$$7. \quad y^v + 2y''' + 10y'' + y' + 10y = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 e^{-2x} + C_2 \text{cos}(x) + C_3 \text{sen}(x) + e^x(C_4 \text{cos}(2x) + C_5 \text{sen}(2x))$$

$$8. y^{iv} - 14y'' + y = 0 \quad \text{Sol. } y = C_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{3})x} + C_3 e^{(-2+\sqrt{3})x} + C_4 e^{(-2-\sqrt{3})x}$$

3.5. Ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden

La expresión general para representar una ecuación no homogénea es la siguiente:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

Donde las funciones que acompañan a la primera y a la segunda derivada son constantes, este tipo de planteamiento nos sugiera una relación entre:

$$a. y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \quad \text{y} \quad b. y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Esto hace que puedan surgir dos posibles soluciones para el ejercicio, para el primer caso surgirá una solución particular la cual denotaremos como y_p y para el segundo caso una solución general que se denota y_h .

Pero como bien sabemos nosotros que “la suma de dos soluciones de la misma ecuación diferencial también es solución (principio de superposición)”, por ello la solución final será $y = y_h + y_p$.

Demostración:

$$y' = y'_h + y'_p$$

$$y'' = y''_h + y''_p$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial no homogénea, o sea,

$$y''_h + y''_p + f(x)(y'_h + y'_p) + g(x)(y_h + y_p) = r(x) \quad (1)$$

Y reordenando la expresión (1) como sigue, se obtiene,

$$(y''_h + f(x)y'_h + g(x)y_h) + (y''_p + f(x)y'_p + g(x)y_p) = r(x)$$

Existen dos métodos para poder encontrar la solución particular de una ecuación diferencial no homogénea.

3.5.1. Método de coeficientes indeterminados.

El cual básicamente consiste fundamentalmente en intuir la forma de la solución particular, a manera de ejemplo se tiene lo siguiente:

$$1. y'' + xy'(x) + y = 3x + 4$$

El método propone que la solución particular sea de la forma:

$$y = Ax + B$$

El cual es un polinomio de primer grado al igual que $r(x)$, luego, se deriva la solución propuesta, quedando lo siguiente,

$$y' = A$$

$$y'' = 0$$

Luego, se reemplaza en la ecuación diferencial propuesta, obteniéndose,

$$0 + Ax + Ax + B = 3x + 4$$

Se consideran los términos iguales (términos análogos), se obtiene lo siguiente,

$$2Ax = 3x$$

$$B = 4$$

Por lo tanto, se tiene que,

$$A = \frac{3}{2} \text{ y } B = 4$$

Y finalmente, la solución particular de la ecuación diferencial correspondiente será:

$$\text{Sol. } y_p = \frac{3}{2}x + 4$$

$$2. \ y'' + 3y = e^{2x} + x + 1$$

Considerando el ejercicio anterior, se observa lo siguiente:

El método considerado nos propone como solución particular,

$$y_p = Ae^{2x} + Bx + C$$

Expresión que al derivarse nos conduce a,

$$y' = 2Ae^{2x} + B$$

$$y'' = 4Ae^{2x}$$

Las mismas que al ser reemplazada en la ecuación diferencial inicial, proporciona lo siguiente:

$$4Ae^{2x} + 3(Ae^{2x} + Bx + C) = e^{2x} + x + 1$$

Con esto tenemos que,

$$7Ae^{2x} = Ae^{2x}$$

$$3Bx = x$$

$$3C = 1$$

Para llegar finalmente a la siguiente solución particular de la ED propuesta,

$$\text{Sol. } y_p = \frac{1}{7}e^{2x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$3. \text{ Encuentre la solución general de la ED, } y'' + y' - 2y = (6x + 2) + 20\cos(x)$$

Se propone la siguiente solución particular,

$$y = Ax + B + C\cos(x) + D\sin(x)$$

Expresión que al derivarse nos conduce a,

$$y' = A - C\operatorname{sen}(x) + D\operatorname{cos}(x)$$

$$y'' = -C\operatorname{cos}(x) - D\operatorname{sen}(x)$$

Luego, se reemplaza en la ecuación diferencial propuesta, obteniéndose,

$$\begin{aligned} -C\operatorname{cos}(x) - D\operatorname{sen}(x) + A - C\operatorname{sen}(x) + D\operatorname{cos}(x) \\ - 2(Ax + B + C\operatorname{cos}(x) + D\operatorname{sen}(x)) = (6x + 2) + 20\operatorname{cos}(x) \end{aligned}$$

Se agrupan los términos semejantes, con lo cual se obtiene,

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(x)(-C + D - 2C) + \operatorname{sen}(x)(-D - C - 2D) + x(A - 2A) - 2B \\ = (6x + 2) + 20\operatorname{cos}(x) \end{aligned}$$

Expresión que al analizarse por analogía de términos nos genera un sistema de ecuaciones

$$-3C + D = 20$$

$$-3D - C = 0$$

$$-A = 6$$

$$-2B = 2$$

Que al ser resuelto nos proporciona los siguientes valores de las constantes,

$$A = -6$$

$$B = -1$$

$$C = -6$$

$$D = 2$$

Quedando, así como solución particular la siguiente expresión:

$$y_p = -(6x + 1) - 6\operatorname{cos}(x) + 2\operatorname{sen}(x)$$

Pero el ejercicio no termina aquí puesto que se nos pide además la solución general de la ecuación. Entonces, debemos de tratar a la ecuación diferencial no homogénea como si lo fuera, o sea,

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Y recurriendo a los conceptos ya visto anteriormente, se tiene lo siguiente,

$$m^2 + m - 2 = 0$$

$$(m - 1)(m + 2) = 0$$

Logrando como resultado el siguiente:

$$m_1 = 1, m_2 = -2$$

Por lo que la solución homogénea corresponde a:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Finalmente, para lograr la solución general se suman ambas soluciones obteniéndose como solución final,

$$\text{Sol. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - (6x + 1) - 6 \cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x)$$

4. Encuentre la solución general de la ED, $y'' + 3y' + y = (3x + 6)e^x$

Solución:

Para este tipo de ejercicios se debe plantear como solución particular:

$$y = x(Ax + B) e^x$$

Entonces derivamos la solución propuesta, o sea,

$$y' = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B)$$

$$y'' = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se tiene:

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + 3(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + x(Ax + B) = 3x + 6$$

$$x^2(5A) + x(10A + 5B) + (5B + 2A) = 3x + 3$$

Como no hay termino en x^2 , en $r(x)$

$$A = 0$$

$$B = \frac{5}{3}$$

Y por tanto, la solución particular queda así:

$$y = \frac{5}{3} x e^x$$

Llevando a una ecuación auxiliar se tiene lo siguiente:

$$m^2 + 3m + 1 = 0$$

Aplicando la fórmula general

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

Que nos conduce a las siguientes raíces,

$$m_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

Luego, la solución general es:

$$y = C_1 e^{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} x} + C_2 e^{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} x}$$

Y, finalmente se da por concluido el ejercicio con la suma de la solución general y particular, o sea,

$$y = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{5}{3} x e^x$$

5. Encuentre la solución general de $y''' + y'' + y' + y = x^2 + 2x - 2$

Solución:

Para este tipo de ejercicios se debe plantear como solución particular:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Entonces al derivar la solución propuesta, se obtiene,

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

$$y''' = 0$$

Lo cual, sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene,

$$2A + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 2x - 2$$

Generándose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A = 1$$

$$2A + B = 2$$

$$C + B = -2$$

Que al ser resuelto proporciona los siguientes valores de las constantes respectivas,

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = -2$$

Y por tanto, la solución particular queda expresada como sigue:

$$y = x^2 - 2$$

Transformando la ED a una ecuación auxiliar se tiene,

$$m^3 + m^2 + m + 1 = 0$$

Donde se obtienen como raíces:

$$m = -1, i, -i$$

Por lo tanto

$$m_1 = -1, m_2 = i, m_3 = -i$$

La solución homogénea es:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Para luego finalmente dar por concluido el ejercicio con la suma de la solución homogénea y particular, esto es,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x^2 - 2$$

6. Encuentre la solución general de $y^{iv} - 3y'' + 2y' = 6x(x + 3)$

Solución:

Para este tipo de ejercicios se debe plantear como solución particular:

$$y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Entonces al derivar la solución propuesta nos conduce a,

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y'' = 6Ax + 2B$$

$$y''' = 6A$$

$$y^{iv} = 0$$

Luego, al sustituir en la ecuación diferencial se tiene,

$$-18Ax - 6B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = 6x(x + 3)$$

Lo cual genera un sistema de ecuaciones tal que:

$$A = \frac{1}{3}$$

$$2C - 6B = 0$$

$$-18A + 4B = 18$$

Obteniéndose los siguientes valores de las constantes,

$$A = \frac{1}{3}$$

$$B = 4$$

$$C = 12$$

Así como solución particular la siguiente:

$$y = x \left(\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 \right)$$

La ED propuesta puede ser escrita de manera auxiliar como sigue:

$$m^4 - 3m^2 + 2m = 0$$

Donde se obtienen como raíces,

$$m = 0, 1, 1, -2$$

Por lo tanto

$$m_1 = -0, m_2 = -2, m_3 = m_4 = 1$$

La solución homogénea es:

$$y = C_1 + e^x(C_3 + c_4x) + C_2e^{-2x}$$

Por lo tanto, finalmente se da por concluido el ejercicio con la suma de la solución homogénea y particular, eso es,

$$y = C_1 + e^x(C_3 + c_4x) + C_2e^{-2x} + x\left(\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12\right)$$

7. Empleando Matlab, se pide determinar la función solución de la EDO siguiente:

$$y'' - 2y' - 3y = e^x - x, y'(0) = 1, y(0) = 1$$

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t
y1=dsolve('D2y-2*Dy-3*y=exp(t)-t','Dy(0)=1','y(0)=1');
y=simplify(y1);
pretty(y)
```

b. Guardar con el nombre ejer_3_4 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>> t 7 exp(-t) exp(3 t) 43 exp(t) 2
- + ----- + ----- - -----
3 8 72 4 9
```

lo que puede ser escrito como,

$$y = \frac{7}{8}e^{-x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{43}{72}e^{3x} + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$$

Ejercicios propuestos

A. Encuentre la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas.

1. $y'' - 4y' + 4y = 12x^2 - 40x + 42$ Sol. $y = 3x^2 - 4x + 5$

2. $y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}$ Sol. $y = x(2x - 3)e^{4x}$

3. $y'' + 4y = 16\text{sen}(2x) + 12\text{cos}(2x)$ Sol. $y = 3x\text{sen}(2x) - 4x\text{cos}(2x)$

4. $y'' + y' - 12y = 8e^x + 7e^{3x}$ Sol. $y = -\frac{2}{3}e^{-x} + xe^{3x}$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2(x + 1)^2$ Sol. $y = x^2 + 1$
6. $y''' - y' = x + 1$ Sol. $y = -\frac{x^2}{2} - x$
7. $y^{iv} + y'' = 48x^2 + 40$ Sol. $y = x^2(x^2 + 2)$
8. $y''' + 4y' = xe^{2x}$ Sol. $y = \frac{e^{2x}}{16}(x - 1)$
9. $y'' + 4y = 4\text{sen}(2x)$ Sol. $y = -x\text{cos}(2x)$
10. $y'' - 2y' = 12x + 10$ Sol. $y = -3x^2 + 2x$
11. $y'' - 4y' + 4y = -80\text{sen}(3x) - 23\text{cos}(3x)$ Sol. $y = 4\text{sen}(3x) - 5\text{cos}(3x)$
12. $y'' + y' - 2y = 2x$ Sol. $y = -x - \frac{1}{2}$
13. $y'' + y' + 4y = 2\text{sinh}(x)$ Sol. $y = \frac{e^x}{6} - \frac{e^{-x}}{4}$
14. $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$ Sol. $y = 5x^2 + 4x + 2$
15. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$ Sol. $y = xe^{-2x}(5x + 20)$
16. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$ Sol. $y = e^{3x}\left(\frac{x^2 - x}{5} + \frac{2}{5}\right)$
17. $y''' - y'' + y' - y = 4\text{sen}x$ Sol. $y = \frac{1}{2}(\text{cos}x - 3\text{sen}x)$
18. $y'' - y = 8e^{-2x} + x^3 - 2x$ Sol. $y = \frac{8}{3}e^{-2x} - x^3 - 4x$
19. $y'' - y' = e^x\text{sen}x$ Sol. $y = -\frac{e^x}{2}(\text{cos}(x) + \text{sen}(x))$
20. $y^v + 4y''' = e^x + 3\text{sen}(2x) + 1$ Sol. $y = \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x}{32}\text{sen}(2x)$

B. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones.

1. $y'' + y' - 2y = -6(\text{sen}2x + 3\text{cos}2x), y(0) = 2, y'(0) = 2$ Sol. $y = -e^{-2x} + 3\text{cos}2x$
2. $y'' + y = -60\text{sen}4x, y(0) = 8, y'(0) = 14$ Sol. $y = 8\text{cos}(x) - 2\text{sen}(x) + 4\text{sen}(4x)$

3.5.2. Método de variación de parámetros.

Este es un método más general que el de coeficientes indeterminados, recordando que este último presentaba una multitud de casos.

Supongamos que se tiene una ecuación diferencial homogénea.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Cuya solución es:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

Entonces sabemos que existen dos soluciones linealmente independientes, por lo que si el Wronskiano entre estas dos funciones sería diferente de 0. Tomando en cuenta esto

se propone que los valores constantes que acompañan a las soluciones sean ahora funciones en x .

$$y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

Además, se deja como condición que:

$$u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 = 0$$

Demostración:

Derivamos la solución obteniendo así

$$y' = u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 + u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2'$$

$$y' = u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2'$$

$$y'' = u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' + u_1(x)y_1'' + u_2(x)y_2''$$

Y se reemplaza en la ecuación diferencial

$$u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' + u_1(x)y_1'' + u_2(x)y_2'' + f(x)(u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2') + g(x)(u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2) = r(x)$$

Agrupamos a conveniencia

$$u_1'(x)y_1' + \frac{u_1(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1)}{\text{igual a } 0} + u_2'(x)y_2' + \frac{u_2(y_2'' + f(x)y_2' + g(x)y_2)}{\text{igual a } 0} = r(x)$$

$$u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' = r(x)$$

Por lo que se tiene un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas, o sea,

$$u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 = 0$$

$$u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' = r(x)$$

El determinante Δ_s del sistema es:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Tomando esto en cuenta y aplicando la Regla de Cramer, se tiene que:

$$u_1'(x) = -\frac{r(x)y_2}{W(y_1, y_2)}, u_2'(x) = \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)}$$

Por lo tanto

$$u_1(x) = -\int \frac{r(x)y_2}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2(x) = \int \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)}$$

Y de esa manera se puede encontrar la solución particular.

Ejercicios de aplicación

1. Encuentre la solución general para $x^2y'' - 3xy' + 4y = 7x^4$.

Solución:

Intentemos hallar la solución homogénea de la ED,

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Recurrimos a una ecuación auxiliar, donde aplicaremos el método de Cauchy – Euler.

$$m^2 + (-3 - 1)m + 4 = 0$$

Obteniéndose las raíces de la ecuación, $m_1 = 2, m_2 = 2$

Entonces la solución homogénea es:

$$y_h = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x)$$

Para encontrar la solución particular debemos obtener el Wronskiano, o sea,

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln(x) \\ 2x & x + 2x \ln(x) \end{vmatrix}$$

$$W = x^3 + 2x^3 \ln(x) - 2x^3 \ln(x) = x^3$$

Ahora, debemos reemplazar los valores en la expresión para obtener la solución particular,

$$u_1(x) = - \int \frac{r(x)y_2}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$u_1(x) = - \int \frac{7x^4 x^2}{x^3} dx,$$

$$u_1(x) = -\frac{7}{4} x^4$$

$$u_2(x) = \int \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$u_2(x) = \int \frac{7x^4 x^2}{x^3} \ln(x) dx$$

$$u_2(x) = \frac{7}{16} x^4 (4 \ln(x) + 1)$$

Por lo tanto, la solución particular quedará:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

$$y_p = \frac{7}{16} x^6 \ln(x) (4 \ln(x) + 1) - \frac{7}{4} x^6$$

Y la solución general, que es la suma de la solución particular y homogénea, corresponde a:

$$\text{Sol. } y = \frac{7}{16} x^6 \ln(x) (4 \ln(x) + 1) - \frac{7}{4} x^6 + C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x)$$

2. Encuentre la solución general para $x^2y'' - xy' - 20y = 9$

Solución:

Intentemos hallar la solución homogénea de la ED,

$$x^2y'' - y' - 20y = 0$$

Recurrirnos a la forma de ecuación auxiliar donde aplicaremos el método de Cauchy – Euler.

$$m^2 + (-0 - 1)m - 20 = 0$$

Obteniéndose las siguientes raíces de la ecuación,

$$m_1 = 5, m_2 = -4$$

Luego, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1x^5 + C_2x^{-4}$$

Para encontrar la solución particular debemos obtener el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^5 & x^{-4} \\ 5x^4 & -4x^{-5} \end{vmatrix}$$

$$W = -4 - 5 = -9$$

Ahora, debemos reemplazar los valores en la expresión para obtener la solución particular, o sea,

$$u_1(x) = - \int \frac{r(x)y_2}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$u_1(x) = - \int \frac{9x^5}{-9} dx,$$

$$u_1(x) = \frac{1}{6}x^6$$

$$u_2(x) = \int \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$u_2(x) = \int \frac{9x^{-4}}{-9} dx$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

Por lo tanto, la solución particular quedará:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

$$y_p = \frac{1}{6}x^{11} - \frac{1}{3}x^{-7}$$

Y la solución general, que es la suma de la solución particular y homogénea,

$$\text{Sol. } y = \frac{1}{6}x^{11} - \frac{1}{3}x^{-7} + C_1x^5 + C_2x^{-4}$$

3. Encuentre la solución general de $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$

Solución:

Intentemos hallar la solución homogénea de la ED,

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Recurrimos a la forma de la ecuación auxiliar, donde aplicaremos el método de coeficientes constantes, o sea,

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

Aplicando la fórmula general, se tiene,

$$m = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}{2}$$

$$m = \frac{(-2 \pm \sqrt{4 - 8})}{2}$$

$$m = \frac{(-2 \pm 2i)}{2}$$

Obteniéndose las raíces de la ecuación, o sea,

$$m_1 = -1 + i, m_2 = -1 - i$$

Luego, la solución homogénea es:

$$y_h = e^{-x}A \cos(x) + e^{-x}B \operatorname{sen}(x)$$

Para encontrar la solución particular recurrimos al desarrollo del Wronskiano, o sea,

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} \cos(x) & e^{-x} \operatorname{sen}(x) \\ -e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \operatorname{sen}(x) & -e^{-x} \operatorname{sen}(x) + e^{-x} \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$W = -e^{-2x} \operatorname{sen}(x) \cos(x) + e^{-2x} \cos^2(x) - e^{-2x} \operatorname{sen}(x) \cos(x) + e^{-2x} \operatorname{sen}^2(x) \\ = e^{-2x}$$

Ahora, debemos reemplazar los valores en la expresión para obtener la solución particular

$$u_1(x) = - \int \frac{r(x)y_2}{W(y_1, y_2)} dx,$$

$$u_1(x) = - \int \frac{e^{-x} * e^{-x} \cos(x)}{e^{-2x}} dx,$$

$$u_1(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$u_2(x) = \int \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx,$$

$$u_2(x) = \int \frac{e^{-x} * e^{-x} \operatorname{sen}(x)}{e^{-2x}} dx$$

$$u_2(x) = -\cos(x)$$

Por lo tanto, la solución particular quedará:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

$$y_p = -e^{-x} \cos(x) \operatorname{sen}(x) - e^{-x} \operatorname{sen}(x) \cos(x)$$

Y la solución general, que es la suma de la solución particular y homogénea, corresponde a,

$$\text{Sol. } y = -2e^{-x} \operatorname{sen}(x) \cos(x) + e^{-x}A \cos(x) + e^{-x}B \operatorname{sen}(x)$$

4. Encuentre la solución general de $y'' - 4y = 8$

Solución:

Intentemos hallar la solución homogénea de la ED,

$$y'' - 4y = 0$$

Recurrimos a la forma de la ecuación auxiliar, donde aplicaremos el método de coeficientes constantes, o sea,

$$m^2 - 4 = 0$$

Obteniéndose las raíces de la ecuación,

$$m_1 = 2, m_2 = -2$$

Luego, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Para encontrar la solución particular debemos obtener el Wronskiano, o sea,

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$W = -2 - 2 = -4$$

Ahora, debemos reemplazar los valores en la expresión para obtener la solución particular

$$u_1(x) = - \int \frac{r(x)y_2}{W(y_1, y_2)} dx,$$

$$u_1(x) = - \int \frac{8 * e^{2x}}{-4} dx,$$

$$u_1(x) = e^{2x}$$

$$u_2(x) = \int \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx,$$

$$u_2(x) = \int \frac{8 * e^{-2x}}{-4} dx$$

$$u_2(x) = e^{-2x}$$

Por lo tanto, la solución particular quedará:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

$$y_p = e^{4x} + e^{-4x}$$

Y la solución general, que es la suma de la solución particular y homogénea, corresponde a,

$$\text{Sol. } y = e^{4x} + e^{-4x} + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

5. Encuentre la solución general para $y'' + 4y = 4\cos(2x)$, además utilice las siguientes condiciones iniciales para hallar los valores constantes: $y(0) = 1, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Solución:

Intentemos hallar la solución homogénea de la ED,

$$y'' + 4y = 0$$

Recurrimos a una ecuación auxiliar, donde aplicaremos el método de coeficientes constantes, o sea,

$$m^2 + 4 = 0$$

Obteniéndose las raíces de la ecuación que siguen:

$$m_1 = 2i, m_2 = -2i$$

Entonces la solución homogénea es:

$$y_h = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

Para encontrar la solución particular debemos obtener el Wronskiano, o sea,

$$W = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix}$$

$$W = 2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) = 2$$

Ahora, debemos reemplazar los valores en la expresión para obtener la solución particular, o sea,

$$u_1(x) = -\int \frac{r(x)y_2}{2},$$

$$u_1(x) = -\int \frac{4\cos(2x) * \cos(2x)}{2} dx,$$

$$u_1(x) = -x - \frac{1}{4}\sin(4x)$$

$$u_2(x) = \int \frac{r(x)y_1}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2(x) = \int \frac{4\cos(2x) * \sin(2x)}{2} dx$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x)$$

Por lo tanto, la solución particular quedará:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

$$y_p = \cos(2x) \left(-x - \frac{1}{4}\text{sen}(4x) \right) - \frac{1}{4}\cos(4x)\text{sen}(2x)$$

Y la solución general, que es la suma de la solución particular y homogénea, corresponde a,

$$y = \cos(2x) \left(-x - \frac{1}{4}\text{sen}(4x) \right) - \frac{1}{4}\cos(4x)\text{sen}(2x) + A\cos(2x) + B\text{sen}(2x)$$

Ahora evaluemos las condiciones iniciales,

$$y(0) = 1$$

$$1 = \cos(0) \left(-0 - \frac{1}{4}\text{sen}(0) \right) - \frac{1}{4}\cos(0)\text{sen}(0) + A\cos(0) + B\text{sen}(0)$$

$$1 = A$$

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$y' = 2x\text{sen}(2x) - \cos(2x) + \frac{3}{2}\cos(6x) - 2\text{sen}(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$0 = \pi\text{sen}(\pi) - \cos(\pi) + \frac{3}{2}\cos(6\pi) - 2\text{sen}(2\pi) + 2B\cos(2\pi)$$

$$0 = -1 + \frac{3}{2} + 2B$$

$$-\frac{1}{4} = B$$

Por lo tanto, la respuesta final es:

$$\text{Sol. } y = \cos(2x) \left(-x - \frac{1}{4}\text{sen}(4x) \right) - \frac{1}{4}\cos(4x)\text{sen}(2x) + \cos(2x) - \frac{1}{4}\text{sen}(2x)$$

6. Empleando Matlab, se pide determinar la función solución de la EDO siguiente:

$$y'' - 2y' - 3y = e^x - x, y'(0) = 1, y(0) = 1$$

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
```

```
clear all
```

syms t

y1=dsolve('D2y-3*Dy+2*y=exp(3*t)/(1+exp(t))');

y=simplify(y1);

pretty(y)

b. Guardar con el nombre ejer_3_5 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>> exp(t)(C4+log(exp(t)+1)-exp(t)+C3exp(t)
+ exp(t)log(exp(t)+1))
```

lo que puede ser escrito como,

$$y = e^x(1 + e^x)(\ln(1 + e^x) - 1) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Ejercicios propuestos

A. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$ Sol. $y = \frac{1}{12x} + C_1 x^2 + C_2 x^3$

2. $y'' + y = \sec^2(x)$ Sol. $y = \operatorname{sen}(x) \ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x)) - 1 + C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$

3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$ Sol. $y = e^x(1 + e^x)(\ln(1 + e^x) - 1) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

4. $x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln(x))$ Sol. $y = \operatorname{sen}(\ln(x))(\ln(x) + C_1) + \cos(\ln(x))(\ln(\cos(\ln(x))) + C_2)$

5. $y''' - 3y'' + 2y' = 12e^{2x} + 24x^2$ Sol. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^x - 9e^{2x} + 4x^3 - 6xe^{2x} + 30x^2 + 54x + 51$

6. $y'' + 16y = 17e^{4x} - 8\operatorname{sen}(4x)$ Sol. $y = A\cos(4x) + B\operatorname{sen}(4x) + x\cos(4x) + e^x$

7. $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + x$ Sol. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x + 3x^2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x$

8. $x^4 y^{iv} + 5x^3 y''' + 7x^2 y'' + 8xy' = \ln(x) - \ln(x)^2$ Sol. $y = C_1 + \frac{C_2}{x} + x(C_3 \cos(2 \ln(x)) + C_4 \operatorname{sen}(2 \ln(x))) - \frac{1}{15} \ln(x)^3 + \frac{11}{50} \ln(x)^2 - \frac{43}{125} \ln(x)$

B. Utilice las condiciones iniciales para obtener la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $x^2 y'' - xy' = 6x^3 \operatorname{sen}(x)$ $y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = \pi$

Sol. $y = 6 + x^2 - 6x \operatorname{sen}(x) - 6 \cos(x)$

2. $y'' - 4y = 4x^2 e^{2x}$ $y(0) = 0, y'(0) = 0$

$$\text{Sol. } y = \frac{1}{32}e^{-2x} + e^{2x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \right)$$

3.6. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

A. Osciladores

El **movimiento armónico simple** se rige por la siguiente ecuación:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Despejando la segunda derivada se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Consideramos $\frac{k}{m} = a^2$, para evitar complejidades, la solución de la ecuación se

plantea como sigue:

$$x = C_1 \cos(at) + C_2 \text{sen}(at)$$

Tomando está como la representación de la posición con respecto al tiempo podemos también considerar que:

$$\text{La amplitud está dada por } x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\text{El periodo } T = \frac{2\pi}{a} \text{ [s]}$$

$$\text{La frecuencia } f = \frac{a}{2\pi} \left[\frac{1}{\text{seg}} \right]$$

Caso 1. Movimiento amortiguado (oscilación libre). Tiene como ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

O bien expresado de otro modo puede ser:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = 0$$

Ahora debemos tomar las siguientes consideraciones

$$\text{Considerando, } 2n = \frac{b}{m}, \text{ y } a^2 = \frac{k}{m}.$$

Y reemplazando esto en la ecuación diferencial, se tiene,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + a^2x = 0$$

Lo cual, expresándolo como una ecuación auxiliar, nos conduce a:

$$m^2 + 2nm + a^2 = 0$$

De donde surgirán 2 raíces, que como bien hemos visto anteriormente representarán distintos casos.

$$m = -n \pm \sqrt{n^2 - a^2}$$

1. Si el discriminante es positivo entonces la solución será de la forma $x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$. a este caso también se lo conoce como sobre amortiguado.
2. Si el discriminante es igual a 0 entonces la raíz tendrá multiplicidad 2 y por lo tanto la solución será $x = C_1 e^{mt} + C_2 t e^{mt}$, a este caso también se lo conoce como críticamente amortiguado.
3. Si el discriminante es negativo entonces la solución será de la forma $x = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$. A este caso también se lo conoce como subamortiguado.

Caso 2. Oscilaciones forzadas

Parecido al movimiento amortiguado con el único cambio es que el sistema se ve intervenido por acción de una fuerza que está en función del tiempo, la cual se introduce dentro de la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = F(t)$$

Parece algo preocupante la situación en la que nos encontramos, pero no lo es; si prestamos atención es una ecuación no homogénea de segundo orden, quiere decir que tenemos que encontrar la solución particular y homogénea, pero para ello ya hemos estado aprendiendo los procesos para lograrlo.

Ejemplo:

1. A un resorte se le cuelga una masa de 2 kg, a este mismo se vio que se pudo estirar 40 cm al aplicarle 4 N de fuerza. Si se deja solo al sistema analizar:
 - a) El movimiento en caso de que no haya rozamiento con el aire.
 - b) En caso de que exista, y este sea $2\sqrt{5} \frac{dx}{dt}$.
 - c) Si ahora el rozamiento disminuye a $2 \frac{dx}{dt}$, y aparte del rozamiento exista una fuerza de $F(t) = 40 \sin(2t)$.

Tomando en cuenta el primer caso nuestra ecuación diferencial sería:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Conocemos que el valor de k está dado por la fuerza que genera el pequeño estiramiento del resorte, entonces, $k = \frac{F}{x} = 10$, obteniéndose,

$$x'' + 5x = 0$$

De solución, $x = C_1 \cos(\sqrt{5}t) + C_2 \text{sen}(\sqrt{5}t)$

Para el literal b tenemos que tomar en cuenta que existe una resistencia, por lo que la ecuación quedará:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - 2\sqrt{5} \frac{dx}{dt}$$

$$x'' + 2\sqrt{5}x' + 5x = 0$$

Lo llevamos a nuestra ecuación auxiliar

$$m^2 + 2nm + a^2 = 0$$

Por lo cual se obtiene,

$$2n = 2\sqrt{5}$$

$$n = \sqrt{5}$$

Aplicando la fórmula

$$m = -n \pm \sqrt{n^2 - a^2}$$

$$m = -5 \pm \sqrt{5 - 5}$$

$$m = -5$$

$$x = e^{-5t}(C_1 + C_2t)$$

Finalmente, para el último literal se explica que existe una fuerza en función del tiempo.

$$x'' + 2x' + 5x = 40\text{sen}(2t)$$

Aplicamos el mismo proceso anteriormente descrito, o sea,

$$m = -n \pm \sqrt{n^2 - a^2}$$

$$m = -1 \pm \sqrt{-4}$$

Por lo tanto, la solución homogénea será:

$$y_h = e^{-t}(A\cos(2t) + B\text{sen}(2t))$$

Ya tenemos la solución homogénea de la ecuación, solo nos queda la particular, por ello aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados, o sea.

$$x = A\cos(2t) + B\text{sen}(2t)$$

$$x' = -2A\text{sen}(2t) + 2B\cos(2t)$$

$$x'' = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$\begin{aligned} -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) + A\cos(2t) + B\sin(2t) \\ = 40\sin(2t) \end{aligned}$$

Generándose así un sistema de ecuaciones tal que:

$$4B - 3A = 0$$

$$-4A - 3B = 40$$

Quedando como solución al sistema planteado los siguientes valores de las constantes,

$$A = -\frac{32}{5}, B = -\frac{24}{5}$$

Luego, la solución particular corresponde a,

$$y_p = -\frac{32}{5}\cos(2t) - \frac{24}{5}\sin(2t)$$

Y finalmente como solución general:

$$\text{Sol. } y = e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)) - \frac{32}{5}\cos(2t) - \frac{24}{5}\sin(2t)$$

Otro ejemplo de aplicación del sistema masa-resorte corresponde al de un cuerpo que se introduce en un fluido y que debido a la frecuencia natural genera un movimiento oscilatorio.

2. Un flotador cilíndrico de radio r , altura h y densidad ρ_{flot} se encuentra flotando en la superficie de una piscina, como se muestra en la figura. Inicialmente el flotador se encuentra en equilibrio luego se sumerge una distancia x_0 y se libera con velocidad igual a cero. Si el flotador dimensiones $h = 1 [m]$, $r = 0,5 [m]$, $\rho_{flot} = 500 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$. Se pide determinar lo siguiente:

- La ecuación diferencial que modela el sistema y su solución.
- La posición y la velocidad del flotador en cualquier instante si se sumerge una profundidad de $x_0 = 0,1m$ con una velocidad de $v = \sqrt{20} \left[\frac{m}{s}\right]$. A partir de la posición de equilibrio. (Considere $g = 10 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ y $\rho_{agua} = 1000 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$)

Solución:

El principio de flotación de Arquímedes nos dice:

$$w = mg = \rho Vg = \pi r^2 h \rho g$$

Pero consideremos que el objeto no está sumergido completamente, que está sumergido solo una altura H , debido a que existe una fuerza que se opone a ese movimiento y está es la fuerza de flotación:

$$F_{flot} = m_{agua}g = \rho_{agua}\pi r^2 Hg$$

Igualando el peso con la fuerza de flotación se tiene

$$\rho_{agua}\pi r^2 Hg = \rho_{flot}\pi r^2 hg$$

Despejamos H

$$H = h \frac{\rho_{flot}}{\rho_{agua}}$$

Pero qué pasaría si a esa distancia H le aplicamos una fuerza para que aumente o disminuya, lo que llega a pasar es que la fuerza de flotación y el peso ya no son iguales, y en cualquier momento la posición de equilibrio del cuerpo se encuentra a una distancia x , vamos a suponer que esta distancia x es negativa.

$$F = F_{flot} - m_{flot}g$$

$$\rho_{agua}\pi r^2(H - x)g - \rho_{flot}\pi r^2hg = -\rho_{agua}\pi r^2xg$$

Entonces por la segunda Ley de Newton tenemos

$$m_{flot} \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_{agua}\pi r^2xg$$

$$\rho_{flot}\pi r^2h \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_{agua}\pi r^2xg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\rho_{agua}g}{\rho_{flot}h} \right) x = 0$$

Donde se tiene que la frecuencia natural está dada por,

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{agua}g}{\rho_{flot}h}}$$

Y como bien sabemos la solución para este tipo de ejercicios es:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \text{sen}(\omega t)$$

$$v(t) = C_2 \omega \cos(\omega t) + C_1 \omega \text{sen}(\omega t)$$

Ya reemplazando los datos para hallar la frecuencia natural se tiene lo siguiente:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{agua}g}{\rho_{flot}h}}$$

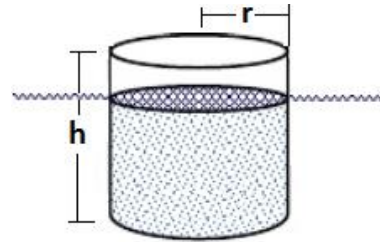


Figura 3.1

$$\omega = \sqrt{\frac{1000 * 10}{500 * 1}}$$

$$\omega = \sqrt{20}$$

Por lo que las ecuaciones quedarían así:

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{20} t) + C_2 \text{sen}(\sqrt{20} t)$$

$$v(t) = C_2 \sqrt{20} \cos(\sqrt{20} t) + C_1 \sqrt{20} \text{sen}(\sqrt{20} t)$$

Aplicando las condiciones iniciales y despejando se obtiene el valor de las constantes, quedando las ecuaciones solicitadas de la siguiente manera:

$$x(t) = 0,1 \cos(\sqrt{20} t) + \text{sen}(\sqrt{20} t)$$

$$v(t) = \sqrt{20} \cos(\sqrt{20} t) + 0,1\sqrt{20} \text{sen}(\sqrt{20} t)$$

B. Caída libre y leyes de movimiento

Cuando se deja caer un objeto desde una cierta altura sobre el interactúan dos fuerzas, primero el rozamiento con el aire, y, segundo la fuerza de la gravedad. Por la segunda Ley de Newton tenemos:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

La fuerza debida a la resistencia del aire es $-kv$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Por lo tanto, la fuerza estaría dada por $F = mg - kv$, tomando como positivo hacia abajo.

Dando, así como resultado que la ecuación diferencial inicial cambie a la siguiente expresión:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

Ejemplo:

Un paracaidista se deja caer de un avión, y tarda un tiempo de 5 segundos en abrir su paracaídas, considere que en ese tiempo no hay rozamiento con el aire. Si después de abrir el paracaídas se gana una fuerza de resistencia al aire de 5000 Newton. Que tiempo tiene que pasar para que el paracaidista llegue a tierra, si el avión se encontraba a 1 km de elevación, (considere la masa del paracaidista con un valor de 100 kg).

Solución:

Considerando que durante los primeros 5 segundos no hay fuerza de rozamiento, la ecuación diferencial debería de quedar así: $\frac{dv}{dt} = g$. Por lo que esto se podría resolver simplemente integrando la función a cada lado, o sea, $v = gt + C$

Considerando que el paracaidista se deja caer del avión en un tiempo, $t=0$, y tomando como referencia la posición del avión entonces nuestra constante C , es igual a 0.

Y por lo tanto la velocidad que alcanza nuestro paracaidista antes de abrir su paracaídas es de 50 metros por segundo, o sea,

$$v(5) = 50 \frac{m}{s}$$

Ahora consideremos cuanto recorrió el paracaidista en ese tiempo:

$$\frac{dv}{dt} = g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

Por lo que surge la ecuación siguiente:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + Ct + D$$

Considerando a C y a D como constantes de integración, las cuales son iguales a 0 si se evalúa su posición inicial, por lo que, por el momento la ecuación queda así:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}$$

$$x(5) = 125 \text{ m}$$

Estos nuevos puntos serán ahora las condiciones iniciales.

Ahora tenemos que considerar que $kv = 5000 \text{ N}$, por lo que $k = 100$ ya que la velocidad en este punto es de 50 metros por segundo.

$$\frac{dv}{dt} + 1v = g$$

Cuya solución es:

$$v(t) = C_1 e^{-t} + 10$$

Recordemos que, ahora nuestras condiciones iniciales han cambiado, o sea,

$$v(0) = C_1 e^{-0} + 10 = 50$$

$$C_1 = 40$$

$$v(t) = 40e^{-t} + 10$$

Y para la posición en particular, tenemos que considerar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = g$$

$$x'' + x' = 10$$

Que recordando los métodos de resolución nos queda:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 + 10t$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 125$$

$$C_2 = 85$$

Entonces la ecuación toma la forma:

$$x(t) = 40e^{-t} + 85 + 10t$$

Para encontrar un valor preciso para el tiempo en estas situaciones es muy complicado por el valor de Euler, por ello vamos a ir evaluando hasta que ese valor de Euler no aporte mucho al resultado final.

$$x(5) = 40e^{-5} + 85 + 50$$

$$x(5) = 0,26 + 135$$

A partir de un valor, $t=5$, la función de Euler no aporta mucho al resultado final por lo que lo eliminaremos de la ecuación, ahora tomando solo los valores que quedan tenemos

$$x(t) = 85 + 10t, t > 5$$

Pero eso si, ya llevamos 135,26 metros de los 875 que nos faltaban por lo que la ecuación para hallar el tiempo será:

$$739,74 = 85 + 10t$$

$$t \approx 65,5 \text{ s}$$

A los cuales tenemos que adicionar los instantes en los que no se utiliza el paracaídas y el tiempo que utilizamos para eliminar el valor de Euler, obteniéndose el siguiente resultado final, $t \approx 75,5 \text{ s}$.

C. Vigas horizontales

Se plantea hallar la flexión de una viga rectangular sometida a una carga o a su propio peso. Se debe considerar que inicialmente la viga es recta y su eje central coincide con el eje x. De física nosotros sabemos que el momento M en el punto P es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre el segmento de la curva. Luego, el momento está dado por:

$$M = EIy''$$

Donde I es el momento de inercia de la viga, y E es el módulo de elasticidad de la viga.

Ejemplo:

1. Una viga de 10 metros de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 400 kg por metro de longitud y una carga en el centro de 4000 kg, ¿cuál es la curva elástica de la viga?

Consideremos las fuerzas que intervienen en este proceso:

Tenemos un peso que se encuentra en el centro de la viga, además del propio peso de la viga.

$$\frac{1}{2}(4000 + (10)(400)) = 4000$$

También tenemos un peso concentrado en la cuarta parte de la viga de $400x$ dirigida hacia abajo, por lo tanto, el momento flector es:

$$M = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

$$M = 4000x - 400x^2$$

Igualando a la ecuación diferencial:

$$EIy'' = 4000x - 400x^2$$

Integrando directamente se tiene

$$EIy = \frac{2000}{3}x^3 - \frac{100}{3}x^4 + C_1x + C_2$$

Se toman dos puntos de la viga el primero es en el origen.

Donde $y(0) = 0$, por lo que $C_2 = 0$

Y el otro es $y(10) = 0$, por lo que $C_1 = -\frac{100000}{3}$

Quedando finalmente la solución como sigue:

$$EIy = \frac{2000}{3}x^3 - \frac{100}{3}x^4 - \frac{100000}{3}x$$

d. Péndulo simple

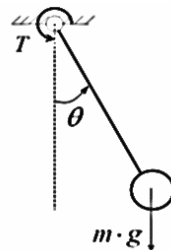


Figura 3.2

Consiste en una masa atada a una cuerda o hilo elástico de un cierto largo l y una masa despreciable. Se supone que la cuerda está siempre tensa, que las oscilaciones se suceden en un plano vertical y que las únicas fuerzas que actúan son el peso de la partícula y la tensión de la cuerda.

Como primer punto se tiene que, $s = l\theta$

Teniendo a s como longitud de arco y a θ como el ángulo.

Por lo que también se la puede escribir como

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Descomponiendo el peso en dos componentes una tangencial y otra perpendicular.

Vemos que la magnitud de la componente tangencial está dada por $mg\text{sen}(\theta)$.

Luego por la segunda ley de Newton se sigue que:

$$ma = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\text{sen}(\theta)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen}(\theta) = 0$$

Si consideramos que los ángulos son muy pequeños podemos proponer que $\text{sen}(\theta) \approx \theta$.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Donde la solución general es:

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Ejemplos:

1. Se ata a una cuerda una masa de 200 gramos, si la longitud de la cuerda es de 10 metros. Considere las siguientes condiciones iniciales: $\theta(0) = 0, \theta'(0) = 20^0$

Solución:

Consideramos el valor de la gravedad como 10 metros sobre segundos cuadrados.

La ecuación diferencial puede ser escrita como sigue:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0$$

Por consiguiente, la solución será:

$$\theta(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \text{sen}(t)$$

Y evaluando las condiciones iniciales

$$\theta(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \text{sen}(0) = 0$$

Por lo tanto C_1 es igual a 0.

Tomando en cuenta esto:

$$\theta'(0) = C_2 \cos(t) = 20^0$$

$$C_2 = 20^0$$

Luego la solución deseada corresponde a:

Sol. $\theta(t) = 20^0 \text{sen}(t)$

e. Circuito LRC en serie

Utilizaremos nuestros conocimientos para modelar las ecuaciones de la carga y la corriente en función del tiempo. Hemos visto algo parecido en las aplicaciones de ecuaciones de primer orden, por lo que ya conocemos la simbología que usaremos a continuación.

Por la segunda ley de Kirchhoff se tiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Además, se sabe que

$$\frac{dq}{dt} = i, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}$$

Entonces si derivamos con respecto a t la ecuación diferencial se tiene

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Hemos llegado a una ecuación diferencial no homogénea la cual si podemos resolver por métodos vistos anteriormente.

A manera de ilustrar lo anteriormente expuesto a continuación se desarrollan los siguientes ejemplos.

Ejemplo:

Se tiene un circuito RLC, que consta con un inductor de 0,5 Henrios, una resistencia de 60 ohmios y una capacitancia de 0,001 Faradios, además se sabe que la fuerza electromotriz es de $10 \cos(20t)$. Al inicio no hay ni corriente ni carga en el sistema. Determine las ecuaciones de la carga y la corriente en cualquier instante.

Solución:

Reemplazando en la ecuación de Kirchhoff:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2q}{dt^2} + 60 \frac{dq}{dt} + 1000q = 10 \cos(20t)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 120 \frac{dq}{dt} + 2000q = 20 \cos(20t)$$

Primero hallemos la solución homogénea de la ecuación

$$m^2 + 120m + 2000 = 0$$

Que nos da como solución

$$y_h = C_1 e^{100t} + C_2 e^{20t}$$

Utilizaremos el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución particular.

$$q = A \cos(20t) + B \sin(20t)$$

$$q' = -20A \sin(20t) + 20B \cos(20t)$$

$$q'' = -400A \cos(20t) - 400B \sin(20t)$$

Reemplazamos en la ecuación

$$\begin{aligned} -400A \cos(20t) - 400B \sin(20t) - 2400A \sin(20t) + 2400B \cos(20t) \\ + 2000A \cos(20t) + 2000B \sin(20t) = 20 \cos(20t) \end{aligned}$$

Donde surge el siguiente sistema de ecuaciones

$$1600A + 2400B = 20$$

$$-2400A + 1600B = 0$$

Entonces los valores son:

$$B = \frac{3}{520}$$

$$A = \frac{2}{520}$$

Por lo que la solución particular es,

$$y_p = \frac{2}{520} \cos(20t) + \frac{3}{520} \sin(20t)$$

Y finalmente la solución general es:

$$y = \frac{2}{520} \cos(20t) + \frac{3}{520} \sin(20t) + C_1 e^{100t} + C_2 e^{20t}$$

Para hallar el valor de las constantes debemos tomar las condiciones iniciales del ejercicio, o sea,

$$q(0) = \frac{2}{520} + C_1 + C_2 = 0$$

$$q'(0) = \frac{60}{520} + 100C_1 + 20C_2 = 0$$

Generándose así otro sistema de ecuaciones cuya solución es,

$$C_1 = \frac{1}{2080}$$

$$C_2 = -\frac{9}{2080}$$

Y por tanto, el resultado corresponde a,

$$\text{Sol. } y = \frac{2}{520} \cos(20t) + \frac{3}{520} \text{sen}(20t) + \frac{1}{2080} e^{100t} - \frac{9}{2080} e^{20t}$$

- f. A manera de ejemplo se pide resolver un circuito RLC en serie donde $a = LC$, $b = RC$, $c = 1$, escogiéndose de manera normalizada los siguientes valores: $a = 2$, $b = 4$, $\omega = 1$, y las condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

- a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
tini=0;
tfin=16*pi;
t=linspace(tini,tfin,2000);
a=2;
b=4;
c=1;
w=1;
N=length(t);
y=zeros(1,N);
dt=(tfin-tini)/(N-1);
u=sin(w*t);
y(1)=0;
D(1)=0;
D2(1)=(1/a)*(-b*D(1)-c*y(1)+u(1));
for k=2:N
y(k)=((4*a/dt^2+2*b/dt+c)^(-1))*...
(y(k-1)*(4*a/dt^2+2*b/dt)+D(k-1)*(4*a/dt+b)+...
+a*D2(k-1)+u(k));
D(k)=(2/dt)*(y(k)-y(k-1))-D(k-1);
D2(k)=(4/dt^2)*(y(k)-y(k-1))-(4/dt)*D(k-1)-D2(k-1);
```

end

plot(t,y,t,u,'--')

b. Guardar con el nombre ejer_3_6 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida el siguiente gráfico:

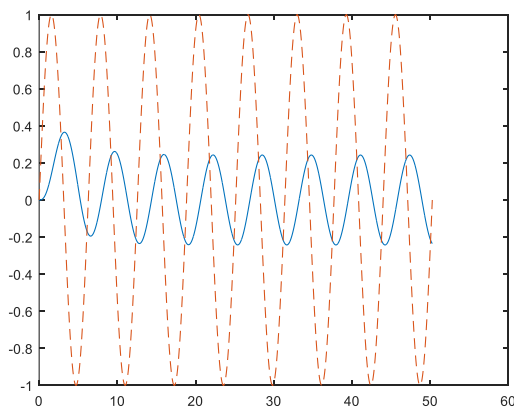


Figura 3.3

Ejercicios propuestos

1. Una viga de 12 metros de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 3 kg por metro de longitud. ¿Cuál es la curva elástica de la viga?

$$\text{Sol. } y = \frac{x^2}{8EI} (-144 + 24x - x^2)$$

2. Se ata a una cuerda una masa de 500 gramos, si la longitud de la cuerda es de 0,2 metro, y además se sabe que se suelta con una velocidad de 0,5 radianes por segundo, con un ángulo de 0,1 radian desde el eje vertical. Encuentre la ecuación de movimiento.

$$\text{Sol. } \theta = \frac{1}{10} \cos(7t) + \frac{1}{14} \text{sen}(7t)$$

3. Se tiene un circuito LRC, que consta con un inductor de 0,5 henrio, una resistencia de 20 ohmio y una capacitancia de 0,0025 faradio, además se sabe que la fuerza electromotriz es de 100 Voltio. Al inicio no hay ni corriente ni carga en el sistema.

Determine las ecuaciones de la carga y la corriente en cualquier instante.

$$\text{Sol. } \begin{cases} q = 0.25(e^{-20t}(-\cos(20t) - \text{sen}(20t) + 1)) \\ I = 10e^{-20t}\text{sen}(20t) \end{cases}$$

4. Un objeto tiene una masa de 0,2 kg se estira 6 cm, en un tiempo $t=0$. Desde un punto situado a 8 cm bajo la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de $\frac{4}{3} \left[\frac{m}{s} \right]$.

Encuentre la ecuación de movimiento.

$$\text{Sol. } x(t) = \frac{2}{3} \cos(8t) - \frac{1}{6} \text{sen}(8t)$$

5. Se tiene un circuito RLC, que consta con un inductor de 0,1 henrio, una resistencia de 2 ohmio y una capacitancia de 0,003846 faradio, además se sabe que la fuerza electromotriz es de $fem = 100 \text{ sen}(60t)$. Al inicio no hay ni corriente ni carga en el sistema.

$$\text{Sol. } q(t) = e^{-10t} \left(\frac{30}{61} \text{sen}(50t) + \frac{36}{61} \text{cos}(50t) \right) - \frac{25}{61} \text{sen}(50t) - \frac{30}{61} \text{cos}(50t)$$

6. Un objeto tiene un peso de 8 Newton que alarga un resorte 2 metros. Suponga que la fuerza de amortiguamiento es igual a dos veces la velocidad instantánea del sistema.

Determine la ecuación de movimiento.

$$\text{Sol. } x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$$

CAPÍTULO IV

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

MOTIVACIÓN

En esta sección se estudian los métodos básicos sobre resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de primer orden, tanto en el caso homogéneo como en el no homogéneo. Métodos de resolución que nos permiten ampliar la solución de problemas prácticos sobre física, química, biología y otras aplicaciones de diferentes áreas del conocimiento.

El **objetivo general** del presente capítulo es familiarizarse con las técnicas desarrolladas para resolver sistemas lineales de primer orden, determinando la solución general y la solución particular de la misma.

PRERREQUISITOS PARA ABORDAR ESTE TEMA

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Identificar las características de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Conocer métodos elementales para el tratamiento de sistemas lineales con coeficientes constantes homogéneos y no homogéneas
- Traducir al lenguaje simbólico problemas verbales relacionados con la Física, y otras aplicaciones cuyo modelo matemático corresponde a sistemas lineales de primer orden.

4.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

4.1.1. Operadores y eliminación de incógnitas

Como se mencionó en el tema de las EDOs lineales de orden n , un operador es básicamente un objeto (o mecanismo) que recibe una función (input) y devuelve otra función (output). Básicamente, lo anterior significa que para definir un operador hay que especificar la acción del operador sobre las funciones en la que actúa, es decir, especificar como transforma el input en el output.

Por ejemplo, el operador más sencillo es el de diferenciación D . Si alguien no supiera que significa el operador D lo que habría que decir es que D toma una función $x(t)$ y

produce su derivada $\frac{dx}{dt}$, es decir, $Dx \equiv \frac{dx}{dt}$

Lo anterior significa además que D no está definida sobre todas las funciones posibles, sino que simplemente aquellas que tengan por lo menos una derivada.

La clase de operadores que se van a estudiar en este tema es sobre la del álgebra polinomial generada por D , es decir, si $p(t)$ es un polinomio

$$p(t) \equiv a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

Entonces se define el polinomio $p(D)$ como

$$p(D) \equiv a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I$$

Donde I es el operador identidad

$$Ix(t) = x(t)$$

Y si $x(t)$ es una función con al menos n derivadas

$$\begin{aligned} p(D)x &\equiv (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I)x \\ &= a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \end{aligned}$$

Es usual no escribir explícitamente el operador identidad por lo que $p(D)$ se ve como

$$p(D) \equiv a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

Ejercicios de aplicación.

1. Encuentre el polinomio $p(D)$ asociado a la EDO, $x'' - x' + 5x = 0$ además calcule $p(D)x(t)$ donde $x(t) = \sin(t)$

Básicamente el polinomio de la ecuación $x'' - x' + 5x = 0$ es el polinomio de la ecuación característica, $p(m) = m^2 - m + 5$

$$\text{Luego, } p(D) = D^2 - D + 5$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} p(D)x &= \frac{d^2}{dt^2}(\sin(t)) - \frac{d}{dt}(\sin(t)) + 5 \sin(t) \\ &= -\sin(t) - \cos(t) + 5 \sin(t) = 4 \sin(t) - \cos(t) \end{aligned}$$

2. A partir de $p(D)x = 4 \sin(t) - \cos(t)$, hallar $(D^2 - D + 5)(e^t + \cos(t))$

Aplicando la propiedad de linealidad, al multiplicar se tiene que:

$$(D^2 - D + 5)e^t + (D^2 - D + 5)\cos(t)$$

Reemplazando $p(D)$ por $p(D)x$ se tiene:

$$\begin{aligned} (4 \sin(t) - \cos(t))e^t + (4 \sin(t) - \cos(t))\cos(t) \\ 4 \sin(t) e^t - \cos(t) e^t + 4 \sin(t) \cos(t) - \cos^2(t) \end{aligned}$$

3. Sabiendo que $p(D) = D$ y $q(D) = D + 10$, y, además, $x(t) = 2e^t$, se pide hallar $p(D)q(D)x(t)$

En primer lugar, debemos de encontrar las funciones $p(D)x$ y $q(D)x$

Por lo que se tiene: $p(D)x = 2e^t$ y $q(D)x = 2e^t + 20e^t$

Evaluando se tendría: $2e^t(2e^t + 20e^t)2e^t$, para finalmente tener que,

$$p(D)q(D)x(t) = 88e^{3t}$$

En conclusión, al realizar una multiplicación de polinomios debe de respetarse las propiedades de linealidad como en el caso anterior, de hecho, saber factorizar todo tipo de polinomios será de suma importancia de aquí en adelante como en el siguiente caso:

Ejemplo. Para el polinomio $p(t) = t^2 + 3t + 2$, se prosigue de la siguiente manera,

Se factoriza el polinomio: $(t + 2)(t + 1) = 0$

De manera similar el polinomio $p(D)$ sería: $(D + 2)(D + 1) = 0$

Así mismo se obtienen las raíces del polinomio que son: $t_1 = -2$ y $t_2 = -1$

Entonces si se nos pidiera resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x'' + 3x' + 2 = 4t^2$$

Se procede a encontrar la solución homogénea, la cual para el caso en referencia es:

$$x_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$$

Empleando las raíces de $p(t)$, se trata de hallar toda la solución, a través del método de coeficientes indeterminados. Sin embargo, en esta parte se aborda como método de solución, el método del operador anulador.

Para empezar, se empieza reescribiendo la ecuación diferencial como:

$$(D + 2)(D + 1)x = 4t^2$$

Luego se busca un polinomio anulador que en este caso sería un polinomio que pueda anular el factor $4t^2$; lo más notable es utilizar D^3 ya que esto consideraría derivar 3 veces el polinomio, explicado de otra manera: $D^3 4t^2 = 0$

Entonces se debe de multiplicar a ambos lados de la ecuación obteniéndose:

$$D^3(D + 2)(D + 1)x = D^3 4t^2$$

Por lo que al escribirlo en su forma de derivadas se tendría:

$$\frac{d^5x}{dt^5} + 3\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^3x}{dt^3} = 0$$

Usando a la ecuación auxiliar

$$m^5 + 3m^4 + 2m^3 = m^3(m + 2)(m + 1) = 0$$

Por ello se puede decir que la solución particular es por el momento:

$$x_p(t) = C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3e^{-2t} + C_4e^{-t}$$

Sin embargo, se necesita encontrar los coeficientes de la solución particular por ello se introduce la solución particular en la ecuación diferencial, entonces es necesario derivar la solución particular, o sea:

$$x_p'(t) = C_1 + 2C_2t - 2C_3e^{-2t} - C_4e^{-t}$$

$$x_p''(t) = 2C_2 + 4C_3e^{-2t} + C_4e^{-t}$$

Luego, reemplazando en la ecuación inicial se tiene:

$$x'' + 3x' + 2 = 4t^2$$

$$\begin{aligned} 2C_2 + 4C_3e^{-2t} + C_4e^{-t} + 3(C_1 + 2C_2t - 2C_3e^{-2t} - C_4e^{-t}) \\ + 2(C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3e^{-2t} + C_4e^{-t}) \\ = 4t^2 \end{aligned}$$

Al factorizar se tiene:

$$(2C_0 + 2C_2 + 3C_1) + (2C_2 + C_1)t + (C_2)t^2 = 4t^2$$

Por ello se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2C_0 + 2C_2 + 3C_1 = 0 \\ 2C_2 + C_1 = 0 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

Del cual se obtiene que los valores de las constantes son:

$$C_1 = -8, C_0 = 8$$

Por lo que la solución final sería:

$$x(t) = 8 - 8t + 4t^2 + c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$$

Se observa que los coeficientes que acompañan a los resultados en la solución homogénea no han aplicado el método usado y que además no es necesario utilizar estos términos para encontrar los valores de los coeficientes de la solución particular; sin embargo, una manera eficaz de ver que el desarrollo está bien llevado es revisar que estos términos se eliminen al introducirlos en la ecuación diferencial.

También hay que considerar que el operador anulador varía mucho dependiendo del tipo de función que se quiere igualar a 0, por ellos se plantea las siguientes situaciones:

$$1: \underbrace{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}}_{D^n}$$

$$2: \underbrace{e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t}, \dots, t^{n-1}e^{\alpha t}}_{(D-\alpha)^n}$$

$$3: \underbrace{e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^1e^{\alpha t} \cos(\beta t), \dots, t^{n-1}e^{\alpha t} \cos(\beta t)}_{(D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2))^n}$$

$$\underbrace{e^{\alpha t} \sin(\beta t), t^1e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{n-1}e^{\alpha t} \sin(\beta t)}_{(D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2))^n}$$

Ejercicios resueltos

1. Resolver $x'' + x' - 2 = e^{2t}$

Al tomar de manera directa el polinomio $p(D)$, se tiene,

$$p(D) = (D + 2)(D - 1)$$

Con lo cual se tiene que las raíces del polinomio presentan la solución homogénea:

$$x_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

Ahora al encontrar, $p(D)x = x(t)$, se tiene que, $(D + 2)(D - 1)x = 2e^t$

Se debe recordar que el polinomio anulador para este caso es de la forma:

$$\underbrace{e^{\alpha t}, t e^{\alpha t}, t^2 e^{\alpha t}, \dots, t^{n-1} e^{\alpha t}}_{(D-\alpha)^n}$$

Por lo que para este caso sería: $(D - 2)$

El polinomio anulador se multiplica a la ecuación anterior y se obtiene lo siguiente:

$$(D - 2)(D + 2)(D - 1)x = (D - 2)(2e^t) = 0$$

Lo cual genera lo siguiente:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 = 0$$

Presentando como ecuación auxiliar la siguiente expresión:

$$m^3 - m^2 + 4 = 0$$

Y considerando la solución particular: $x_p(t) = C e^{2t}$

Que, al ser añadida a la solución particular en la ecuación diferencial, se tiene:

$$4C e^t + 2C e^t - 2C e^t = e^{2t} = 0$$

Con lo cual, $C = \frac{1}{4}$, Cuya solución final sería: $y(t) = \frac{1}{4} e^{2t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x' = y - 6 \\ y' = y + t \end{cases}$

Al tomar la primera ecuación y despejar la variable y , se tiene, $y = x' + 6$

Luego, al derivar la función obtenida para reemplazarla en la segunda ecuación

diferencial, $y' = x''$, de lo cual se obtiene, $x'' = x' + 6 + t$

Expresión que puede ser escrita como, $x'' - x' - 6 = t$

Además, utilizando la ecuación auxiliar se tiene: $p(D) = (D - 3)(D + 2)$

Como a simple vista se conocen sus raíces, entonces se puede deducir su solución

homogénea, como sigue, $x_h(t) = A e^{3t} + B e^{-2t}$

A su vez, la solución particular es de la forma: $x_p(t) = At + B$

Por lo que al introducirla en la ecuación diferencial, se tiene, $-A - 6At - 6B = t$, o sea, $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{36}$

Luego, la solución final sería: $x(t) = \frac{1}{36} - \frac{1}{6}t + Ae^{3t} + Be^{-2t}$

También se debe encontrar la función $y(t)$, aunque ya no representa ninguna dificultad ya que solo es necesario derivar la función encontrada anteriormente y reemplazarla, o sea, $y = x' + 6$,

$$y = -\frac{1}{6} + 3Ae^{3t} - 2Be^{-2t} + 6, \text{ es decir, } y(t) = \frac{35}{6} + 3Ae^{3t} - 2Be^{-2t}$$

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' + 2y' = t \\ 3x' + 6 = e^t \end{cases}$$

La manera más eficaz de encontrar la solución es ver si alguna de las ecuaciones presenta menos complejidad, que para el problema en referencia es la segunda ecuación ya que, no está en función de x y y , por lo que avanzando por esa ecuación se tiene,

$$3x' + 6 = e^t$$

Como se puede apreciar se tiene una ecuación diferencial de primer orden separable

por lo que $3\frac{dx}{dt} = e^t - 6$; $3x = e^t - 6t + C$

Como puede apreciar el ejercicio está casi resuelto y lo único necesario de realizar es reemplazar:

$$\frac{e^t - 6}{3} + 2y' = t$$

Que al igual que la anterior es una ecuación separable que al resolver nos proporciona,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t - \frac{e^t - 6}{3}}{2}, \text{ y por tanto, } y = \frac{t^2}{4} + t - \frac{e^t}{6} + C$$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' + 3y = 6 \\ 3y' + x' = 0 \end{cases}$$

En el sistema presentado se observa que las ecuaciones tienen un elemento en común por lo que al restar las ecuaciones se tiene, $-3y' + 3y = 6$, o sea, $y' - y = -2$

Como ecuación auxiliar tenemos: $(m - 1) = 0$

Por lo cual, la solución homogénea corresponde a, $y_h(t) = Ae^t$, y como solución particular, $y_p(t) = B$, de manera que: $y(t) = 2 + Ae^t$

Finalmente, al reemplazar en la primera ecuación diferencial del sistema se obtiene:

$$x' + 3(2 + Ae^t) = 6, x' = -3Ae^t, \text{ o sea, } x(t) = -3Ae^t + C$$

4.2. Sistemas lineales homogéneos

Para esta parte se plantea el estudio de sistema de ecuaciones de la forma:

$$x' = Ax \quad (\text{Ec. 1})$$

En donde A es una matriz constante; y en analogía con el caso de ecuaciones lineales se buscan soluciones del tipo exponencial, por lo que la solución sería del tipo:

$$x = e^{\lambda t} v \quad (\text{Ec. 2})$$

Ahora si se toma su derivada se tiene:

$$x' = \lambda e^{\lambda t} v \quad (\text{Ec. 3})$$

Por lo que al reemplazar las ecuaciones (Ec. 2) y (Ec. 3) en (Ec. 1) se llega a

$$\lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v \quad (\text{Ec. 4})$$

$$\lambda v = Av$$

Por lo que se puede apreciar que λ son los valores propios de la matriz A , y v los vectores propios de la matriz A .

Ejercicios de aplicación

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 8y \\ \frac{dy}{dt} = y - x \end{cases}$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores propios se tiene:

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -8 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = 0$$

$$3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{pmatrix} 3 - 5 & -8 \\ -1 & 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = -4v_2$$

$$v_1 \left(1, -\frac{1}{4} \right)$$

Para el otro valor propio se tiene:

$$\begin{pmatrix} 3 - (-1) & -8 \\ -1 & 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = 2v_2 \text{ o sea, } v_2(2,1)$$

Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$$x_h(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2y + x \end{cases}$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores propios se tiene:

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1 = 0$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \text{ y } \lambda_2 = 3$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{pmatrix} 4 - 3 & -1 \\ 1 & 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = v_2; v_1(1,1); v_2(1,1)$$

Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases}$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores propios se tiene:

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -6 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(-\lambda) + 12 = 0$$

$$-7\lambda + \lambda^2 + 12 = 0; \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0, \text{ o sea, } \lambda_1 = 4 \text{ y } \lambda_2 = 3$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{pmatrix} 7 - 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = 2v_2, \text{ o sea, } v_1 \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Para el otro valor propio se tiene:

$$\begin{pmatrix} 7 - 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = \frac{3}{2}v_2, \text{ o sea, } v_2 \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$$x_h(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Resolver el siguiente sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} x$$

Se necesita hallar primero los valores propios de la matriz:

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0$, al resolver la ecuación se tiene,

$$\lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 1$$

Al reemplazar los valores propios se llega a:

$$\begin{pmatrix} 2-7 & 1 & 1 \\ 2 & 3-7 & 2 \\ 3 & 3 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Al realizar varias operaciones a la matriz se la lleva a una forma más simplificada en la que se puede observar de manera más sencilla los vectores:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obteniéndose así: $v_1 = v_3 - v_2$; $2v_1 = v_2$; $-v_1 = v_3$

Y generándose nuestro primer vector: $v_1(1, 2, -1)$

Para el otro valor propio se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 3 & 3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Al realizar varias operaciones a la matriz se la lleva a una forma más simplificada en la que se puede observar de manera más sencilla los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obteniéndose así: $v_1 = -v_3 - v_2$

Y generándose los siguientes vectores: $v_2(-1, 1, 0) + v_3(-1, 0, 1)$

Note que se obtuvieron dos vectores debido a la multiplicidad del valor propio.

Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3$$

$$x_h(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y' \\ \frac{dy}{dt} = x' \end{cases}$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores propios se tiene:

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = i \text{ y } \lambda_2 = -i$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = iv_2, \text{ o sea, } v_1 \left(1, \frac{1}{i}\right)$$

Para el otro valor propio se tiene:

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es:

$$v_1 = -iv_2; \quad v_2(-i, 1)$$

Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$$x_h(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{i} \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_h(t) = c_1 (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{i} \end{pmatrix} + c_2 (\cos(t) - i \operatorname{sen}(t)) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

A veces puede ocurrir que la multiplicidad algebraica de un valor propio no sea igual a su multiplicidad geométrica. En tal caso no hay n vectores propios y hay que cambiar un poco la construcción de la solución homogénea. El análogo para las ecuaciones lineales de orden n era que una raíz del polinomio característico tenía una multiplicidad mayor que uno y había que introducir términos de la forma te^{mt} . Se va a intentar algo parecido en esta situación como se verá en el siguiente ejemplo:

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A simple vista se puede apreciar que los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = 1$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado es: $v_1(1,0)$

Ya que no se presenta otro vector propio, aplicaremos el siguiente método, primero

renombremos al vector propio: $v_{1,1}(1,0)$

Luego propongamos como solución al sistema lo siguiente: $x_{1,2} = (v_{1,2} + tv_{1,1})e^t$

Entonces si derivamos la solución tenemos: $x'_{1,2} = v_{1,1}e^t + (v_{1,2} + tv_{1,1})e^t$

Para que la solución propuesta sea solución debe cumplirse que: $x'_{1,2} = Ax_{1,2}$

Reemplazando se tiene, $v_{1,1}e^t + (v_{1,2} + tv_{1,1})e^t = A(v_{1,2} + tv_{1,1})e^t$

Al eliminar los paréntesis se llega a, $v_{1,1} + v_{1,2} + tv_{1,1} = Av_{1,2} + tv_{1,1}$

Luego se agrupan los términos semejantes, $v_{1,1} = (A - I)v_{1,2}$

También se lo puede expresar como: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lo cual quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones, una de ellas es, $v_{1,2} =$

$(0,1)$. La solución general es, $x(t) = c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

7. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = y + z \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases}$$

En notación matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A simple vista se aprecia que se obtiene un valor propio de multiplicidad 3, $\lambda_1 = 1$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De lo que se concluye que: $v_2 = 0$ y $v_3 = 0$

Y el vector propio es, $v_1 = (1,0,0)$

Ya que no se presenta otro vector propio, aplicaremos el siguiente método, primero

renombremos al vector propio: $v_{1,1} = (1,0,0)$

Luego propongamos como solución al sistema lo siguiente: $x_{1,2} = (v_{1,2} + tv_{1,1})e^t$

Entonces si derivamos la solución tenemos: $x'_{1,2} = v_{1,1}e^t + (v_{1,2} + tv_{1,1})e^t$

Para que la solución propuesta sea solución debe cumplirse que: $x'_{1,2} = Ax_{1,2}$

Reemplazando se tiene: $v_{1,1}e^t + (v_{1,2} + tv_{1,1})e^t = A(v_{1,2} + tv_{1,1})e^t$

Al eliminar los paréntesis se llega a: $v_{1,1} + v_{1,2} + tv_{1,1} = Av_{1,2} + tv_{1,1}$

Luego se agrupan los términos semejantes, $v_{1,1} = (A - I)v_{1,2}$

También se lo puede expresar como:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Lo cual quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones, una de ellas es, $v_{1,2} = (0,1,0)$

La segunda solución es: $x_{1,2}(t) = c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Para este caso se propone una tercera solución de la siguiente forma:

$$x_{1,3} = e^t \left(v_{1,3} + tv_{1,2} + \frac{t^2}{2} v_{1,1} \right)$$

De igual manera se realizar exactamente el mismo procedimiento hecho anteriormente generándose así:

$$A \left(v_{1,3} + tv_{1,2} + \frac{t^2}{2} v_{1,1} \right) = \left(v_{1,3} + tv_{1,2} + \frac{t^2}{2} v_{1,1} \right) + v_{1,2} + tv_{1,1}$$

Agrupando los términos se puede simplificar con más claridad

$$(A - I)v_{1,3} + (A - I)tv_{1,2} + (A - I)\frac{t^2}{2}v_{1,1} = v_{1,2} + tv_{1,1}$$

Ya que sabemos que $v_{1,2}$ y $v_{1,1}$ son vectores propios se llega a: $(A - I)v_{1,3} = v_{1,2}$

Expresado en forma matricial se tiene: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

Ya que se tienen infinitas soluciones se escoge la más simple, o sea, $v_{1,3} = (0, -1, 1)$

La solución general sería entonces:

$$x_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

4.2.1. Exponencial de una matriz

Hay otra forma alternativa para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, recordemos que: $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x_0 = x(0)$

Que como bien sabemos tendría como solución: $x(t) = e^{At}x_0$

Por lo tanto, realizando una analogía se puede decir que:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x_0 = x(0), \quad x(t) = e^{At}x_0$$

Pero como sería posible realizar esto con matrices, pues bueno empecemos por considerar que:

$$e^{at} = 1 + (tA) + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

Por lo que se puede definir,

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

En referencia a esto, a continuación, se estudiará las matrices particulares presentadas:

Para $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, se tiene como solución, $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, se tiene como solución, $e^A = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$

Ejercicios de aplicación

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se propone como solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Por lo que se llega a:

$$e^{\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución se expresa como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

2. Resolver mediante el método de la matriz exponencial el sistema dado por.

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 4y \\ y' &= x - 2y \end{aligned} \text{ sujeto a las condiciones iniciales: } x(0) = 1, y(0) = -1$$

El sistema propuesto puede ser escrito de manera matricial como $x' = Ax$

El cual representa un sistema homogéneo de primer orden cuya solución adopta la forma $x' = e^{At}x$, donde e^{At} es la matriz exponencial y $x(0)$ es el vector de condiciones iniciales, por tanto, se tiene,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, se conoce que la matriz exponencial se obtiene de,

$$e^{At} = C_0 I + C_1 A, \text{ o sea, } e^{i\lambda t} = C_0 + iC_1 \lambda$$

Los λi se obtienen a partir de $|A - \lambda I|$, o sea,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 8$$

donde $\lambda^2 + 4\lambda + 8$ es el polinomio característico, cuyas raíces son,

$$\lambda_1 = -2 + 2i, \quad \lambda_2 = -2 - 2i$$

▪ A partir del valor característico $\lambda_1 = -2 + 2i$, se obtiene,

$$e^{(-2+2i)t} = C_0 + C_1(-2 + 2i), \text{ de acuerdo con Euler, el miembro izquierdo puede ser}$$

reescrito como, $e^{-2t}e^{2ti} = e^{-2t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$, y por tanto, se tiene,

$$e^{-2t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) = e^{-2t} \cos 2t + i e^{-2t} \operatorname{sen} 2t = C_0 + C_1(-2 + 2i), \text{ igualando}$$

término a término (real e imaginario) se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} C_0 - 2C_1 = e^{-2t} \cos 2t \\ -2C_1 = e^{-2t} \operatorname{sen} 2t \end{cases}, \text{ sistema que al ser resuelto nos proporciona:}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} e^{-2t} \operatorname{sen} 2t; \quad C_0 = e^{-2t} \operatorname{sen} 2t + e^{-2t} \cos 2t$$

A partir del valor característico $\lambda_1 = -2 - 2i$, se obtiene un resultado similar

A continuación se procede a obtener e^{At} , o sea, $e^{At} = C_0 I + C_1 A$, es decir,

$$e^{At} = C_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ al efectuar las operaciones se tiene,}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} C_0 - 2C_1 & -4C_1 \\ C_1 & C_0 - 2C_1 \end{pmatrix}, \text{ que al sustituir por los valores de } C_0 \text{ y } C_1 \text{ se tiene}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos 2t & -2e^{-2t} \operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2} e^{-2t} \operatorname{sen} 2t & e^{-2t} \cos 2t \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 2t & -2 \operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

Además, se conoce que la solución es de la forma $x = e^{At}x(0)$, por lo que al reemplazar lo anterior se tiene,

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Y con ello lograr la siguiente solución:

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$$

2. Resolver mediante el método de la matriz exponencial el sistema dado por.

$$\begin{aligned} x' &= x - 3y \\ y' &= 3x + 7y \end{aligned}$$

El sistema propuesto puede ser escrito de manera matricial como $x' = Ax$

El cual representa un sistema homogéneo de primer orden cuya solución adopta la forma $x' = e^{At}x$, puede ser escrito por,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, se conoce que la matriz exponencial se obtiene de,

$$e^{At} = C_0 I + C_1 A, \text{ o sea, } e^{i\lambda t} = C_0 + iC_1 \lambda$$

Los λi se obtienen a partir de $|A - \lambda I|$, o sea,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

donde $\lambda^2 - 8\lambda + 16$ es el polinomio característico, cuyas raíces son,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \text{ o sea, de multiplicidad } 2$$

A partir del valor característico $\lambda_{1,2} = 4$, la expresión $e^{i\lambda t} = C_0 + iC_1 \lambda$, debe derivarse con respecto a λ , o sea,

$$\frac{d(e^{\lambda t})}{d\lambda} = \frac{d(C_0 + C_1 \lambda)}{d\lambda}, \text{ entonces se tiene, } te^{\lambda t} = C_1, \text{ por tanto, } C_0 = e^{4t} - 4te^{4t}$$

Encontrado C_0 y C_1 , se obtiene la matriz exponencial siguiente,

$$e^{At} = C_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \text{ al efectuar las operaciones se tiene}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} C_0 + C_1 & -3C_1 \\ 3C_1 & C_0 + C_1 \end{pmatrix} \text{ que al sustituir por los valores de } C_0 \text{ y } C_1 \text{ se tiene}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{4t} - 3te^{4t} & -3te^{4t} \\ 3te^{4t} & e^{4t} + 3te^{4t} \end{pmatrix}$$

Además, se conoce que la solución es de la forma $x = e^{At}x(0)$, por lo que al reemplazar lo anterior se tiene,

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} - 3te^{4t} & -3te^{4t} \\ 3te^{4t} & e^{4t} + 3te^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

Y con ello lograr la siguiente solución:

$$x(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} K_1 - t(3K_1 + 3K_2) \\ K_2 + t(3K_1 + 3K_2) \end{pmatrix}$$

Si se considera la sustitución de $C_1 = K_1$, $C_2 = K_2$ y $c_3 = 3K_1 + 3K_2$, se tiene,

$$x(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} C_1 - tC_3 \\ C_2 + tC_3 \end{pmatrix}$$

4.3 Sistemas lineales no homogéneos

4.3.1 Método de variación de parámetros

Si bien se han resuelto varios sistemas de ecuaciones hay que recalcar que solo se encontró la solución homogénea, utilizando otra nomenclatura la solución homogénea puede escribirse como $x_h = \Phi(t)c$, considerando a Φ como matriz fundamental, y que la solución particular es, $x_p = \Phi(t)c(t)$. Entonces ahora el vector $c(t)$ es variable.

Derivando la solución particular se tiene: $x'_p = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$

El método de variación de parámetros propone la siguiente fórmula para resolver un sistema lineal no homogéneo: $x' = A(t)x_h + f(t)$

Al reemplazar la derivada de la solución particular y la solución homogénea.

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c + f(t)$$

Ya que Φ es una matriz fundamental se debe cumplir que: $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$

Sustituyendo se tiene:

$$A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + f(t)$$

Recordando un poco de algebra lineal se sabe que toda matriz fundamental es invertible porque debe cumplir $c'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$, o bien,

$$c = \int \Phi^{-1}(t)f(t)dt$$

Por lo tanto, la solución general del sistema de ecuaciones es,

$$x(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)f(t)dt + \Phi(t)c(t)$$

Ejercicios de aplicación

1. Resolver el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Lo primero es resolver el sistema homogéneo asociado, $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x$

El polinomio característico está dado por,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 3 - 8 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0, \text{ es decir,}$$

$$\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = -1$$

Los vectores correspondientes son: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo que la solución homogénea corresponde a, $x_h = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En este caso la matriz fundamental es, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{-t} \\ 2e^{5t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

Luego se debe obtener la inversa de la matriz fundamental:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Es decir, se tiene:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{3e^{4t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & -2e^{5t} \\ e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^t \\ \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}$$

Ahora se debe obtener:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(t)f(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^t \\ \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5t \\ 3e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3}te^{-5t} - 2e^{2t} \\ \frac{5}{3}te^{-5t} + e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al integrar la matriz encontrada se tiene:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}te^{-5t} - \frac{1}{15}e^{-5t} - e^{2t} \\ -\frac{1}{3}te^{-5t} - \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix}$$

Con esto, es posible encontrar la solución particular del sistema de ecuaciones, para ello será necesario multiplicar la matriz fundamental con la recientemente integrada, o sea,

$$\begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{-t} \\ 2e^{5t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}te^{-5t} - \frac{1}{15}e^{-5t} - e^{2t} \\ -\frac{1}{3}te^{-5t} - \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t - \frac{1}{15} - e^{7t} + \frac{1}{3}te^{-6t} + \frac{1}{15}e^{-6t} - \frac{e^t}{2} \\ -\frac{2}{3}t - \frac{2}{15} - 2e^{7t} - \frac{1}{3}te^{-6t} - \frac{1}{15}e^{-6t} + \frac{e^t}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente se propone como solución:

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t - \frac{1}{15} - \frac{e^t}{2} - e^{7t} + \frac{1}{3}te^{-6t} + \frac{1}{15}e^{-6t} \\ -\frac{2}{3}t - \frac{2}{15} + \frac{e^t}{2} - 2e^{7t} - \frac{1}{3}te^{-6t} - \frac{1}{15}e^{-6t} \end{pmatrix} + c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

A. Mediante el método de coeficientes indeterminados resolver el sistema dado.

$$1. \begin{cases} x' = 2 + 3y - 7 \\ y' = -x - 2y + 5 \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{cases} x' = 5x + 9y + 2 \\ y' = -x + 11y + 6 \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{8t} \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$3. x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2t^2 \\ t + 5 \end{pmatrix} \text{ Sol. } c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$+ t \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$4. x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4t + 9e^{6t} \\ -t + e^{6t} \end{pmatrix} \text{ Sol. } c_1 e^t \begin{pmatrix} -\text{sen } 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos 4t \\ -\text{sen } 4t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{4}{17} \\ \frac{1}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix} + e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5. x' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ -2 \cos t \end{pmatrix} \text{ Sol. } c_1 e^t \begin{pmatrix} 5 \cos 2t \\ \cos 2t - 2 \text{sen } 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 5 \text{sen } 2t \\ 2 \cos 2t + \text{sen } 2t \end{pmatrix} +$$

$$\cos t \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \text{sen } t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

B. Mediante matrices, hallar $x(t), y(t)$ en los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

$$1. \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 3x + 2y \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x + 5y \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$4. \begin{cases} x' = 3x - 18y \\ y' = 2x - 9y \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$5. \begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = x - 2y \end{cases} \text{ Sol. } c_1 \left[\cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 \left[\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

C. Mediante matrices resolver los siguientes sistemas lineales homogéneos con la condición inicial dada:

$$1. \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x + 6y \end{cases}, x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ Sol. } e^{5t} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x + 7y \end{cases}, x(0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \end{pmatrix}, \text{ Sol. } e^{6t} \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = -x + 6y \end{cases}, x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ Sol. } e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t e^{4t} \begin{pmatrix} 26 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}, x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ Sol. } \frac{1}{2} e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{cases} x' = 5x - 9y \\ y' = x - y \end{cases}, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ Sol. } e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ t \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} -9t \\ 1 - 3t \end{pmatrix}$$

D. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos

$$1. \begin{cases} x' = 3x - 3y + 4 \\ y' = 2x - 2y - 1 \end{cases} \text{ Sol. } c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y + 4t \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} x' = 3x - 2y + 16t \\ y' = -x + 2y + 4 \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8t + 8 \\ 4t + 8 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} x' = x - 4y - t^2 + 22t - 7 \\ y' = -2x + 3y + 2t^2 - 15t + 14 \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + 3 \\ 5t - 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{cases} x' = 3x - 2y + 16t \\ y' = -x + 2y + 4 \end{cases} \text{ Sol. } c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{c_2 e^t}{2} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 - 2t \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO V

ECUACIONES DIFERENCIALES EN SERIES DE POTENCIAS

MOTIVACIÓN

En esta unidad se trata de extender la búsqueda de soluciones más allá de las funciones elementales del cálculo. El instrumento más importante que se necesita es la representación de una función dada mediante una serie de potencias. La idea básica es semejante al método de los coeficientes indeterminados, para lo cual se supone que las soluciones de una ecuación diferencial dada tienen desarrollos en series de potencias y luego se intenta determinar los coeficientes de modo que se satisfaga la ecuación diferencial.

El **objetivo general** del presente capítulo es utilizar series de potencias para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, con coeficientes variables.

PRERREQUISITOS PARA ABORDAR ESTE TEMA

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Comprender los conceptos relativos a las series de potencias y al desarrollo de una función en series de potencias en torno a un punto.
- Conocer métodos elementales para la búsqueda de solución de ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden.

5.1. Algunas definiciones sobre series de potencias

Del curso de cálculo que una serie de potencias en $x - a$ es una serie infinita de la forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

Serie que corresponde a una serie de potencia centrada en a . A continuación, se listan algunas definiciones vistas en clases de cálculo sobre series de potencias.

Convergencia. Una serie de potencias se dice convergente si las sumas parciales $\{S_n(x)\}$ convergen, es decir, si el $\lim_{N \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^N c_n(x - a)^n$ existe. Si el límite no existe en x , entonces se dice que la serie es divergente.

Intervalo de convergencia. Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia. El intervalo de convergencia es el conjunto de todos los números reales x para los que converge la serie.

Radio de convergencia. Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia R . Si $R > 0$, entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$. Si la serie converge sólo en su centro a , entonces $R = 0$. Si la serie converge para toda x , entonces se escribe $R = \infty$.

Convergencia absoluta. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente. En otras palabras, si x es un número en el intervalo de convergencia y no es un extremo del intervalo, entonces la serie de valores absolutos

Prueba de la razón. La convergencia de una serie de potencias suele determinarse mediante el criterio de la razón. Suponga que $c_n \neq 0$ para toda n y que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

Donde, si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge, y si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Una serie de potencias define una función. Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Si el radio de convergencia es $R > 0$, entonces f es continua, derivable e integrable en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además, $f(x)$ y $\int f(x)dx$ se encuentran derivando e integrando término a término.

Propiedad de identidad. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0, R > 0$, para los números x en el intervalo de convergencia, entonces $c_n = 0$ para toda n .

Analítica en un punto. Una función f es analítica en un punto a si se puede representar mediante una serie de potencias en $x-a$ con un radio positivo o infinito de convergencia.

Aritmética de series de potencias. Las series de potencias se combinan mediante operaciones de suma, multiplicación y división. Los procedimientos para las series de potencias son similares a los que se usan para sumar, multiplicar y dividir dos polinomios, es decir, se suman los coeficientes de potencias iguales de x , se usa la ley distributiva y se reúnen términos semejantes y se realiza la división larga.

5.2. Resolución de ecuaciones diferenciales por series de potencias

Las Ecuaciones Diferenciales pueden también resolverse mediante series de potencias.

Una Serie de Potencias de Taylor, posee la siguiente forma general:

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + \dots + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + A_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A_i (x - x_0)^i$$

Para lo cual esta serie se constituye en solución de la ecuación diferencial del tipo, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- La serie satisface a la ecuación diferencial dada.
- La serie toma el valor de $y = y_0$ cuando se tiene $x = x_0$; resulta útil considerar $y_0 = A_0$
- La serie es convergente para valores alrededor de x_0

5.2.1. Resolución de la serie para el caso particular $x = 0$

En el caso de requerirse una solución que satisfaga $y = y_0$, cuando $x = 0$, se emplea la serie de potencias de Mclaurin, cuya forma general está dada por:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i$$

En la cual se asume que $y_0 = A_0$, mientras que los coeficientes restantes A_i deben determinarse. Para encontrar la serie que permite resolver la Ecuación Diferencial, se aplica lo siguiente:

- Se asume que existe una serie solución de la ecuación diferencial planteada.
- Se reemplaza la serie propuesta en la ecuación diferencial, tomando derivadas de la serie propuesta hasta el orden que corresponda.
- Se ordena los coeficientes para cada potencia, con lo cual se obtienen fórmulas generales que expresan a la serie propuesta como resultado de la ecuación diferencial dada.
- Una opción para acelerar el procedimiento de resolución es el Método de Frobenius,

Ejercicios de aplicación.

1. Encontrar una solución en serie de potencias en torno a $x = 0$ de la ecuación $y' + 2xy = 0$.

Solución. Considerando que existe una solución en serie de potencias, se tiene,

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

La tarea consiste en determinar los coeficientes A_k . Para ello, se sustituye los desarrollos en serie de $y(x)$ y $y'(x)$ en la ecuación diferencial dada, obteniéndose,

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \dots + A_nx^n$$

$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \dots + nA_nx^{n-1}$$

$$A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \dots + nA_nx^{n-1}$$

$$+ 2x[A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \dots + A_nx^n] = 0$$

$$A_1 + [2A_2 + 2A_0]x + [3A_3 + 2A_1]x^2 + [4A_4 + 2A_2]x^3 + [5A_5 + 2A_4]x^4 + \dots$$

$$+ [nA_n + 2A_{n-1}]x^{n-1} + \dots = 0$$

Para que la serie de potencias del primer miembro de la ecuación anterior sea idénticamente cero, se debe verificar que todos los coeficientes sean iguales a cero. Por tanto, se tiene,

$$A_1 = 0, \quad 2A_2 + 2A_0 = 0, \quad 3A_3 + 2A_1 = 0, \quad 4A_4 + 2A_2 = 0, \dots$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior resulta los siguientes valores:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -A_0, \quad A_3 = -\frac{2}{3}A_1 = 0, \quad A_4 = -\frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}A_0,$$

Luego, la solución por serie de potencias adopta la forma,

$$y = A_0 - A_0x^2 + \frac{1}{2}A_0x^4 + \dots$$

Si bien el cálculo de estos primeros términos es útil, sería mejor disponer de una fórmula de término general para el desarrollo en serie de potencias de la solución. Para ello, reescribiendo la expresión, manera que las dos series presenten la misma potencia de x , se tiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_nx^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)A_{k+1}x^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1}x^k = 0, \text{ y, puesto que la primera serie empieza en } k=0$$

y la segunda en $k=1$ se separa el primer miembro de la primera y luego se suman los coeficientes de igual potencia de x , con lo cual se obtiene,

$$A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)A_{k+1}x^k + 2A_{k-1}]x^k = 0$$

Considerando que todos los coeficientes iguales a cero, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes dados, o sea,

$$A_1 = 0, \quad A_{k+1} = -\frac{2}{k+1}A_{k-1}$$

Tomando $k=1, 2, \dots$ y teniendo en cuenta que $A_1 = 0$, se obtiene lo siguiente,

$$A_2 = -A_0, \quad k=1, \quad A_3 = -\frac{2}{3}A_1 = 0, \quad k=2, \quad A_4 = -\frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2!}A_0, \quad k=3,$$

$$A_5 = -\frac{2}{5}A_1 = 0, k = 4, \quad A_6 = -\frac{1}{3}A_0 = -\frac{1}{3!}A_0, k = 5, \quad A_7 = -\frac{2}{7}A_1 = 0, k = 6$$

Con lo cual se observa que,

$$A_{2n} = -\frac{(-1)^n}{n!}A_0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots; \quad A_{2n+1} = 0, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Puesto que el coeficiente a_0 se deja indeterminado, sirve como constante arbitraria y, por tanto, proporciona la solución general de la ecuación,

$$y = A_0 - A_0x^2 + \frac{1}{2}A_0x^4 + \dots = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, corresponde a la serie de $f(x) = e^{-x^2}$, y por tanto,

La solución de la ecuación diferencial propuesta es $y = A_0 e^{-x^2}$

2. Encontrar una solución en serie de potencias en torno a $x = 0$ de la ecuación $y' + y = x^2$

Solución. Considerando que existe una solución en serie de potencias de la forma,

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2 \rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

La tarea consiste en determinar los coeficientes A_k . Para ello, se sustituye los desarrollos en serie de $y(x)$ y $y'(x)$ en la ecuación diferencial dada, obteniéndose,

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \dots + A_nx^n$$

$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \dots + nA_nx^{n-1}$$

$$[A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \dots + nA_nx^{n-1}]$$

$$+ [A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \dots + A_nx^n] = x^2$$

$$[A_1 + A_0] + [2A_2 + A_1]x + [3A_3 + A_2]x^2 + [4A_4 + A_3]x^3 + [5A_5 + A_4]x^4 + \dots$$

$$+ [nA_n + A_{n-1}] = x^2$$

Resolviendo por analogía entre ambos miembros de la igualdad, se tiene,

$$A_1 + A_0 = 0 \rightarrow A_1 = -A_0$$

$$2A_2 + A_1 = 0 \rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_0$$

$$3A_3 + A_2 = 1 \rightarrow A_3 = \frac{1}{3}(1 - A_2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3}A_0$$

$$4A_4 + A_3 = 0 \rightarrow A_4 = -\frac{1}{4}A_3 = -\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}A_0$$

$$5A_5 + A_4 = 0 \Rightarrow A_5 = -\frac{1}{5}A_4 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}A_0$$

....

....

Lo cual genera un sistema de ecuaciones donde cada coeficiente A_k , se expresa en términos de A_0 , es decir, y por tanto se tienen las siguientes soluciones,

$$nA_n + A_{n-1} = 0 \Rightarrow A_n = -\frac{1}{n}A_{n-1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}A_0$$

Que al ser reemplazadas en el modelo solución propuesto, se obtiene,

$$y = A_0 + (-A_0)x + \left(\frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3}A_0\right)x^3 + \left(-\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}A_0\right)x^4 \\ + \left(\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}A_0\right)x^5 + \dots + \left(\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}A_0\right)$$

Que luego de reagrupar términos se obtiene la expresión,

$$y = A_0 \left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}x^n \right] - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}x^n \right] \\ + 2 \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 \right) - 2 \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

y luego de comparar con los desarrollos de series de potencias de ciertas funciones (anexo E), se obtiene como solución de la ecuación diferencial propuesta la expresión:

$$\text{Sol. } y = A_0e^{-x} - 2e^{-x} + 2 - 2x + x^2 = C_1e^{-x} + 2 - 2x + x^2$$

3. Encontrar una solución en serie de potencias de la ecuación diferencial bajo condición inicial siguiente,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$$

Solución. Considerando que existe una solución en serie de potencias de la forma,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = 0, \rightarrow y = \sum_0^{\infty} A_n x^n$$

La tarea consiste en determinar los coeficientes A_k . Para ello, se sustituye los desarrollos en serie de $y(x)$, $y'(x)$ y $y''(x)$ en la ecuación diferencial dada, obteniéndose,

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \dots + A_nx^n$$

$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \dots + nA_nx^{n-1}$$

$$y'' = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3x + 4 \cdot 3A_4x^2 + 5 \cdot 4A_5x^3 + 6 \cdot 5A_6x^4 + \dots + n(n-1)A_nx^{n-2}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación diferencial propuesta, se tiene,

$$[2A_2 + 3 \cdot 2A_3x + 4 \cdot 3A_4x^2 + 5 \cdot 4A_5x^3 + 6 \cdot 5A_6x^4 + \dots + n(n-1)A_nx^{n-2}] \\ + x^2 [A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \dots + A_nx^n] \\ = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Solución. Considerando que existe una solución en serie de potencias de la forma,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

La tarea consiste en determinar los coeficientes A_k . Para ello, se sustituye los desarrollos en serie de $y(x), y'(x), y''(x)$ en la ecuación diferencial dada, obteniéndose,

$$y = \sum_{i=0}^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6 + \dots + A_n x^n$$

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + 6A_6 x^5 + \dots + nA_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3 x + 4 \cdot 3A_4 x^2 + 5 \cdot 4A_5 x^3 + 6 \cdot 5A_6 x^4 + \dots + n(n-1)A_n x^{n-2}$$

Que luego de sustituirse en la ecuación diferencial propuesta, se obtiene,

$$\begin{aligned} & [2A_2 + 3 \cdot 2A_3 x + 4 \cdot 3A_4 x^2 + 5 \cdot 4A_5 x^3 + 6 \cdot 5A_6 x^4 + \dots + n(n-1)A_n x^{n-2}] \\ & \quad + x[A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + 6A_6 x^5 + \dots + nA_n x^{n-1}] \\ & \quad + A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6 + \dots + A_n x^n = 0 \\ & [2A_2 + A_0] + [3 \cdot 2A_3 + A_1 + A_1]x + [4 \cdot 3A_4 + 2A_2 + A_2]x^2 \\ & \quad + [5 \cdot 4A_5 + 3A_3 + A_3]x^3 + [6 \cdot 5A_6 + 4A_4 + A_4]x^4 + \dots \\ & \quad + [n(n-1)A_n + (n-2)A_{n-2} + A_{n-2}]x^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Para que la serie de potencias del primer miembro de la ecuación anterior sea idénticamente cero, se debe verificar que todos los coeficientes sean iguales a cero. Por tanto, se tiene,

$$2A_2 + A_0 = 0 \rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}A_0$$

$$3 \cdot 2A_3 + A_1 + A_1 = 0 \rightarrow A_3 = -\frac{2}{2 \cdot 3}A_1$$

$$4 \cdot 3A_4 + 2A_2 + A_2 = 0 \rightarrow A_4 = -\frac{3}{3 \cdot 4}A_2 = \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4}A_0$$

$$5 \cdot 4A_5 + 3A_3 + A_3 = 0 \rightarrow A_5 = -\frac{4}{4 \cdot 5}A_3 = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}A_1$$

$$6 \cdot 5A_6 + 4A_4 + A_4 = 0 \rightarrow A_6 = -\frac{5}{5 \cdot 6}A_4 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}A_0$$

....

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior resulta los siguientes valores:

$$[n(n-1)A_n + (n-2)A_{n-2} + A_{n-2}]x^{n-2} = 0 \Rightarrow A_n = -\frac{n-1}{(n-1)n}A_{n-2}$$

Luego, la solución por serie de potencias adopta la forma,

$$y = A_0 + A_1x - \frac{1}{2}A_0x^2 - \frac{2}{2 \cdot 3}A_1x^3 + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4}A_0x^4 + \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}A_1x^5$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}A_0x^6 + \dots$$

$$y = A_0 \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right] + A_1 \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right]$$

$$y = A_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n} + A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

5.2.2. Resolución de ecuaciones diferenciales en puntos $x \neq 0$

Se trata de resolver problemas de ecuaciones diferenciales de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(xy)$

Y para el caso en que se tengan ecuaciones diferenciales que requiera una solución particular que cumpla la condición $y = y_0 = A_0$, cuando $x = x_0$, se puede aplicar un cambio de variable, o sea,

$$u = x - x_0 \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}$$

Con lo cual, el proceso de solución corresponderá al de $x = 0$, y usando la serie de potencias de Mclaurin, se tendrá la forma general siguiente:

$$y = A_0 + A_1u + A_2u^2 + A_3u^3 + A_4u^4 + A_5u^5 + A_6u^6 + \dots + A_nu^n$$

6. Encontrar una solución en serie de potencias en torno a $x = 2$ de la ecuación $y'' + xy = 0$.

Se trata de resolver la ecuación diferencial, en potencias de $x - 2$, para lo cual, realizando el cambio de variable y , por la serie de Mclaurin, en la nueva variable asignada u ,

si $u = x - 2$, entonces, $y'' + xy = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + (u + 2)y = 0$, y considerando,

$$y = \sum_0^{\infty} A_n u^n = A_0 + A_1u + A_2u^2 + A_3u^3 + A_4u^4 + A_5u^5 + A_6u^6 + \dots + A_nu^n$$

$$y'' = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3u + 4 \cdot 3A_4u^2 + 5 \cdot 4A_5u^3 + 6 \cdot 5A_6u^4 + \dots + n(n-1)A_nu^{n-2}$$

$$\text{o sea, } [2A_2 + 3 \cdot 2A_3u + 4 \cdot 3A_4u^2 + 5 \cdot 4A_5u^3 + 6 \cdot 5A_6u^4 + \dots + n(n-1)A_nu^{n-2}]$$

$$+ (u + 2)[A_0 + A_1u + A_2u^2 + A_3u^3 + A_4u^4 + A_5u^5 + A_6u^6 + \dots$$

$$+ A_nu^n] = 0$$

Sustituyendo los desarrollos en serie de $y(x)$ y $y''(x)$ en la ecuación diferencial dada, se obtiene,

$$[2A_2 + 2A_0] + [3 \cdot 2A_3 + A_0 + 2A_1]u + [4 \cdot 3A_4 + 2A_2 + A_1]u^2$$

$$+ [5 \cdot 4A_5 + A_2 + 2A_3]u^3 + [6 \cdot 5A_6 + 2A_4 + A_3]u^4 + \dots$$

$$+ [n(n-1)A_n + 2A_{n-2} + A_{n-3}]u^{n-2} = 0$$

Para que la serie de potencias del primer miembro de la ecuación anterior sea idénticamente cero, se debe verificar que todos los coeficientes sean iguales a cero. Por tanto, se tiene,

$$2A_2 + 2A_0 = 0 \rightarrow A_2 = -A_0$$

$$3 \cdot 2A_3 + A_0 + 2A_1 = 0 \rightarrow A_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} [-A_0 - A_1] = -\frac{1}{6}A_0 - \frac{1}{3}A_1$$

$$4 \cdot 3A_4 + 2A_2 + A_1 = 0 \rightarrow A_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} [-2A_2 - A_1] = \frac{1}{6}A_0 - \frac{1}{12}A_1$$

$$5 \cdot 4A_5 + A_2 + 2A_3 = 0 \rightarrow A_5 = \frac{4}{4 \cdot 5} [-2A_3 - A_2] = \frac{1}{15}A_0 - \frac{1}{30}A_1$$

$$6 \cdot 5A_6 + 2A_4 + A_3 = 0 \rightarrow A_6 = \frac{1}{5 \cdot 6} [-A_3 - 2A_4] = -\frac{1}{180}A_0 + \frac{1}{60}A_1$$

.... ..

Lo cual genera un sistema de ecuaciones donde cada coeficiente A_k , se expresa en términos de A_0 , es decir, y por tanto se tienen las siguientes soluciones,

$$n(n-1)A_n + 2A_{n-2} + A_{n-3} = 0 \rightarrow A_n = \frac{1}{(n-5)(n-4)(n-1)n} A_{n-4}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y ordenando para las constantes A_0 y A_1 , se obtiene,

$$y = A_0 + A_1 u + (-A_0)u^2 + \left(\frac{1}{6}A_0 - \frac{1}{3}A_1\right)u^3 + \left(\frac{1}{6}A_0 - \frac{1}{12}A_1\right)u^4 \\ + \left(\frac{1}{15}A_0 + \frac{1}{30}A_1\right)u^5 + \left(-\frac{1}{180}A_0 + \frac{1}{60}A_1\right)u^6 + \dots$$

Luego de reagrupar términos se obtiene la expresión

$$y = A_0 \left[1 - u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{6}u^4 + \frac{1}{15}u^5 - \frac{1}{180}u^6 + \dots \right] \\ + A_1 \left[u - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{12}u^4 + \frac{1}{30}u^5 + \frac{1}{60}u^6 + \dots \right]$$

Y retornando a la variable original, $u = x - 2$, se obtiene finalmente:

$$\text{Sol. } y = A_0 \left[1 - x - 2^2 - \frac{1}{6}x - 2^3 + \frac{1}{6}x - 2^4 + \frac{1}{15}x - 2^5 - \frac{1}{180}x - 2^6 + \dots \right] \\ + A_1 \left[x - 2 - \frac{1}{3}x - 2^3 - \frac{1}{12}x - 2^4 + \frac{1}{30}x - 2^5 + \frac{1}{60}x - 2^6 + \dots \right]$$

5.3. Resolución de ecuaciones diferenciales en puntos singulares

A partir de la ecuación diferencial de segundo orden.

$$P_0(x) \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0$$

Donde $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son polinomios, además si $P_0(x) = 0$, entonces en $x = a$ se dice que existe un punto singular, de manera que al aplicar directamente lo visto

anteriormente en series de potencias alrededor de $x \neq 0$, no es posible hallar una solución, por lo que la búsqueda de la solución consiste en aplicar una serie de tipo,

$$x' \sum A_n x^n = \sum A_n x^{n+r}$$

8. Resolver la siguiente ecuación diferencial que tiene un punto singular,

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

A partir de la fórmula de recurrencia, se establecen los valores de r que determinan dos series, o sea,

$$y = \sum A_n x^{n+r} = A_0 x^r + A_1 x^{r+1} + A_2 x^{r+2} + A_3 x^{r+3} + A_4 x^{r+4} + \dots + A_n x^{r+n}$$

$$y' = A_0 x^{r-1} + A_1 (r+1) x^r + A_2 (r+2) x^{r+1} + A_3 (r+3) x^{r+2} + A_4 (r+4) x^{r+3} + \dots$$

$$y'' = A_0 r(r-1) x^{r-2} + A_1 (r+1) r x^{r-1} + A_2 (r+2)(r+1) x^r + A_3 (r+3)(r+2) x^{r+1} + \dots$$

Expresiones que al ser reemplazadas en el ejercicio dado y después de efectuar operaciones nos lleva a, $xy'' + 2y' + xy = (r^2 + r)A_0$, con lo cual, $r = -1$; $r = 0$; $A_1 = 0$, y,

$$A_n = -\frac{1}{(r+n)(r+n+1)} A_{n-2}, \text{ por tanto, se tiene,}$$

$$y = A_0 \left[x^r - \frac{x^{r+2}}{(r+2)(r+3)} + \frac{x^{r+4}}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)} + \frac{x^{r+6}}{(r+2)(r+3) \dots (r+7)} + \dots \right]$$

La expresión anterior puede ser escrita finalmente como sigue:

$$\text{Sol. } y = A_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] + B_0 \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots \right]$$

5.4. Resolución de ecuaciones diferenciales mediante series específicas

Existen algunas ecuaciones diferenciales cuya solución se define a través de series específicas, entre las cuales se pueden destacar las siguientes.

5.4.1. Ecuación diferencial de Legendre

Se llama *ecuación de Legendre* a la ecuación diferencial

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Para resolver esta ecuación diferencial mediante series de potencias, se busca que la solución se extienda en un intervalo hasta el ∞ , para lo cual se realiza el cambio de variable definida por $z = 1/x$ alrededor de $x = 0$, o sea, se tiene,

$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, considerando el cambio, $z = \frac{1}{x}$, se tiene,

$(z^4 - z^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2z^3 \frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, al considerar la serie respectiva,

$$y = z^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+r}, \text{ cuyo desarrollo corresponde a,}$$

$$y = (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + A_6 z^6 + \dots + A_r z^n) z^r$$

$$y = A_0 z^r + A_1 z^{r+1} + A_2 z^{r+2} + A_3 z^{r+3} + A_4 z^{r+4} + A_5 z^{r+5} + A_6 z^{r+6} + \dots + A_r z^{n+r}$$

$$y' = r A_0 z^{r-1} + (r+1) A_1 z^r + (r+2) A_2 z^{r+1} + (r+3) A_3 z^{r+2} + (r+4) A_4 z^{r+3} + \dots$$

$$y'' = r(r-1) A_0 z^{r-2} + (r+1) r A_1 z^{r-1} + (r+2)(r+1) A_2 z^r + (r+3)(r+2) A_3 z^{r+1} + \dots$$

Expresiones que, al ser reemplazadas en la expresión inicial, proporciona,

$$\begin{aligned} & (z^4 - z^2)[r(r-1) A_0 z^{r-2} + (r+1) r A_1 z^{r-1} + (r+2)(r+1) A_2 z^r \\ & \quad + (r+3)(r+2) A_3 z^{r+1} + \dots] \\ & \quad + 2z^3[r A_0 z^{r-1} + (r+1) A_1 z^r + (r+2) A_2 z^{r+1} + (r+3) A_3 z^{r+2} \\ & \quad + (r+4) A_4 z^{r+3} + \dots] \\ & \quad + p(p+1)[A_0 z^r + A_1 z^{r+1} + A_2 z^{r+2} + A_3 z^{r+3} + A_4 z^{r+4} + A_5 z^{r+5} \\ & \quad + A_6 z^{r+6} + \dots + A_r z^{n+r}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{-r(r-1) + \alpha(\alpha+1)\} A_0 z^r + \{-r(r+1) + \alpha(\alpha+1)\} A_1 z^{r+1} \\ & \quad + \{[-r(r+1)(r+2) + \alpha(\alpha+1)] A_2 + r(r+1) A_0\} z^{r+2} \\ & \quad + \{[-(r+n)(r+n-1) + \alpha(\alpha+1)] A_r + (r+n-2)(r+n-1) A_{r-2}\} z^{n+r} + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$A_1 = 0 \rightarrow A_n = \frac{(r+n-2)(r+n-1)}{(r+n)(r+n-1) - p(p+1)} A_{n-2}$$

\bar{y}

$$\begin{aligned} & = A_0 z^r \left\{ 1 + \frac{r(r+1)z^2}{(r+1)(r+2) - \alpha(\alpha+1)} \right. \\ & \quad + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)z^4}{[(r+1)(r+2) - \alpha(\alpha+1)][(r+3)(r+4) - \alpha(\alpha+1)]} \\ & \quad + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)z^6}{[(r+1)(r+2) - \alpha(\alpha+1)][(r+3)(r+4) - \alpha(\alpha+1)][(r+5)(r+6) - \alpha(\alpha+1)]} \\ & \quad \left. + \dots \right\} \end{aligned}$$

Donde al derivar y reemplazar se determinan las fórmulas de recurrencia. Además, siempre se procura que la serie dependa de una sola constante. El intervalo de convergencia de la serie de potencia corresponde al intervalo $|x| > 1$, si y solo si $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, $\alpha = \pm \frac{3}{2}$, ...

Al igualar la ecuación diferencial con el primer término de la serie, se obtiene,

$$(z^4 - z^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2z^3 \frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1)y = [-r(r - 1) + \alpha(\alpha + 1)]A_0 z^r$$

$$= (r + p)(-r + \alpha + 1)A_0 z^r$$

Si, $(r + \alpha)(-r + \alpha + 1)A_0 z^r = 0$, es decir, $r = -\alpha$; $r = \alpha + 1$

Para, $r = -\alpha$

$$y_1 = A_0 z^{-\alpha} \left[1 - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2(2\alpha - 1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}{2 \cdot 4(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)} z^4 \right. \\ \left. - \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4)(\alpha - 5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)(2\alpha - 5)} z^6 + \dots \right]$$

$$y_1 = A_0 x^\alpha \left[1 - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2(2\alpha - 1)} x^{-2} + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}{2 \cdot 4(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)} x^{-4} \right. \\ \left. - \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4)(\alpha - 5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)(2\alpha - 5)} x^{-6} + \dots \right]$$

$r = \alpha + 1$

$$y_b = A_0 z^{p+1} \left[1 + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2(2\alpha + 3)} x^{-2} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}{2 \cdot 4(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)} x^{-4} \right. \\ \left. - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)(\alpha + 5)(\alpha + 6)}{2 \cdot 4(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)(2\alpha + 7)} x^{-6} + \dots \right]$$

$$y_b = A_0 z^{-\alpha-1} \left[1 + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2(2\alpha + 3)} x^{-2} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}{2 \cdot 4(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)} x^{-4} \right. \\ \left. - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)(\alpha + 5)(\alpha + 6)}{2 \cdot 4(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)(2\alpha + 7)} x^{-6} + \dots \right]$$

Lo cual se escribe de manera simplificada como: $y = y_a + y_b$

5.4.2. Polinomios de Legendre

En el análisis de ecuaciones diferenciales ordinarias, los polinomios de Legendre son las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Legendre, cuya forma es la siguiente.

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n + 1)P_n(x) = 0$$

Al considerar la solución y_1 para cada valor de p , se define una función $u_p(x)$ que se constituye en solución de la ecuación diferencial de Legendre, estas funciones son:

$$u_0(x) = 1; u_1(x) = x; u_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}; u_3(x) = x^3 - \frac{3x}{5}; \dots$$

$$\text{por tanto, } u_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k(k-1)(k-2)(k-3) \dots}{2^n n! (2k-1)(2k-3) \dots (2k-2n+1)} x^{k-2n}$$

Los polinomios de Legendre se definen con respecto a estas funciones como sigue:

$$P_p(x) = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} u_p(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{p!} u_p(x), p = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$P_0(x) = 1u_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1u_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1 \cdot 3}{2!} u_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} u_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

$$P_4(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} u_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{5!} u_5(x) = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x$$

donde cada uno de estos polinomios con el correspondiente valor de p , constituyen una solución particular de la ecuación diferencial de Legendre.

5.4.3. Ecuación diferencial de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel es aquella que adopta la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial mediante series de potencias se toma la siguiente ecuación de recurrencia:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0 \rightarrow \bar{y} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+r}$$

Al sustituirse los desarrollos en serie de potencia de $y(x), y'(x), y''(x)$ en la ecuación diferencial dada, se obtiene,

$$y = A_0 x^r + A_1 x^{r+1} + A_2 x^{r+2} + A_3 x^{r+3} + A_4 x^{r+4} + A_5 x^{r+5} + \dots + A_n x^{r+n}$$

$$y' = rA_0 x^{r-1} + (r+1)A_1 x^r + (r+2)A_2 x^{r+1} + (r+3)A_3 x^{r+2} + (r+4)A_4 x^{r+3} + \dots$$

$$y'' = r(r-1)A_0x^{r-2} + (r+1)rA_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)A_2x^r \\ + (r+3)(r+2)A_3x^{r+1} + \dots$$

Expresiones que combinadas en la ecuación diferencial y efectuando las operaciones respectivas, nos conduce a,

$$x^2 [r(r-1)A_0x^{r-2} + (r+1)rA_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)A_2x^r \\ + (r+3)(r+2)A_3x^{r+1} + \dots] \\ + x [rA_0x^{r-1} + (r+1)A_1x^r + (r+2)A_2x^{r+1} + (r+3)A_3x^{r+2} \\ + (r+4)A_4x^{r+3} + \dots] \\ + (x^2 - k^2) [A_0x^r + A_1x^{r+1} + A_2x^{r+2} + A_3x^{r+3} + A_4x^{r+4} + A_5x^{r+5} \\ + \dots + A_nx^{r+n}] = 0$$

$$\{r^2 - k^2\}A_0x^r + \{(r+1)^2 - k^2\}A_1x^{r+1} + \{[(r+2)^2 - k^2]A_2 + A_0\}x^{r+2} \dots \\ + \{[(r+n)^2 - k^2]A_n + A_{n-2}\}x^{r+n} + \dots = 0$$

$$A_1 = 0 \rightarrow A_n = -\frac{1}{(r+n)^2 - k^2}A_{n-2}$$

$$\bar{y} = A_0x^r \left\{ 1 - \frac{1}{(r+2)^2 - k^2}x^2 + \frac{1}{[(r+2)^2 - k^2][(r+4)^2 - k^2]}x^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{[(r+2)^2 - k^2][(r+4)^2 - k^2][(r+6)^2 - k^2]}x^6 + \dots \right\}$$

$$x^2 \frac{d^2\bar{y}}{dz^2} + x \frac{d\bar{y}}{dz} + (x^2 - k^2)\bar{y} = \{r^2 - k^2\}A_0x^r$$

$$\{r^2 - k^2\}A_0x^r = 0, \text{ cuyas raíces son, } r = k; r = -k$$

Para el caso en que, $r = k$, se tiene,

$$y_1 = A_0x^k \left\{ 1 - \frac{1}{4(k+1)}x^2 + \frac{1}{4^2 2! (k+1)(k+2)}x^4 - \frac{1}{4^3 3! (k+1)(k+2)(k+3)}x^6 + \dots \right\}$$

Para el caso en que, $r = -k$, se tiene,

$$y_1 = A_0x^{-k} \left\{ 1 - \frac{1}{4(1-k)}x^2 + \frac{1}{4^2 2! (1-k)(2-k)}x^4 - \frac{1}{4^3 3! (1-k)(2-k)(3-k)}x^6 + \dots \right\}$$

Siendo la solución final, $y = y_1 + y_2$

En esta solución se considera lo siguiente:

- Para $k = 0$, se verifica que $y_1 = y_2$
- Para $k < 0$, solo está definida y_2 y no y_1
- Para $k > 0$, solo está definida y_1 y no y_2

5.4.4. Funciones de Bessel

Con respecto a la solución mediante series de potencias de la ecuación diferencial de Bessel, las funciones de Bessel de primera especie se definen por,

$$J_k(x) = \frac{1}{2^k k!} y_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^k \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{1!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!(k+3)!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right\}$$

Donde se verifica que $J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$, siendo $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 0$

Al reemplazar $k = 0$ y $k = 1$ se obtienen las primeras funciones de Bessel en su orden respectivo o sea,

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

$$J_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{1!(2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(3)!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!(4)!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right\}$$

Debe recordarse que todas las funciones de Bessel son soluciones particulares de la ecuación diferencial de Bessel.

También debe recordarse que una función característica de la función de Bessel es:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n t^n, \text{ expresión que permite obtener las propiedades de la}$$

función de Bessel.

5.4.5. Propiedades de las funciones de Bessel

A partir de la serie que define a la función de Bessel, se tienen las siguientes propiedades:

$$P1. J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}(x)$$

$$P2. J'_{n(x)} = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

$$P3. xJ'_{n(x)} = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

$$P4. xJ'_{n(x)} = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

$$P5. \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$P6. \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$P7. J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{2/\pi x} \operatorname{sen}(x)$$

$$P8. J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{2/\pi x} \operatorname{cos}(x)$$

5.5. Resolución de ecuaciones diferenciales por el método de Frobenius

El método de Frobenius es una forma de hallar una solución expresada como serie infinita para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que tenga la forma:

$$z^2 u'' + p(z)zu' + q(z)u = 0, \text{ con } u' = \frac{du}{dz} \text{ y } u'' = \frac{d^2u}{dz^2}$$

en un entorno reducido de un punto singular regular. El método de Frobenius permite crear una solución en serie de potencias de esa ecuación diferencial, con $p(z)$ y $q(z)$ analíticas en 0 o, siendo analíticas, si sus límites en 0 existen (si son finitos).

La serie de Frobenius presenta la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} y &= x^r \sum_{-\infty}^{\infty} A_n x^n = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n x^{n+r} \\ &= A_0 x^r + A_1 x^{r+1} + A_2 x^{r+2} + \dots + A_{n-1} x^{r+n-1} + A_n x^{r+n} + \dots \end{aligned}$$

Donde $A_n = 0$, para $n < 0$, la presencia de r otorga flexibilidad en el primer coeficiente que no necesariamente puede ser A_0 .

Para resolver una ecuación diferencial por el Método de Frobenius, se siguen los siguientes pasos:

- Se considera una forma general de la serie, luego se determinan derivadas que precise la ecuación diferencial.
- Se reemplazan las expresiones asumidas de la serie de potencia, se modifican los subíndices de los coeficientes A_i , de manera que las potencias sean iguales, se ordenan los coeficientes, obteniéndose las fórmulas de recurrencia a partir de la ecuación indicial.

En las Ecuaciones ordinarias puede emplearse directamente la forma general: $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$

8. Resolver la siguiente ecuación diferencial por series, empleando el método de Frobenius:

$$y'' + y = 0$$

En la ecuación diferencial $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$, se propone como solución $y = \sum A_n x^n$

A partir de la serie propuesta como solución se obtiene,

$$y = \sum A_n x^n \text{ al tomar su derivada, } y' = \sum A_n x^{n-1}; y'' = \sum A_n n(n-1)x^{n-2}$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial propuesta, se tiene,

$$\sum A_n n(n-1)x^{n-2} + \sum A_n x^n = 0$$

Se busca que la potencia de x^n y x^{n-2} sea la misma, se realiza el cambio de $n + 2$ en lugar de n , lo cual modifica el primer coeficiente, de esta manera se logra la ecuación indicial, es decir,

$$\sum A_{n+2}(n+2)[(n+2)-1]x^n + \sum A_n x^n = 0$$

$$\sum [A_{n+2}(n+2)(n+1) + A_n]x^n = 0$$

Puesto que x^n no puede ser cero, entonces, $A_{n+2}(n+2)(n+1) + A_n = 0$

$$\text{Luego, la ecuación de recurrencia es: } A_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}A_n$$

A partir de $n = 0$, se determinan los restantes coeficientes, o sea,

$$A_2 = -\frac{1}{2 \cdot 1}A_0$$

$$A_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}A_1$$

$$A_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}A_2 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}A_0$$

$$A_5 = -\frac{1}{4 \cdot 3}A_3 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}A_1$$

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}A_0$$

$$A_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}A_1$$

Finalmente se obtiene como solución:

$$y = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}A_0 + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}A_1$$

Como las series de potencias de los coeficientes se conocen, entonces la solución en forma general corresponde a: $y = A_0 \cos(x) + A_1 \sin(x)$

9. Mediante series de potencia de x , determinar la solución general de $xy'' + 2y' + xy = 0$.

Solución. Asumiendo la solución alrededor del punto $x_0 = 0$, se tiene que verificar que clase de punto es, en este caso $P(x) = x$ entonces $P(x_0) = 0$ por lo tanto $x_0 = 0$ es el punto singular.

Luego se verifica si es singular regular.

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x) \left(\frac{2}{x} \right) = 2 = P_0(\text{existe})$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x) 2 \left(\frac{x}{x}\right) = 0 = q_0 (\text{existe})$$

Los dos límites existen, por lo tanto x_0 es un punto singular regular.

La fórmula de la ecuación indicial, establece:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

$$r(r-1) + 2r = 0$$

$$r(r-1+2) = 0, \text{ se obtiene que } r(r-1) = 0$$

Las raíces de la ecuación indicial son: $r_1 = 0, r_2 = -1$

Asumiendo la solución como:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

Obteniendo la 1ª y 2ª derivada:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

Reemplazando y, y', y'' en la ecuación diferencial $xy'' + 2y' + xy = 0$, se obtiene:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Se introducen los coeficientes de cada sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Se iguala las potencias de todas las sumatorias, en este caso a: $n+r-1$ haciendo un cambio de parámetro en alguna en la tercera sumatoria.

$$m-1 = n+1$$

$$\text{Si } n=0, \text{ entonces } m=2$$

$$n = m-2$$

$$\text{luego } m = n$$

La nueva ecuación queda así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1} = 0$$

Se iguala los subíndices de cada sumatoria al mayor de todas, en este caso a $n=2$ luego se desarrollan dos términos en la primera y segunda sumatoria:

$$\begin{aligned}
& a_0(r)(r-1)x^{r-1} + a_1(r+1)(r)x^r + 2a_0(r)x^{r-1} + 2a_1(r+1)x^r \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1}
\end{aligned}$$

Se agrupan los coeficientes de cada sumatoria en una sola sumatoria:

$$\begin{aligned}
& a_0(r)(r-1)x^{r-1} + a_1(r+1)(r)x^r + 2a_0(r)x^{r-1} + 2a_1(r+1)x^r \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n(n+r)(n+r-1) + 2a_n(n+r) + a_{n-2}]x^{n+r-1} = 0
\end{aligned}$$

Igualmente los coeficientes de x^{r-1} y x^r :

$$\text{Para } x^{r-1}, \text{ se tiene: } a_0(r)(r-1) + 2a_0(r) = 0$$

Como $a_0 \neq 0$, se obtiene $(r)(r-1) + 2(r) = 0$ que es la misma ecuación indicial anterior.

$$\text{Para } x^r, \text{ se tiene } a_1(r+1)(r) + 2a_1(r+1) = 0$$

En este caso a_1 si puede ser igual a cero $a_1 = 0$

La ecuación de recurrencia es:

$$a_n(n+r)(n+r-1) + 2a_n(n+r) + a_{n-2} = 0$$

Despejando el valor de a_n se obtiene la formula de recurrencia general:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1) + 2(n+r)}; \quad \forall \geq 2$$

Reemplazando la raíz mayor $r_1 = 0$ se obtiene la formula de recurrencia particular para la primera solución:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n)(n-1) + 2(n)}, \text{ donde } a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n)(n+1)}; \quad \forall \geq 2$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{(2)(3)} = \frac{a_0}{3!}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{a_1}{(3)(4)}, \text{ pero } a_1 = 0 \text{ entonces } a_3 = 0$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{(4)(5)} = \frac{a_0}{(2)(3)(4)(5)} = \frac{a_0}{5!}$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{(5)(6)} = 0$$

$$n = 6 \rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{(6)(7)} = -\frac{a_0}{(2)(3)(4)(5)(6)(7)} = -\frac{a_0}{7!}$$

$$n = 7 \rightarrow a_7 = -\frac{a_5}{(7)(8)} = 0$$

Entonces la primera solución para el valor de $r = 0$ es:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = [a_0 + a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7] + \dots$$

Reemplazando los coeficientes en la solución

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left[a_0 - \frac{a_0}{3!} x^2 + \frac{a_0}{5!} x^4 - \frac{a_0}{7!} x^6 + \dots \right]$$

$$= a_0 \left[1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \right]$$

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)} \text{ entonces, } y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1-1}}{(2n+1)} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y_1 = x^{-1} \text{Sen}(x)$$

Por tanto y_2 lo podemos encontrar de la siguiente forma:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{(y_1)^2} dx = x^{-1} \text{Sen}(x) \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{x^{-2} \text{Sen}^2(x)} dx$$

$$y_2 = x^{-1} \text{Sen}(x) \int \frac{x^{-2}}{x^{-2} \text{Sen}^2(x)} dx = x^{-1} \text{Sen}(x) \int \text{Csc}^2(x) dx$$

$$y_2 = x^{-1} \text{Sen}(x) [-\text{ctg}(x)] = -x^{-1} \text{Cos}(x)$$

La solución general:

$$y = C_1 x^{-1} \text{Sen}(x) + C_2 x^{-1} \text{Cos}(x)$$

10. Resolver $x^2 \frac{d^2 y}{dy^2} + (x^2 - 3x) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$, alrededor de $x_0 = 0$

Considerando, $p(x) = x^2 \rightarrow p(x_0) = 0$, es singular

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

$$+ (x^2 - 3x) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r) x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r) x^{n+r} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+r-3)(n+r-1)]C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)r^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+r-3)(n+r-1)]C_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{n-1}(n+r-1)x^{n+r} = 0$$

$$[(r-3)(r-1)]C_0 x^r + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+r-3)(n+r-1)]C_n + (n+r-1)C_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$[(r-3)(r-1)]C_0 = 0 \rightarrow (r-3)(r-1) = 0 \rightarrow \underline{r_1 = 3} \quad \underline{r_2 = 1} \quad r_1 - r_2 = \text{entero}$$

$$[(n+r-3)(n+r-1)]C_n + (n+r-1)C_{n-1} = 0 \rightarrow \underline{C_n = -\frac{C_{n-1}}{n+r-3}; n \geq 1}$$

$r_1 = 3 \rightarrow \underline{C_n = -\frac{C_{n-1}}{n}; n \geq 1}$ $r_2 = 1 \rightarrow \underline{C_n = -\frac{C_{n-1}}{n-2}; n \geq 1}$ No está definida para $n = 2$ la primera solución será utilizando $r_1 = 3$

$$n = 1 \rightarrow C_1 = -\frac{C_0}{1} = \underline{\frac{C_0}{1!}}$$

$$n = 2 \rightarrow C_2 = -\frac{C_1}{2} = \underline{\frac{C_0}{2!}}$$

$$n = 3 \rightarrow C_3 = -\frac{C_2}{3} = -\frac{C_0}{3!} \rightarrow y_1(x) = C_0 x^3 \left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right]$$

es decir, $y_1(x) = C_0 x^3 e^{-x}$

Por otro lado, $y_2(x)$

$$= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

$$= x^3 e^{-x} \int \frac{e^{-\int 1 \frac{3}{x} dx}}{x^6 e^{-2x}} dx = x^3 e^{-x} \int \frac{x^3 e^{-x}}{x^6 e^{-2x}} dx = x^3 e^{-x} \int \frac{e^x}{x^3} dx$$

$$y_2(x) = x^3 e^{-x} \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-3}}{n!} dx$$

$$= x^3 e^{-x} \int \left(x^{-3} - x^{-2} + \frac{x^{-1}}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-3}}{n!} \right) dx$$

$$= x^3 e^{-x} \left(-\frac{x^{-2}}{2} + x^{-1} + \frac{\ln x}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!(n-2)} \right) \therefore$$

Luego se tiene, $y_2(x) = \frac{y_1 \ln x}{2} + x^3 e^{-x} \left(-\frac{x^2}{2} + x^{-1} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!(n-2)} \right)$

11. Resuelva la siguiente ecuación diferencial alrededor del punto $x_0 = 0$

$$(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (3x - 1) \frac{dy}{dx} + y = 1$$

$p(x) = x^2 \Rightarrow p(x_0) = 0$, Es singular

$$(x^2 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + (3x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}$$

$$+ 3 \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1] C_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)^2 C_n x^{n+r-1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1] C_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+r+1)^2 C_{n+1} x^{n+r} = 0$$

$$-[r^2] C_0 x^r + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1] C_n - (n+r+1)^2 C_{n+1} x^{n+r} = 0$$

$$-[r^2] C_0 = 0 \rightarrow \underline{r_1 = r_2 = 0}$$

$$[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1] C_n - (n+r+1)^2 C_{n+1}$$

$$\rightarrow \underline{C_{n+1} = \frac{[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1] C_n}{(n+r+1)^2}; n \geq 0}$$

$$r_1 = 0 \rightarrow \underline{C_{n+1} = C_n; n \geq 0}$$

La primera solución será utilizando $r_1 = 0$

$$n = 1 \rightarrow C_1 = \underline{C_0}$$

$$n = 2 \rightarrow C_2 = \underline{C_0}$$

$$n = 3 \rightarrow C_3 = \underline{C_0} \Rightarrow y_1(x) = C_0 x^0 [1 + x + x^2 + x^3 + \dots] \therefore \underline{\underline{y_1(x) = C_0 \frac{1}{1-x}}}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx \\ &= \frac{1}{1-x} \int \frac{e^{-\int \frac{3x-1}{x^2-x} dx}}{x^2 e^{2x}} dx \\ &= \frac{1}{1-x} \int \frac{x^{-1}(x-1)^2}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} dx = \frac{1}{1-x} \int \frac{1}{x} dx \rightarrow \underline{\underline{y_2(x) = C_1 \frac{\ln x}{1-x}}} \end{aligned}$$

$$y_h(x) = k_1 \frac{1}{1-x} + k_2 \frac{\ln x}{1-x}$$

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 \rightarrow W = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-x} & \frac{\ln x}{1-x} \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \frac{\ln x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \end{vmatrix} = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

$$u_1 = - \int \frac{g(x)y_2}{W} dx = - \int \left(\frac{1}{x^2-x}\right) \left(\frac{\ln x}{1-x}\right) x(x-1)^2 dx = \int \ln x dx = \underline{\underline{-x + x \ln x}}$$

$$u_2 = \int \frac{g(x)y_1}{W} dx = \int \left(\frac{1}{x^2-x}\right) \left(\frac{1}{1-x}\right) x(x-1)^2 dx = - \int 1 dx = \underline{\underline{-x}}$$

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (-x + x \ln x) \left(\frac{1}{1-x}\right) - x \frac{\ln x}{1-x} = \underline{\underline{\frac{x}{x-1}}}$$

$$(x) = k_1 \frac{1}{1-x} + k_2 \frac{\ln x}{1-x} + \frac{x}{x-1}$$

Problemas propuestos

A. Resolver por series de potencias en $x = 0$ las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$1. y' - y = 0, \text{ Sol. } y = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = A_0 e^x$$

$$2. y'' - y = 0, \text{ Sol. } y = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + A_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = A_0 e^x + A_1 e^{-x}$$

$$3. (x+1)y' - 1 = 0, \text{ Sol. } y = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = A_0 \ln(x+1)$$

$$4. y' - x^2 y = 0, \text{ Sol. } y = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = A_0 e^{x^3/3}$$

$$5. (2x - 1)y' + 2y = 0, \text{ Sol. } y = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$$

B. Resolver por series de potencias en $x = 0$ las siguientes ecuaciones diferenciales de condición inicial dada:

$$1. (1 - x)y' + y = x + 1, \quad y(0) = 0 \quad \text{Sol. } y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$2. y'' + y' - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{Sol. } y = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!}$$

$$3. y'' - (x + 1)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \quad \text{Sol. } y = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \dots$$

C. Resolver por series de potencias usando el método de Frobenius de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$1. 4xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{Sol. } y = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_0 (-1)^n x^n}{(2n + 1)!} + \frac{A_1 (-1)^n x^n}{2n!} \right]$$

$$2. 2xy'' + (3 - x)y' = y, \quad \text{Sol. } y = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n + 1)} A_1 x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! 2^n}$$

$$3. 2xy'' + (x + 1)y' + 3y = 0, \quad \text{Sol. } y \\ = A_0 x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{7x}{6} + \frac{21x^2}{40} + \dots \right] + A_1 x^{\frac{1}{2}} [1 - 3x^2 + 2x^3 + \dots]$$

CAPÍTULO VI

TRANSFORMADA DE LAPLACE

MOTIVACIÓN

Como se manifestó en capítulos anteriores, resolver una ecuación diferencial consiste en obtener su solución general y luego una solución particular mediante la aplicación de condiciones de contorno o condiciones iniciales a la solución general obtenida, en este capítulo se hace hincapié al método operacional de la transformada de Laplace, el cual se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales, permitiendo que diversas funciones sinusoidales, sinusoidales amortiguadas y exponenciales, puedan convertirse en funciones algebraicas de una variable compleja, y reemplazar operaciones como la diferenciación y la integración, por operaciones algebraicas en funciones equivalentes. Por tanto, una ecuación diferencial lineal se puede transformar en una ecuación algebraica de la variable compleja s , permitiendo que mediante tablas de transformadas directas e inversas y de operaciones de integrales sencillas se obtenga la solución de la ecuación diferencial.

El **objetivo general** del presente capítulo es estudiar las propiedades de la transformada de Laplace que nos permita transformar de manera sencilla las ecuaciones diferenciales en el espacio t (donde t es el tiempo) al espacio s (nuestra nueva variable), para finalmente mediante operaciones inversa retornar al espacio t .

PRERREQUISITOS PARA ABORDAR ESTE TEMA

La base teórica necesaria para el estudio de este capítulo es la siguiente:

- Aplicar los conocimientos teóricos cubiertos en cursos regulares sobre integrales impropia y en fracciones parciales, así como raíces de expresiones polinomios algebraicos.
- Identificar y trazar todo tipo de gráficas de relaciones polinómicas y trascendentes.
- Traducir al lenguaje simbólico problemas verbales relacionados con la Física, y otras aplicaciones cuyo modelo matemático corresponde a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n .

Entre las transformaciones más usuales que operan con funciones $f(x)$ cumpliendo condiciones adecuadas en el intervalo, $x \in [a, b]$, para obtener otras funciones en I , podemos citar:

La operación D de derivación: $D[f(x)] = f'(x)$

La operación I de integración: $I[f(x)] = \int_a^x f(t)dt$

La transformación M_g definida por: $M_g[f(x)] = g(x)f(x)$, siendo $g(x)$ una función concreta.

En cada caso, hay que asignar alguna restricción a las funciones $f(x)$ a las que se aplica una transformación dada. Así, en el primer ejemplo, $f(x)$ debe ser derivable en un cierto intervalo, etc.

Las tres transformaciones citadas son lineales, es decir, que pueden verificar:

$$T[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1T[f_1(x)] + c_2T[f_2(x)], \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

La Transformada de Laplace es una de las herramientas de cálculo que se usa en matemáticas, física y en muchos campos de la ingeniería que de manera sencilla permite resolver el siguiente ciclo de operaciones:

$$ED \rightarrow TL \rightarrow EA \rightarrow sol.A.TL - 1 \rightarrow \text{Solución de la ED}$$

6.1. Definición de la transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ una función definida para toda t mayor o igual a 0 ($t \geq 0$), debe cumplir que,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = F(s) \text{ exista para determinar la transformada de Laplace,}$$

es decir, la operación $\mathcal{L}\{f(t)\}$ determina que el operador \mathcal{L} se aplica a la función $f(t)$ para generar una nueva función, llamada $F(s)$.

A continuación, se muestra algunos ejemplos sobre el concepto de la transformada de Laplace.

Ejercicios de aplicación

1. Hallar la transformada de Laplace de la constante π .

Solución:

Se tiene que, $f(t) = \pi$, luego, para hallar $F(s)$, se comprueba si la integral existe o no, o sea,

$$\int_0^{\infty} e^{-st}5dt = F(s)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \pi \int_0^b e^{-st} dt$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} -\pi \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^b$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \pi dt = -\frac{\pi}{s}; s > 0$$

2. Encontrar la transformada de Laplace de t .

Solución:

Se sabe que, $f(t) = t$, por tanto, para hallar $F(s)$, se comprueba si la integral existe o no, o sea,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t dt = F(s)$$

Por definición, $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{t}{s} e^{-st} \right|_0^b - \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^b$ o sea, $\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{t}{s e^{bt}}$

Como el límite corresponde a una indeterminación, aplicamos el criterio resolución del límite mediante L'hôpital, o sea,

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{s^2 e^{bt}}, \text{ o sea,}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}; s > 0$$

3. Encontrar la transformada de Laplace de t^2 .

Solución:

Se sabe que, $f(t) = t^2$, por tanto, para hallar $F(s)$, se comprueba si la integral existe o no, o sea,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^2 dt = F(s)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cdot t^2 dt$$

La cual nos da como resultado

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{t^2}{s} e^{-st} \right|_0^b - \frac{2t}{s} e^{-st} \Big|_0^b - \frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_0^b$$

Al resolver el límite apropiadamente nos queda $\frac{2}{s^3}; s > 0$

Al resolver estos ejemplos, se destaca el hecho de que se puede generalizar la solución de funciones de este tipo a través de la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots, \text{ recordar que } 0! = 1.$$

A continuación, se muestran otras funciones que desean ser resueltas mediante la transformada de Laplace.

4. Determinar la transformada de e^{at} .

Solución:

Dejando en claro que $f(t) = e^{at}$, por lo que para hallar $F(s)$, se verifica si la integral existe o no.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = F(s)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt$$

La cual da como resultado

$$\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \Big|_0^b, \text{ o sea, } \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{s-a}; s \neq a$$

5. Hallar la transformada de $\text{sen}(mt)$.

Se tiene claro que $f(t) = \text{sen}(mt)$, por lo que para hallar $F(s)$ se debe comprobar si la integral existe o no.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen}(mt) dt = F(s)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \text{sen}(mt) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\text{sen}(mt)e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \int_0^b \frac{\cos(mt)e^{-st}}{s} dt$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\text{sen}(mt)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{m \cos(mt)e^{-st}}{s^2} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{m^2 \text{sen}(mt)e^{-st}}{s^2} dt$$

$$= \frac{s^2}{s^2 + m^2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\text{sen}(mt)e^{-st}}{s} \Big|_0^b - \frac{m \cos(mt)e^{-st}}{s^2} \Big|_0^b$$

Dado que las funciones $\text{sen}(mt)$ y $\cos(mt)$, siempre están oscilando entre 1 y -1 por lo que cualquier valor que se la asigne no causará una indeterminación, entonces al considerar esto y evaluando los límites de integración, se tiene,

$$\left(\frac{s^2}{s^2 + m^2}\right) \left(\frac{m}{s^2}\right) \text{ y por tanto, } \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen}(mt) dt = \frac{m}{s^2 + m^2}$$

6. Encontrar la transformada de Laplace para $\cos(mt)$.

Solución:

Las funciones $\text{sen}(mt)$ y $\cos(mt)$ tienen transformadas similares, para hallarla se debe realizar un proceso de integración muy similar al anterior, y debido a que el proceso es conocido se deja expresada la respuesta:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos(mt) dt = \frac{s}{s^2 + m^2}$$

6. Encontrar la transformada de Laplace de la siguiente función por tramos

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 4t^2 & 1 \leq t < 4. \\ e^{-2t} & t \geq 4 \end{cases}$$

Solución:

Cada función tiene su respectiva transformada por lo que, al analizar cada función por tramos, se obtiene,

$$\int_0^1 1 \cdot e^{-st} dt + \int_1^4 4t^2 \cdot e^{-st} dt + \int_4^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-st} dt$$

Puesto que se conoce la forma de estas funciones, se debe tener cuidado con los límites de integración, o sea,

$$-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^1 + 4 \left(-\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_1^4 - \frac{2t}{s} e^{-st} \Big|_1^4 - \frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_1^4 \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2} \Big|_4^b$$

Al aplicar correctamente los límites de integración y evaluando el límite se tiene como resultado:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{se^s} + 4 \left(\frac{1}{se^s} - \frac{16}{se^{4s}} + \frac{2}{se^s} + \frac{8}{se^{4s}} + \frac{2}{s^3 e^s} - \frac{2}{s^3 e^{4s}} \right) + \frac{1}{s+2}$$

7. Hallar la transformada de Laplace de $\sinh(at)$.

Por definición, se conoce que $\sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

Al aplicar la definición de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt - \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt \right) \end{aligned}$$

Por conocimiento de cálculo se sabe cuál es el resultado de estas integrales, por lo que el resultado queda expresado por:

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right), \text{ o sea, } \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, s \neq a$$

▪ La transformada de Laplace es un operador lineal, lo cual quiere decir que debe cumplir:

$$\mathcal{L}\{cf(t) + dg(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\} + d\mathcal{L}\{g(t)\}$$

8. Encuentre la transformada de Laplace de $5t + \text{sen}(-4t)$.

Solución:

$$\mathcal{L}\{5t + \text{sen}(-4t)\} = 5\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{\text{sen}(-4t)\}$$

De lo tratado anteriormente, se puede observar que la transformada de esta función corresponde a,

$$5\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{4}{s^2 + 16}$$

10. Determinar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 - e^{2t}$

Solución

Desde el menú **New**, pinchamos en **Script**, generándose una ventana en donde se ingresan las diferentes instrucciones a procesar.

Para resolver el problema en referencia se realiza los siguientes pasos:

a. En la ventana del Editor, escribir el siguiente script:

```
clc
clear all
syms t
y1=laplace(t^(2)-exp(2*t));
y=simplify(y1);
pretty(y)
```

b. Guardar con el nombre ejer_5_1 y ejecutar.

En la ventana de comandos se tiene por salida,

```
>> 2  1
    --- - ----
    3  s - 2
    s
```

lo que puede ser escrito como, $\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2}$

Ejercicios propuestos

Encuentre las transformadas de las siguientes funciones.

1. $\text{sen}(a + t)$ Sol. $\frac{\cos(a) + s \cdot \text{sen}(a)}{s^2 + 1}$

2. $\cos^2(at)$ Sol. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4a^2} \right)$

3. $\cos^3(t)$ Sol. $\frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}$

$$4. 6 - t^2 \text{ Sol. } \frac{6s^2 - 2}{s^3}$$

$$5. 1 - 2t^3 \text{ Sol. } \frac{1}{s} - \frac{12}{s^4}$$

$$6. \cosh(at) \text{ Sol. } \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$7. 6t^2 + e^t \text{ Sol. } \frac{s^3 + 12s - 12}{s^3(s-1)}$$

$$8. e^{-8t} + \sin(2t) \text{ Sol. } \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{s + 8}$$

$$9. t^3 + \frac{t}{e^4} + \frac{\cos(5t)}{5} \text{ Sol. } \frac{6}{s^4} + \frac{1}{e^4 s^2} + \frac{s}{5(s^2 + 25)}$$

$$10. \frac{1}{9} \sin(3t) + \cos^2(t) \text{ Sol. } \frac{1}{6} \left(\frac{3s}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 9} + \frac{3}{s} \right)$$

6.2. Transformada inversa de Laplace

Por definición se conoce que la transformada de Laplace es una operación lineal, lo que implica que si se puede transformar una función en términos de t a otra en términos de s , entonces este proceso se puede invertir (proceso reversible).

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Ejemplos de aplicación:

$$1. \text{ Encontrar la transformada inversa de } \frac{2}{s^4}.$$

Solución:

Se trata de hallar una función en términos de t , tal que genere el valor que se desea transformar,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} = f(t)$$

$$\text{Aplicando linealidad, se tiene, } 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$\text{La cual puede ser llevada a la forma: } \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ o sea, } \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

Luego, la función anterior puede ser reescrita como:

$$\frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\}, \text{ resultando que la transformada inversa solicitada es: } \frac{t^3}{3}$$

$$2. \text{ Hallar la transformada inversa de Laplace de } \frac{25}{s-5}.$$

Solución:

Se trata de hallar una función en términos de t , tal que genere el valor que se desea transformar,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{25}{s-5}\right\} = f(t)$$

Al aplicar linealidad, se tiene,

$$25\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$$

Se puede apreciar que esta función tiene una forma similar a la expresión $\frac{1}{s-a}$, por lo

que considerando esto, se tiene por resultado,

$$25\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 25e^{5t}$$

3. Determinar la transformada inversa de Laplace de $\frac{4}{s^2+4} + \frac{2s}{s^2+4}$.

Solución:

Se trata de hallar una función en términos de t , que genere el valor a transformar, o sea,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4} + \frac{2s}{s^2+4}\right\} = f(t)$$

Aplicando linealidad, se tiene,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

Y de los conceptos básicos de la transformada inversa de estas funciones, nos conduce al siguiente resultado:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \text{sen}(2t) + 2\text{cos}(2t)$$

Ejercicios propuestos

Determinar las transformadas inversas de Laplace en las siguientes funciones.

1. $\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+2}$ Sol. $t + e^{-2t}$

2. $\frac{1}{5s-2}$ Sol. $\frac{1}{5}e^{5t/2}$

3. $\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s} + \frac{7}{s-4}$ Sol. $\frac{1}{2}t^2 + 1 + 7e^{4t}$

4. $\frac{2s}{2s^2+1}$ Sol. $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

5. $\frac{4s}{4s^2-1}$ Sol. $\cosh\left(\frac{1}{2}t\right)$

6. $\frac{3}{3s-1} + \frac{10}{s^2}$ Sol. $e^{t/3} + 10t$

$$7. \frac{1}{9s^2-1} \text{ Sol. } \frac{1}{3} \sinh\left(\frac{1}{3}t\right)$$

$$8. \frac{8s-3}{s^2+9} \text{ Sol. } 8 \cos(3t) - \sin(3t)$$

$$9. \frac{(s+2)^2}{s^3} \text{ Sol. } 1 + 4t + 2t^2$$

$$10. \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{4}{s+2} \text{ Sol. } 1 + 5t - 4e^{-2t}$$

6.3. Traslación sobre el eje s

La transformada de Laplace se define como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Pero qué pasaría si ahora a $f(t)$ se le multiplica otra función en términos de t .

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), a \in \mathbb{R}$$

Resulta ser un tanto curioso y poco creíble que si a nuestra función se le multiplica e^{at} , lo único que cambiara en nuestra transformada será que está se ha trasladado un valor a .

Demostración:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt$$

Agrupando nos queda

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt$$

Que por definición corresponde a $F(s-a)$

Ejemplos de aplicación:

$$1. \text{ Determinar la transformada inversa de } \frac{s+4}{(s+4)^2+4}.$$

Solución:

Si prestamos atención al denominador y al numerador, observamos que existe un factor $s+4$, que se repite en los dos. Así que, recordando que una función trasladada es simplemente $F(s-a)$.

Por lo que se puede deducir que la función inicialmente era $\frac{s}{s^2+4}$ la cual se conoce como la transformada del $\cos(2t)$.

Entonces quiere decir que el factor que se ha trasladado es $a = -4$.

Por lo que concluimos que la transformada inversa de la función es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+4)^2+4}\right\} = e^{-4t}\cos(2t)$$

2. Encontrar la transformada de Laplace de $e^{2t}\sinh(t)$.

Solución:

Recordando que el factor e^{2t} es solo un factor de traslación, se trata de hallar la transformada del otro factor, o sea, $\mathcal{L}\{\sinh(t)\}$

La cual es una función simple cuya transformada es:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

Entonces al evaluar $F(s - a)$, conociendo que $a = 2$.

Por lo que la solución es:

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\sinh(t)\} = \frac{1}{(s-2)^2 - 1}$$

3. Hallar la transformada inversa de: $\frac{s+3}{s^2+6s+10}$.

Solución:

Se observa que para este denominador no está a la simple vista el valor $s + 3$, pero aplicando algebra elemental, se tiene,

$$s^2 + 6s + 10 = (s^2 + 6s + 9) + 1$$

Aquí se obtiene un trinomio cuadrado perfecto por lo que el denominador de la expresión quedaría así,

Al realizar un cambio de variable en la función, se obtiene: $s + 3 = s'$

Por tanto, la expresión a la cual se aplica la derivada inversa es, $\frac{s'}{s'^2 + 1}$

que corresponde con la transformada del $\cos(t)$, por lo que finalmente la transformada inversa es,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+6s+10}\right\} = e^{-3t}\cos(t)$$

Ejercicios propuestos

Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

1. $e^t\cos(4t)$ Sol. $\frac{s-1}{(s-1)^2+16}$

2. $(t+2)^2e^t$ Sol. $\frac{4s^2-4s+2}{(s-1)^3}$

$$3. 3\text{sen}(4t)e^{-4t} \text{ Sol. } \frac{12}{(s+4)^2+16}$$

$$4. \text{sen}^2(t)e^{4t} \text{ Sol. } \frac{2}{(s-4)((s-4)^2+4)}$$

$$5. \text{cos}^2(t)e^{2t} \text{ Sol. } \frac{(s-2)^2+2}{(s-2)((s-2)^2+4)}$$

$$6. t^6 e^t \text{ Sol. } \frac{720}{s-1}$$

$$7. e^{\frac{t}{4}-4t} \text{ Sol. } \frac{4}{4(s+4)-1}$$

$$8. \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 2 \\ 0, & 2 < t \leq 4 \\ t, & 4 < t \end{cases} \text{ Sol. } \frac{1}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-4s}$$

$$9. \begin{cases} 3t, & 0 < t \leq 5 \\ 3, & 5 < t \leq 7 \\ 0, & 7 < t \end{cases} \text{ Sol. } 3 \left(-\frac{e^{-5s}}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-5s} + \frac{1}{s^2} \right) + 3 \left(\frac{2e^{-7s}}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} \right)$$

$$10. \text{sen}(t)\text{cos}(t)e^{-t} \text{ Sol. } \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

6.4. Fracciones parciales

En curso de matemáticas anteriores a este, se trató sobre este tema, no obstante, las fracciones parciales son utilizadas cuando se desea descomponer el denominador en expresiones lo más simple posible, es decir, se requiere transformar una fracción compleja en varias fracciones simples, por ello se debe también estar pendiente de los numeradores que surgen de dicha fracción, se pueden encontrar varios casos de fracciones parciales:

Caso 1. Factores lineales distintos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{c'x + d'} + \frac{B}{c''x + d''} + \frac{C}{c'''x + d'''}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2}{(s+3)(s+2)}$$

Aplicando a la forma deseada en resolver se tiene $\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2}$

Para hallar los valores que se piden se debe de generar un sistema de ecuaciones, y evaluando en los valores que causa la inconsistencia, es decir,

$$\frac{A(s+2) + B(s+3)}{(s+2)(s+3)} = \frac{2}{(s+3)(s+2)}$$

$$A(s + 2) + B(s + 3) = 2$$

Entonces cuando $s = -2$, se tiene

$$B = 2$$

Y cuando $s = -3$, se tiene

$$A = -2$$

Por lo que las ecuaciones quedarían así

$$-\frac{2}{s + 3} + \frac{2}{s + 2}$$

Por tanto, como transformada inversa respectiva es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 5s + 6}\right\} = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

Caso 2. Factores lineales repetidos.

Tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{c'x + d'} + \frac{B}{(c'x + d')^2} + \frac{C}{(c'x + d')^3} + \dots + \frac{N}{(c'x + d')^n}$$

Ejemplo de aplicación

1. Descomponer en fracciones parciales: $\frac{4}{(s + 2)^2(s + 1)}$

Aplicando a la forma requerida se tendría:

$$\frac{A}{s + 2} + \frac{B}{(s + 2)^2} + \frac{C}{s + 1}$$

Para hallar los valores que se piden se debe de generar un sistema de ecuaciones evaluando en los valores que causarían una inconsistencia.

$$\frac{A(s + 2)(s + 1) + B(s + 1) + C(s + 2)^2}{(s + 2)^2(s + 1)} = \frac{4}{(s + 1)(s + 2)^2}$$

$$A(s + 2)(s + 1) + B(s + 1) + C(s + 2)^2 = 4$$

Cuando $s = -2$, se tiene que:

$$B = -4$$

Cuando $s = -1$, se tiene que:

$$C = 4$$

Cuando $s = 0$, se tiene que:

$$2A + B + 4C = 4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$A = -4$$

Por lo que nuestras fracciones serán:

$$-\frac{4}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{4}{s+1}$$

Las cuales son funciones simples cuyas transformadas inversas son:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2(s+1)}\right\} = -4e^{-2t} - 4te^{-2t} + 4e^{-t}$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles.

Posee la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(2c'x + d')}{c'x^2 + d'x + e'}$$

Ejemplo de aplicación:

2. Descomponer en fracciones parciales: $\frac{3s+2}{(s^2+1)(s-2)}$

Aplicando a la forma requerida se tendría:

$$\frac{2sB + A}{(s^2 + 1)} + \frac{C}{s - 2}$$

Para hallar los valores que se piden se debe de generar un sistema de ecuaciones evaluando en los valores que causarían una inconsistencia.

$$\frac{(2sB + A)(s - 2) + C(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s - 2)} = \frac{3s + 2}{(s^2 + 1)(s - 2)}$$

Al efectuar las operaciones respectivas, las constantes resultan ser:

$$A = -1/5, \quad B = 8/5, \quad C = -8/5$$

Lo cual genera la siguiente fracción parcial:

$$\frac{8s - 1}{5(s^2 + 1)} - \frac{8}{5(s - 2)} = \frac{8s}{5(s^2 + 1)} - \frac{1}{5(s^2 + 1)} - \frac{8}{5(s - 2)}$$

Cuyas transformadas inversas son:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{(s^2+1)(s-2)}\right\} = -\frac{8}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sen(t) + \frac{8}{5}e^{2t}$$

Caso 4. Factor cuadrático irreducible repetido.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(2c'x + d') + B}{c'x^2 + d'x + e'} + \frac{C(2c'x + d') + D}{(c'x^2 + d'x + e')^2}$$

Ejemplo de aplicación:

3. Descomponer en fracciones parciales: $\frac{(1-s+2s^2-s^3)}{s(s^2+1)^2}$

Aplicando a la forma requerida se tendría:

$$\frac{A}{s} + \frac{2sB + C}{(s^2 + 1)} + \frac{2sD + E}{(s^2 + 1)^2}$$

Para hallar los valores que se piden se debe de generar un sistema de ecuaciones evaluando en los valores que causarían una inconsistencia.

$$\frac{A(s^2 + 1)^2 + 2s^2B(s^2 + 1) + 2sC(s^2 + 1) + 2s^2D + sE}{s(s^2 + 1)^2} = \frac{(1 - s + 2s^2 - s^3)}{s(s^2 + 1)^2}$$

Al efectuar las operaciones respectivas, las constantes resultan ser:

$$A = 1, B = -1/2, C = -1, D = 1/2, E = 0$$

Lo cual genera la siguiente fracción parcial:

$$\frac{A}{s} + \frac{2sB + C}{(s^2 + 1)} + \frac{2sD + E}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{-s - 1}{s^2 + 1} + \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

Cuyas transformadas inversas son:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1 - s + 2s^2 - s^3)}{s(s^2 + 1)^2} \right\} = 1 - \cos(t) - \sin(t) + \frac{1}{2}t\sin(t)$$

Caso 5. Fracción impropia.

Esto sucede cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador.

Ejemplo de aplicación:

4. Descomponer en fracciones parciales: $\frac{s^2 + s + 1}{s^2 - 1}$

Solución:

Existen algunas maneras de conseguir reducir el grado del numerador uno de ellos es el siguiente.

Se trata de cambiarle algo a la función de tal forma que se obtenga:

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + s + 1}{s^2 - 1} &= 1 + 1 \\ \frac{s^2 + s + 1 - s^2 + 1}{(s^2 - 1)} + 1 & \\ \frac{s + 2}{(s^2 - 1)} + 1 & \end{aligned}$$

Lo cual se expresa de una manera más simple como sigue:

$$\frac{3}{2(s - 1)} - \frac{1}{2(s + 1)} + 1$$

Cuya transformada inversa es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + s + 1}{s^2 - 1} \right\} = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \delta(t)$$

6.5. Propiedades de la transformada de Laplace.

Existen ciertas funciones muy complejas, como por ejemplo $\cosh(t) * t * \cos(t)$ cuyas transformadas son demasiado complicadas de hallar e incluso en el tema anterior se llegaron a tener transformadas inversas que no pueden tratar directamente con los métodos conocidos, es por ello que, en lo posterior se plantean otros métodos para su resolución.

6.5.1. Transformada de la derivada de una función.

$$\text{Sea } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\text{Entonces } \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

$$\text{Tal que } u = e^{-st}, dv = f'(t) dt$$

$$\text{Por lo que } du = -se^{-st}, v = f(t)$$

$$\frac{f(t)}{e^{st}} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$-f(0) + sF(s)$$

$$\text{Solución: } sF(s) - f(0)$$

Si se tuviera $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ la solución sería $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

Y si fuera $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ la solución sería $s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$.

A continuación, se muestran algunos ejemplos empleando la transformada de Laplace.

1. Encuentre la transformada de $3t^2$.

Aplicando el método de la primera derivada, se tiene,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{3t^2\} = s\mathcal{L}\{t^3\} - f(0)$$

Note que el valor t^3 viene a ser lo que se obtiene de integrar la función, sin considerar valores constantes.

$$\mathcal{L}\{3t^2\} = s \left(\frac{6}{s^4} \right) - 0$$

Al simplificar, se obtiene el valor deseado, o sea,

$$\mathcal{L}\{3t^2\} = \frac{6}{s^3}$$

2. Obtenga el valor de la transformada para $t \cdot \text{sen}(t)$.

Solución:

Aplicando el método de la primera y segunda derivada, se tiene,

$$f'(t) = \text{sen}(t) + t\cos(t); f'(0) = 0$$

$$f''(t) = 2\cos(t) - t\text{sen}(t)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{2\cos(t) - t\text{sen}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{t\text{sen}(t)\} - 0 - 0$$

Aplicando linealidad en las operaciones, se obtiene,

$$\mathcal{L}\{2\cos(t)\} - \mathcal{L}\{t\text{sen}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{t\text{sen}(t)\}$$

Agrupemos a conveniencia

$$\mathcal{L}\{2\cos(t)\} = (s^2 + 1)\mathcal{L}\{t\text{sen}(t)\}$$

$$\frac{2s}{s^2 + 1} = (s^2 + 1)\mathcal{L}\{t\text{sen}(t)\}$$

Despejando se obtiene que el valor de la transformada de Laplace corresponde a:

$$\mathcal{L}\{t\text{sen}(t)\} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

3. Determinar la transformada de Laplace de $t \cdot \cos(t)$.

Solución:

Aplicando el método de la primera y segunda derivada, se tiene,

$$f'(t) = \cos(t) - t\text{sen}(t); f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -2\text{sen}(t) - t\cos(t)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{-2\text{sen}(t) - t\cos(t)\} = s^2\mathcal{L}\{t\cos(t)\} - 0 - 1$$

Luego, aplicando un poco de linealidad

$$-2\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\} - \mathcal{L}\{t\cos(t)\} = s^2\mathcal{L}\{t\cos(t)\} - 1$$

Agrupando los términos a conveniencia, se tiene,

$$-2\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\} + 1 = (s^2 + 1)\mathcal{L}\{t\cos(t)\}$$

$$-\frac{2}{s^2 + 1} + 1 = (s^2 + 1)\mathcal{L}\{t\cos(t)\}$$

Y finalmente al despejar la transformada de Laplace se obtiene,

$$\mathcal{L}\{t \cdot \cos(t)\} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

5.5.2. Transformada de la integral de una función.

Sea $f(t)$ una función continua por tramos para un $t \geq 0$, y de orden exponencial α .

Considerando que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Demostración:

$$\text{Sea } G(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$\text{Entonces } G'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t)$$

Al evaluar la función en 0, se tiene,

$$G(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0$$

Aplicando el teorema de derivada de la transformada de Laplace, se observa que,

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0)$$

La hipótesis de la transformada de una integral es que $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$

$$\text{Por lo que, } \mathcal{L}\{G'(t)\} = G(s) = s \int_0^t e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt$$

Luego, integrando por parte, se obtiene,

$$s \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

o sea, $\mathcal{L}\{G'(t)\} = F(s)$

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{G'(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Ejemplos:

Encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones:

$$1. \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

Solución:

Para resolver este tipo de ejercicio, se considera que $\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$

Al igualar a la transformada de Laplace respectiva, se tiene:

$$\frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}, \text{ o sea, } F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

cuya transformada inversa es simplemente $\text{sen}(t)$.

Al considerar y aplicar correctamente el principio de la transformada de la

integral de una función, se tiene, $\int_0^t \text{sen}(\tau) d\tau$

y luego de integrar esta función se obtiene que la función original es $1 - \cos(t)$

$$2. \frac{1}{s^2(s-1)}$$

Para resolver este tipo de ejercicio, se considera que $\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$

Al igualar a la transformada de Laplace respectiva, se tiene:

$$\frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}, \text{ o sea, } F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

Cuya transformada inversa no se conoce por lo cual al aplicar el mismo proceso dos veces, se tiene,

$$\frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s(s-1)}, \text{ o sea, } F(s) = \frac{1}{s-1}$$

La transformada inversa resulta ser e^t .

Al considerar y aplicar correctamente el principio de la transformada de la integral de una función, se obtiene,

$$\int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1$$

Cuya transformada inversa no se conoce por lo cual al aplicar el mismo proceso dos veces, se tiene, $e^t - t$.

$$3. \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 5s}$$

Solución:

Al descomponer en factores simples el denominador, se obtiene,

$$\frac{6}{s(s+5)(s+1)}$$

En esta parte se tiene dos opciones, la primera trabajar todo como fracciones parciales o realizar el método de integración de una transformada. Al analizar los casos, se tiene,

- Por descomposición en fracciones parciales

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s+1}$$

$$\frac{A(s+5)(s+1) + sB(s+1) + sC(s+5)}{s(s+5)(s+1)} = \frac{6}{s(s+5)(s+1)}$$

$$A(s+5)(s+1) + sB(s+1) + sC(s+5) = 6$$

Cuando $s = 0$, se tiene:

$$A = \frac{6}{5}$$

Cuando $s = -5$, se tiene:

$$B = \frac{3}{10}$$

Cuando $s = -1$, se tiene:

$$C = -\frac{3}{2}$$

Obteniéndose así:

$$\frac{6}{5} \frac{1}{s} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s+5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

Cuyas transformadas son simplemente:

$$\frac{6}{5} + \frac{3}{10} e^{-5t} - \frac{3}{2} e^{-t}$$

- Otro método consiste en realizar lo siguiente:

Primero factorizar la expresión: $\frac{1}{s} \left(\frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+1} \right)$

Luego, mediante operaciones algebraicas se obtienen los coeficientes A y B o sea,

$$A = -\frac{3}{2}; \quad B = \frac{3}{2} \text{ y con ello, la expresión anterior corresponde a,}$$

$$\frac{1}{s} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+5} \right)$$

Puesto que se desea conocer las transformadas inversas de $\frac{1}{s+1}$ y $\frac{1}{s+5}$, se tiene,

Al considerar y aplicar correctamente el principio de la transformada de la integral de una función, se obtiene,

$$= \frac{3}{2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} - \frac{3}{2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s(s+5)} \right\}$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^t e^{-\tau} d\tau - \frac{3}{2} \int_0^t e^{-5\tau} d\tau$$

Obteniendo como resultado:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 5s} \right\} = -\frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10} e^{-5t} - \frac{3}{10}$$

Con lo cual se obtiene la misma solución:

$$4. \frac{s+1}{s^2(s^2+4)}$$

Para resolver este tipo de ejercicios, se considera que, $\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$

Al igualar a la transformada de Laplace respectiva, se tiene:

$$\frac{1}{s} F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4)}$$

Cuya transformada inversa no se conoce por lo cual al aplicar el mismo proceso dos veces, se tiene,

$$\frac{1}{s} F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4)}, \text{ o sea, } F(s) = \frac{s+1}{s^2+4}$$

La transformada inversa ha resultado ser $\cos(2t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2t)$.

Al considerar y aplicar correctamente el principio de la transformada de la integral de una función, se obtiene,

$$\int_0^t \left[\cos(2\tau) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\tau) \right] d\tau$$

$$= \frac{\text{sen}(2t)}{2} - \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{4}$$

Cuya transformada inversa no se conoce por lo cual al aplicar el mismo proceso

dos veces, se tiene, $-\frac{\cos(2t)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} \text{sen}(2t)$

Ordenando la expresión se tiene

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s^2+4)} \right\} = \frac{1}{4} \left(1 + t - \cos(2t) - \frac{1}{2} \text{sen}(2t) \right)$$

$$5. \frac{2}{s(s^2 - 1)}$$

Solución:

Para resolver este tipo de ejercicios se condiera lo siguiente, $\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{1}{s}F(s)$

Por lo que al igualar a la transformada de Laplace en referencia, se tiene,

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{2}{s(s^2 - 1)}, \text{ o sea, } F(s) = \frac{2}{(s^2 - 1)}$$

cuya transformada inversa es simplemente $\sinh(t)$.

Por lo que al aplicar correctamente el principio de la transformada de la

integral de una función, se tiene, $\int_0^t \sinh(\tau) d\tau$, es decir,

$$\text{integrando la función se obtiene, } \mathcal{L}\left\{\frac{2}{s(s^2 - 1)}\right\} = 2(\cosh(t) - 1)$$

Ejercicios propuestos

Encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones aplicando fracciones parciales.

$$1. \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^2} \text{ Sol. } t^2 \sin(t)$$

$$2. \frac{1}{s^3 + s} \text{ Sol. } 1 - \cos(t)$$

$$3. \frac{1 - s^2}{(s + 1)(s - 3)^2(2s + 1)} \text{ Sol. } \frac{3}{49}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{2}{7}te^{3t} - \frac{3}{49}e^{3t}$$

$$4. \frac{s}{(s + 1)^2(s - 1)} \text{ Sol. } \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$$

$$5. \frac{s^2 - 4s - 2}{s^3 - 2s^2 + 4s - 8} \text{ Sol. } -\frac{3}{4}e^{2t} + \frac{7}{4}\cos(2t) - \frac{1}{4}\sin(2t)$$

Encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones utilizando el teorema de integración de la transformada de Laplace.

$$1. \frac{1}{s^2(s + 3)} \text{ Sol. } -\frac{1}{9}(1 - 3t - e^{-3t})$$

$$2. \frac{1}{s(s - 7)} \text{ Sol. } \frac{1}{7}(e^{7t} - 1)$$

$$3. \frac{s + 3}{s^2(s^2 + 9)} \text{ Sol. } \frac{t}{3} + \frac{1}{9}(1 - \cos(3t) - \sin(3t))$$

$$4. \frac{4}{s^3(s-2)} \text{ Sol. } \frac{e^{2t}}{2} - t - t^2 - \frac{1}{2}$$

$$5. \frac{2}{s^2(s^2-4)} \text{ Sol. } \frac{1}{4} \sinh(2t) - \frac{1}{2}t$$

6.6. Ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace

El método de resolver ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace es simple y consiste en aplicar la transformada de Laplace término a término de la ecuación diferencial planteada, para luego despejar la variable dependiente, sobre la cual se aplicará la transformada inversa logrando así la solución respectiva.

Se considera que las ecuaciones diferenciales expresan como variable independiente el tiempo, o sea, son funciones $f = f(t)$, y por tanto, $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$.

A manera de ejemplo se pide resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condición inicial

$$1. y'' - 2y' + 5y = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solución:

Lo primero es aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación, o sea,

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 5y\} = 0$$

Luego, al emplear linealidad, se tiene,

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Se observa que hay una forma usual de resolverla, y es que son las transformadas de derivadas por lo que esto también se puede expresar así:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 2s\mathcal{L}\{y\} + 2y(0) + 5\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Reemplazando las condiciones iniciales se tiene,

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s * 0 - 1 - 2s\mathcal{L}\{y\} + 0 + 5\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 2s\mathcal{L}\{y\} + 5\mathcal{L}\{y\} = 1$$

Luego se realizan operaciones algebraicas de conveniencia, o sea,

$$\mathcal{L}\{y\}\{s^2 - 2s + 5\} = 1$$

Al despejar la transformada de la variable dependiente, se tiene,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{\{s^2 - 2s + 5\}}$$

Luego, al aplicar la transformada inversa en ambos miembros de la expresión:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\{s^2 - 2s + 5\}}\right\}$$

Reescribiendo la expresión anterior,

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \right\}$$

Cuya transformada inversa es,

$$e^{-2t} \text{sen}(t)$$

En otras palabras, $y'' - 2y' + 5y = 0$ sujeta a $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ tiene por solución

$$y = e^{-2t} \text{sen}(t)$$

2. Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales,

$$y'' + y' - 6y = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación.

$$\mathcal{L}\{y'' + y' - 6y\} = 0$$

Luego, al usar linealidad, se tiene,

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} - 6\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Se observa que hay una forma usual de resolverla, y es que son las transformadas de derivadas por lo que esto también se puede expresar así:

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + s\mathcal{L}\{y\} - y(0) - 6\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Reemplazando las condiciones iniciales, se obtiene:

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s \cdot 0 - 2 + s\mathcal{L}\{y\} + 0 + 5\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} + 2s\mathcal{L}\{y\} - 6\mathcal{L}\{y\} = 2$$

Luego se realizan operaciones algebraicas de conveniencia, o sea,

$$\mathcal{L}\{y\} \{s^2 + s - 6\} = 2$$

Al despejar la transformada de la variable dependiente, se tiene,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{\{s^2 + s - 6\}}$$

Luego, al aplicar la transformada inversa en ambos lados de la igualdad:

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{\{s^2 + s - 6\}} \right\}, \text{ y reescribiendo, se tiene,}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{\{(s+3)(s-2)\}} \right\} \text{ y al descomponer la fracción dada en fracciones simples,}$$

$$\text{o sea, } \frac{2}{(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2}$$

$$\frac{A(s-2) + B(s+3)}{(s+3)(s-2)} = \frac{2}{(s+3)(s-2)}$$

$$A(s - 2) + B(s + 3) = 2$$

Cuando $s = 2$ se tiene:

$$5B = 2$$

Cuando $s = -3$ se tiene:

$$-5A = 2$$

Por lo que tendríamos

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{5(s-2)} - \frac{2}{5(s+3)} \right\},$$

cuya transformada inversa de esta función es $\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-3t}$

En otras palabras, la ecuación diferencial tiene como solución:

$$y = \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-3t}$$

3. Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales,

$$ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación.

$$\mathcal{L}\{ty'' + (1 - 2t)y' - 2y\} = 0$$

Luego, al usar linealidad, se tiene,

$$\mathcal{L}\{ty''\} + \mathcal{L}\{(1 - 2t)y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \text{ o sea,}$$

$$-\frac{d}{ds} [s^2 \mathcal{L}\{y\} - s \cdot y(0) - y'(0)] + s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + 2 \frac{d}{ds} [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Reemplazando las condiciones iniciales se tiene,

$$-\frac{d}{ds} [s^2 \mathcal{L}\{y\} - s \cdot 1 - 2] + s\mathcal{L}\{y\} - 1 + 2 \frac{d}{ds} [s\mathcal{L}\{y\} - 1] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Luego se realizan operaciones algebraicas de conveniencia, o sea,

$$\left[-s^2 \mathcal{L}\{y\} - s \frac{dy}{ds} + 1 \right] + s\mathcal{L}\{y\} - 1 + 2 \left[\mathcal{L}\{y\} - s \frac{dy}{ds} \right] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Resolviendo la expresión anterior por separación de variables, se obtiene,

$$(s^2 - 2s) \frac{dy}{ds} + sy = 0, \text{ o sea, } \frac{dy}{y} = -\frac{ds}{s-2}$$

Integrando ambos lados de la ecuación, $\ln y(s) = -\ln(s-2)$, o sea, $y(s) = \frac{C}{s-2}$

Finalmente, tomando la transformada inversa, se obtiene,

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{C}{s-2} \right\}, \text{ es decir, } y(t) = Ce^{2t}$$

Como $y(0) = 1, y(0) = Ce^{2 \cdot 0} = 1, C = 1$, luego, $y(t) = e^{2t}$

4. Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales,
 $ty'' + 2y' + ty = \text{sen } t \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación.

$$\mathcal{L}\{ty'' + 2y' + ty\} = \mathcal{L}\{\text{sen } t\}$$

Luego, al usar linealidad, se tiene,

$$\mathcal{L}\{ty''\} + \mathcal{L}\{(1 - 2t)y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \text{ o sea,}$$

$$-\frac{d}{ds} [s^2 \mathcal{L}\{y\} - s \cdot y(0) - y'(0)] + 2[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - \frac{d}{ds} [\mathcal{L}\{y\}] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Reemplazando las condiciones iniciales se tiene,

$$-\frac{d}{ds} [s^2 \mathcal{L}\{y\} - s \cdot 0 - 0] + 2[s\mathcal{L}\{y\} - 0] - \frac{d}{ds} [\mathcal{L}\{y\}] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$-\frac{d}{ds} [s^2 \mathcal{L}\{y\}] + 2[s\mathcal{L}\{y\}] - \frac{d}{ds} [\mathcal{L}\{y\}] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Luego se realizan operaciones algebraicas de conveniencia, con lo que tiene,

$$\left(-2s\mathcal{L}\{y\} - s^2 \frac{dy}{ds}\right) + 2s\mathcal{L}\{y\} - \frac{dy}{ds} = \frac{1}{s^2 + 1}, \text{ o sea, } (1 + s^2) \frac{dy}{ds} = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

Resolviendo la expresión anterior por separación de variables, se obtiene,

$$dy = -\frac{ds}{(s^2 + 1)^2}, \text{ o sea, } y(s) = -\frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) + C$$

Finalmente, tomando la transformada inversa, se obtiene,

$$y(s) = -\frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) + C$$

$$\mathcal{L}\{y(s)\} = \mathcal{L} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) + C \right\}, \text{ y de tablas, se obtiene,}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen } t}{t} - \cos t \right] - C\delta(t) = 0, \text{ y al evaluar en la condición inicial,}$$

$$y(0) = \frac{1}{2} (1 - 1) - C\delta(t) = 0, \text{ o sea, } C = 0, \text{ por lo tanto se tiene:}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen } t}{t} - \cos t \right)$$

Mediante transformada de Laplace, resolver los siguientes problemas de valores iniciales.

1. $y'' - y = 1 \quad y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}$ Sol. $e^{\frac{1}{2}t} - 1$

2. $y'' + 9y = \frac{3}{2} \text{sen}(2t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$ Sol. $\frac{3}{10} \text{sen}(2t) - \frac{1}{5} \text{sen}(3t)$

$$3. y'' + 4y = \text{sen}(2t) \quad y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{5} \quad \text{Sol. } \frac{4}{15} \text{sen}(2t) - \frac{1}{12} \text{sen}(4t + \pi)$$

$$4. y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t} \quad y(0) = 0, y'(0) = 4 \quad \text{Sol. } e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t$$

$$5. y'' + 6y' + 13y = 10e^{-2t} \quad y(0) = 3, y'(0) = -13 \quad \text{Sol. } 2e^{-2t} + e^{-3t} \cos(2t) - 3e^{-3t} \text{sen}(2t)$$

6.7. Transformadas de funciones especiales

Existen algunas funciones que al aplicar la transformada de Laplace requieren de un tratamiento particular, entre estas tenemos:

Función escalón unitario

Esta función es comúnmente utilizada cuando existen funciones discontinuas que perturban un modelo matemático, la función escalón unitaria está definida como:

$$U(t - a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

Encuentre la gráfica de la siguiente función.

$$f(t - 1)^3 U(t - 1)$$

Solución:

Empecemos identificando la función:

Se aprecia que $f(t) = f(t - 1)^3$, lo cual se interpreta como el desplazamiento de la función, por lo que se tiene que si la función t^3 , se la desplaza en una unidad hacia la derecha $(t - 1)^3$ su gráfico experimenta el cambio siguiente:

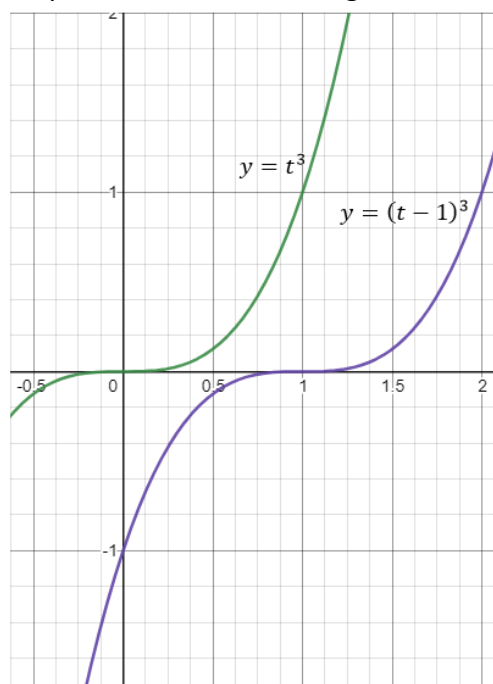


Figura 6.1

Bajo esta consideración la función $f(t - 1)^3 U(t - 1)$, toma la forma:

$$f(t - 1)^3 U(t - 1) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^3, & t \geq 1 \end{cases}$$

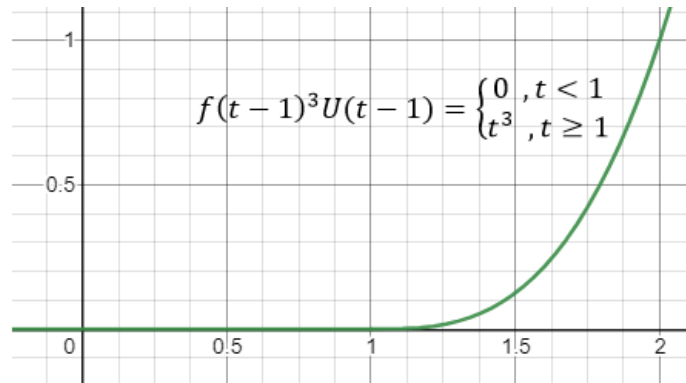


Figura 6.2

La razón por la cual es preciso analizar la función escalón unitario, se debe a que un principio de las transformadas de Laplace es que las funciones sean constantes en todo su dominio, o por lo menos en ciertos tramos, estos tramos van a ser los encontrados por la función escalón unitario.

A. Transformada de la función escalón unitaria

Está definida como:

$$\mathcal{L}\{U(t - c)\} = \frac{1}{s} e^{-cs}$$

Ejemplos:

1. Encuentre la transformada de Laplace de $U(t - 1) + U(t - 2)$.

Solución:

Al aplicar la transformada de Laplace a las funciones correspondientes, se tiene,

$$\mathcal{L}\{U(t - 1) + U(t - 2)\}$$

Transformadas cuya solución por tabla viene dada por $\frac{1}{s} (e^{-s} + e^{-2s})$

2. Encuentre la transformada de Laplace del siguiente gráfico:

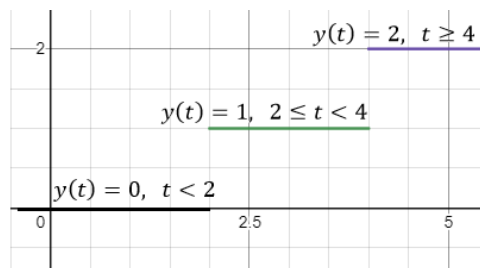


Figura 6.3

Solución:

Lo primero que se realiza es dividir la función por tramos, con esto se tiene,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ 2, & t \geq 4 \end{cases}$$

Luego, analizando por separado cada tramo de la función, se tiene,

$$U(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$U(t-4) = \begin{cases} 1, & 2 < t < 4 \\ 2, & t \geq 4 \end{cases}$$

Considerando la transformada de Laplace de estas funciones, se tiene:

$$f(t) = U(t-2) + U(t-4), \text{ o sea, } f(t) = \frac{1}{s}(e^{-2s} + e^{-4s})$$

B. Traslación sobre el eje t.

Considerando a $a > 0$, el principio de traslación expresa que,

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\{f(t-c)U(t-c)\}$$

Es decir, al considerar una función $f(\tau)$, con la particularidad de que,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$$

Multiplicando ambos lados de la expresión por e^{-as} , se obtiene,

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\tau+a)s} f(\tau) d\tau$$

Realizando la sustitución: $a + \tau = t$; $d\sigma = dt$

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt$$

Al aplicar la operación de división en la integral y recordando que la función escalón

unitario es de la forma, $U(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$, se tiene,

$$e^{-as}F(s) = \int_0^a e^{-st} f(t-a)(0) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)(1) dt, \text{ o sea,}$$

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)U(t-a) dt$$

Ejemplos de aplicación

1. Trazar la gráfica y determinar la transformada de $f(t) = (t-3)^2 U(t-3)$.

Solución:

De la expresión citada se tiene, $(t - 2)^2 U(t - 2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t - 2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

Luego, al aplicar el principio de traslación sobre el eje t, se tiene:

$$e^{-st} F(s) = \mathcal{L}\{f(t - 2)^2 U(t - 2)\}$$

Donde la transformada de $t = \frac{1}{s}$, cuya solución es $\frac{2e^{-2s}}{s^2}$

Y el gráfico de $f(t)$ es:

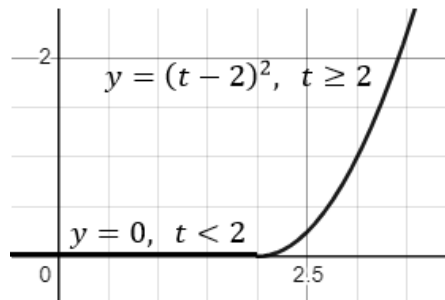


Figura 6.4

2. Trazar la gráfica y determinar la transformada de $f(t) = U(t - \pi) \text{sen}(2t)$

Solución:

Aplicando la propiedad de ángulo doble para $\text{sen}(t)$, es decir,

$$\text{sen}(2t - 2\pi) = \text{sen}(2t) \cos(2\pi) - \cos(2t) \text{sen}(2\pi)$$

Al evaluar la expresión anterior, nos queda que $\text{sen}(2t - 2\pi) = \text{sen}(2t)$, o sea,

$$f(t) = U(t - \pi) \text{sen}(2t)$$

Recordando que $\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 4}$, entonces se tiene,

$$\mathcal{L}\{U(t - \pi) \text{sen}(2t - 2\pi)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4}$$

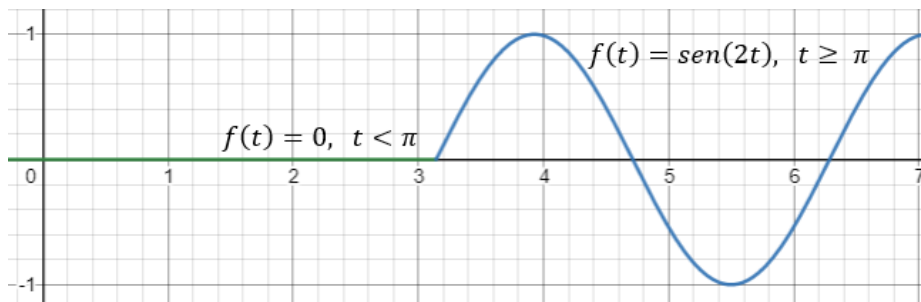


Figura 6.5

3. Tomando como referencia el siguiente gráfico encuentre su transformada.



Figura 6.6

Del gráfico se pueden observar las funciones por parte definida por,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 1, & 1 \leq t < 2 \\ 3, & t \geq 2 \end{cases}$$

Por el principio de traslación sobre el eje t, tenemos:

$$(t^2 - 1)U(t - 1) - (t^2 - 3)U(t - 3) = e^{-st}F_1(s) + e^{-st}F_2(s)$$

Para la primera función se tiene:

$$\mathcal{L}\{U(t - 1)\} = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^2U(t - 1)\} = F''(s)$$

$$\mathcal{L}\{t^2U(t - 1)\} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3} e^{-s}$$

Mientras que para la segunda sería:

$$\mathcal{L}\{U(t - 3)\} = 3 \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^2U(t - 3)\} = F''(s)$$

$$\mathcal{L}\{t^2U(t - 3)\} = \frac{3s^2 + 10s + 6}{s^3} 3e^{-3s}$$

Por lo que finalmente se tiene:

$$= \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3} e^{-s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{3s^2 + 10s + 6}{s^3} 3e^{-3s} + 3 \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\text{o sea, } \mathcal{L}\{t^2U(t - 3)\} = \frac{2s + 2}{s^3} e^{-s} - \frac{10s + 6}{s^3} 3e^{-3s}$$

C. Funciones periódicas

Sea $f(t)$ una función la cual se repite en intervalos de tiempo iguales, debe cumplirse que $f(t + p) = f(t)$, tomando a "p" como el periodo.

Sea f una función continua por tramos y periódica cada tiempo "p", entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

Demostración:

Por definición, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$, lo cual puede escribirse como,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \dots$$

Realizando la siguiente sustitución:

- Para la primera integral:
 $t = \tau, dt = d\tau$
- Mientas que para la segunda integral:
 $t = \tau + p, dt = d\tau$

Y recordando cambiar los intervalos de integración, se generan las siguientes integrales:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^p e^{-st} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau + p) d\tau + \dots$$

Puesto que, $f(t)$ es periódica, entonces se puede escribir éstas integrales como sigue:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^p e^{-st} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-st} e^{-sp} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-st} e^{-2sp} f(\tau) d\tau + \dots$$

y así sucesivamente, no obstante, al agrupar por factor común se tiene lo siguiente:

$$\int_0^p e^{-st} f(\tau) d\tau (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + e^{-3sp} + \dots)$$

A partir de la teoría de series se obtiene que ese factor que multiplica la integral es una

serie geométrica que converge a $\frac{1}{1 - e^{-sp}}$, por lo que se demuestra entonces que,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

Ejercicios propuestos

A. Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

1. $5(U(t - 2) + U(t - 1))$ Sol. $\frac{5}{s}(e^{-2s} + e^{-s})$

2. $U(t) + 1$ Sol. $\frac{2}{s}$
3. $\begin{cases} 2, & 0 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$ Sol. $\frac{2}{s}(1 - e^{-2s})$
4. $\begin{cases} 0, & t < 2, t > 4 \\ 2, & 2 \leq t < 3 \\ 1, & 3 \leq t < 4 \end{cases}$ Sol. $\frac{1}{s}(2e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s})$
5. $\begin{cases} 0, & t < 1, 2 < t < 3, t > 4 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 2, & 3 < t < 4 \end{cases}$ Sol. $\frac{1}{s}(2e^{-3s} + e^{-s} - e^{-2s} - 2e^{-4s})$

B. En correspondencia a los siguientes gráficos encuentre la transformada de Laplace.

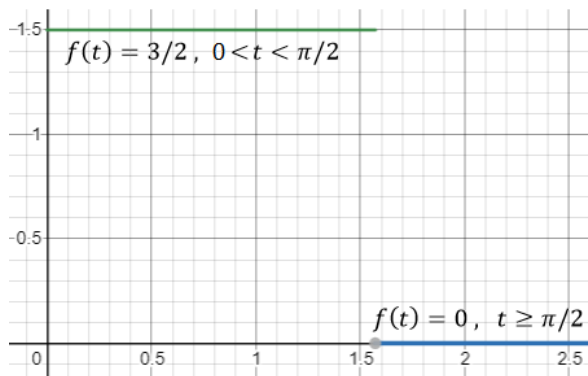


Figura 6.7

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}U\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Sol. } F(s) = \frac{3}{2s}(1 - e^{-\pi s/2})$$

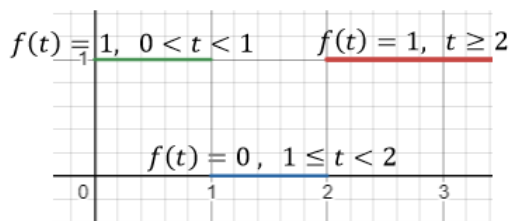


Figura 6.8

$$\text{Sol. } \frac{1}{s}(1 - e^{-s} + e^{-2s})$$

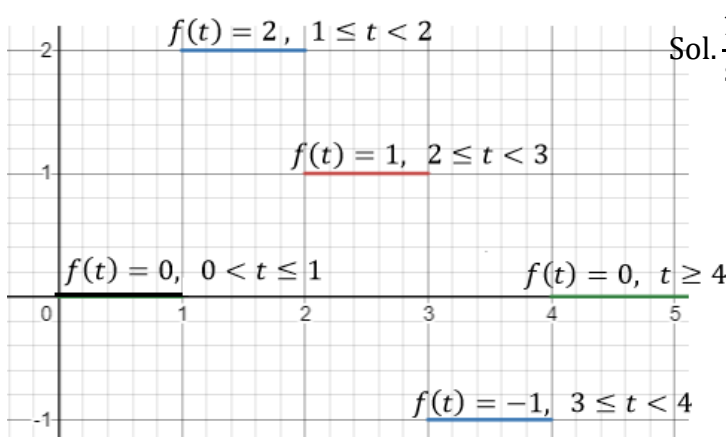


Figura 6.9

$$\text{Sol. } \frac{1}{s}(2e^{-s} + e^{-4s} - e^{-2s} - 2e^{-3s})$$

6.8. Convolución

Sean las funciones $f(t)$ y $g(t)$ continuas para un $t \geq 0$, y además debe cumplirse que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Demostración:

Por definición de la transformada, se tiene, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$

$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\rho} f(\rho)d\rho$, entonces si $F(s) * G(s)$ se tiene,

$$\int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau * \int_0^{\infty} e^{-s\rho} f(\rho)d\rho = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+\rho)} f(\rho)d\rho$$

Realizamos el reemplazo $t = \tau + \rho$, $dt = d\rho$, con lo cual se obtiene,

$$\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau)dt$$

Intercambiamos el orden de integración porque f y g son seccionalmente continuas y de orden exponencial, entonces se tiene,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau \right) dt, \text{ y obtener finalmente,}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}$$

Ejemplos:

1. Encontrar la transformada de Laplace de $\int_0^t e^{\tau} \text{sen}(t-\tau)d\tau$

Solución:

Se determina las dos funciones a las cuales se le está aplicando el principio de convolución, o sea, $f(t) = e^t$, $g(t) = \text{sen}(t)$, por lo que se obtendría, $\mathcal{L}\{e^t\} * \mathcal{L}\{\text{sen}(t)\}$, es decir:

$$\frac{1}{s-1} * \left(\frac{1}{s^2+1} \right)$$

2. Encontrar la transformada de Laplace de $\int_0^t \tau^2 \cos(2(t-\tau)) d\tau$

Solución:

Se determina las dos funciones a las cuales se le está aplicando el principio de convolución, o sea, $f(t) = t^2$, $g(t) = \cos(2t)$, por lo que se tendría $\mathcal{L}\{t^2\} * \mathcal{L}\{\cos(2t)\}$ y cuyas transformadas nos conduce a:

$$\int_0^t \tau^2 \cos[2(t-\tau)] d\tau = \frac{2}{s^3} \left(\frac{s}{s^2+4} \right)$$

2. Hallar la transformada inversa de $\frac{s}{(s^2+1)^2}$

Solución:

Recordando el principio de la convolución, $\mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$

Además se conoce que $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ y $G(s) = \frac{s}{s^2+1}$

Aplicando transformada inversa, se encuentra que estas funciones corresponde a

$\sin(t)$ y $\cos(t)$, y al resolver la siguiente integral, $\int_0^t \sin(\tau) \cos(t-\tau) d\tau$

y al aplicar propiedades trigonométricas tenemos

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \sin(\tau) (\cos(t)\cos(\tau) + \sin(t)\sin(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t \cos(t)\sin(\tau)\cos(\tau) + \sin(t)\sin^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

El resultado de la integral anterior corresponde a:

$$= -\frac{1}{2} \cos(t) \left(\cos^2(\tau) \Big|_0^t \right) + \frac{1}{2} \sin(t) \left(\tau - \sin(\tau) \cos(\tau) \Big|_0^t \right)$$

Luego de evaluar, se obtiene que el resultado es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+1)^2} \right\} = \frac{1}{2} t \sin t$$

3. Hallar la transformada inversa de $\frac{2}{s^2(s+2)}$

Solución:

Recordando el principio de la convolución, $\mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$

Además se conoce que $F(s) = \frac{2}{s^2}$ y $G(s) = \frac{1}{s+2}$

Aplicando transformada inversa, se encuentra que estas funciones corresponden a

t y e^{-2t} y al resolver la siguiente integral $\int_0^t \tau e^{-2t-2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau$

cuyo resultado es $-\frac{1}{4}e^{-2t} \left(e^{-2\tau}(2\tau + 1) \Big|_0^t \right) = \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-4t}(2t + 1)$

Ejercicios propuestos

Mediante convolución determinar la transformada inversa de las siguientes funciones:

1. $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$ Sol. $1 - \cos(t)$
2. $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 9)^2}$ Sol. $\frac{1}{6}t \sin(3t)$
3. $F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$ Sol. $e^{-t} - e^{-2t}$
4. $F(s) = \frac{2}{s(s^2 - 1)}$ Sol. $2(\cosh(t) - 1)$
5. $\frac{1}{s(s-7)}$ Sol. $\frac{1}{7}(e^{7t} - 1)$
6. $\frac{4}{s^3(s-2)}$ Sol. $\frac{e^{2t}}{2} - t - t^2 - \frac{1}{2}$
7. $\frac{2}{s^2(s^2 - 4)}$ Sol. $\frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}\sinh(2t) - \frac{1}{2}t$
8. $\frac{s}{(s+1)^2(s-1)}$ Sol. $\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$
9. $\frac{s}{(s^2 + 1)(s-1)}$ Sol. $\frac{1}{2}[e^t + \sin(t) - \cos(t)]$
10. $\frac{4}{(s^2 + 16)^2}$ Sol. $\frac{1}{32}[\sin(4t) - 4t \cos(4t)]$

6.9. Aplicaciones de la transformada de Laplace

El uso de la transformada de Laplace en aplicaciones es necesario cuando se tienen distintas funciones que interactúan con el sistema en distintos intervalos de tiempo, aunque claro, también se los puede utilizar para resolver sistemas simples:

Ejemplos:

1. Se tiene un circuito RLC, que consta con un inductor de 0,5 Henrios, una resistencia de 7 ohmios y una capacitancia de 0,05 Faradios, además se sabe que la fuerza electromotriz es de $10\cos(2t)$. Al inicio no hay ni corriente ni carga en el sistema.

Determine las ecuaciones de la carga y la corriente en cualquier instante.

Solución:

A partir del modelo planteado para este caso y reemplazando los datos, se tiene,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2q}{dt^2} + 7 \frac{dq}{dt} + 20q = 10\cos(2t)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 14 \frac{dq}{dt} + 40q = 20\cos(2t)$$

Se aplica la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2q}{dt^2} + 14 \frac{dq}{dt} + 40q\right\} = \mathcal{L}\{20\cos(2t)\}$$

Luego aplicamos linealidad.

$$\mathcal{L}\{q''\} + 14\mathcal{L}\{q'\} + 40\mathcal{L}\{q\} = 20\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$$

De esta expresión se observa que hay una forma muy usual, por lo que esto también se puede expresar así:

$$s^2\mathcal{L}\{q\} - sq(0) - q'(0) + 14s\mathcal{L}\{q\} - 14q(0) + 40\mathcal{L}\{q\} = 20\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$$

Luego, al reemplazar las condiciones iniciales, se tiene,

$$s^2\mathcal{L}\{q\} + 14s\mathcal{L}\{q\} + 40\mathcal{L}\{q\} = 20\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$$

Reordenando esta expresión y despejando la transformada de la variable, dependiente

$$\text{se tiene, } \mathcal{L}\{q\}\{s^2 + 14s + 40\} = 20\mathcal{L}\{\cos(2t)\}, \text{ o sea, } \mathcal{L}\{q\} = \frac{20\mathcal{L}\{\cos(2t)\}}{\{s^2 + 14s + 40\}}$$

Luego al aplicar la transformada inversa en ambos lados de la ecuación:

$$q = 20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 14s + 40)}\right\}$$

y aplicando el proceso de fracciones parciales se obtiene que la transformada es:

$$q = \frac{5e^{-10t}}{312} - \frac{e^{-4t}}{30} + \frac{7\text{sen}(2t) + 9\cos(2t)}{520}$$

2. Una viga de 10 metros de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 400 kg por metro de longitud y una carga en el centro de 4000 kg. ¿Cuál es la curva elástica de la viga? Considere $y(0) = 0, y'(0) = 0$

Solución:

A partir de la información del problema se tiene que las fuerzas que intervienen en este proceso son:

- Peso que se encuentra en el centro de la viga, además del propio peso de la viga,

$$\frac{1}{2}(4000 + 10 \cdot 400) = 4000$$

- Peso concentrado en la cuarta parte de la viga de $400x$ dirigida hacia abajo.

Por lo tanto, el momento flector es:

$$M = F_1 d_1 - F_2 d_2 = 4000x - 400x^2$$

Reemplazando en el modelo de la ecuación diferencial para este caso, se tiene,

$$EIy'' = 4000x - 400x^2$$

Aplicando la transformada de Laplace, se consigue:

$$EI(s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)) = 4000\mathcal{L}\{t\} - 400\mathcal{L}\{t^2\}$$

$$EIL\{y\} = \frac{4000}{s^3} - \frac{800}{s^4}, \text{ o sea,}$$

$$EIy = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4000}{s^3} - \frac{800}{s^4}\right\} \text{ para finalmente obtener, } y = 2000t^2 - \frac{400t^3}{3}$$

Ejercicios propuestos

Empleando la transformada de Laplace se solicita resolver:

1. Una masa que pesa 32 g se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 m . cuando se le aplica una fuerza de 4 kg . Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando $t = 0$ y si, en ese instante, se aplica una fuerza $f(t) = \cos t$ que cesa abruptamente en $t = 2\pi \text{ s}$, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante, si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos. Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la ecuación que modela la posición de la masa m es:

$$x'' + 4x = \begin{cases} \cos t, & 0 < t \leq 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$

Solución:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \frac{1}{4} t \sin t - \frac{1}{16} \sin 2t + \frac{1}{16} t \cos 2t - \frac{3\pi}{8} \cos 2t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

2. Un circuito RLC, con $R = 110 \Omega$, $L = 1H$ y $C = 0.002 F$ tiene conectada una batería de $90V$. Considerando que en $t = 0$ no hay corriente en el circuito ni carga en el condensador y que, en el mismo instante, se cierra el interruptor por 1 s . Si al tiempo

$t=1$ se abre el interruptor, y así se conserva, encontrar la corriente resultante en el circuito. Considere como modelo de la ecuación del circuito:

$$I' + 110I + \frac{1}{0.001} \int_0^t Idt = E, \text{ siendo } E = 90[U(t) - U(t - 1)]$$

Solución:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-10t} - e^{-100t}, & 0 \leq t < 1 \\ (1 - e^{10})e^{-10t} - (1 - e^{100})e^{-100t}, & t \geq 1 \end{cases}$$

3. Un fármaco entra y sale de un órgano de volumen $v_0 \text{ cm}^3$ a una tasa de $\alpha \text{ cm}^3/\text{s}$, donde v_0 y α son constantes. Considerar que, en el tiempo $t = 0$, la concentración del fármaco es 0 y tras administrarlo, la concentración aumenta linealmente hasta un máximo de k en el tiempo $t = t_0$, en el cual el proceso se detiene. Determinar la concentración del fármaco en el órgano en todo instante y su máximo valor.

Solución:

a. Para $t < t_0$ se tiene: $x(t) = \frac{kt}{t_0} - \frac{kv_0}{\alpha t_0} (1 - e^{-\alpha t/v_0})$

b. Para $t > t_0$ se tiene: $x(t) = \frac{kv_0}{\alpha t_0} e^{-\alpha t/v_0} + \left(k - \frac{kv_0}{\alpha t_0}\right) e^{-\alpha(t-t_0)/v_0}$

7. APÉNDICE

A.1. TABLA DE DERIVADAS E INTEGRALES DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y TRASCENDENTES

TABLA DE DERIVADAS		TABLA DE INTEGRALES	
Potencias			
1.	$y = u^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \neq -1)$
Exponenciales			
2.	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	$\int e^u \cdot u' dx = e^u + k$
3.	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot L a \cdot u'$	$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{L a} + k$
Logarítmicas			
4.	$y = L u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} dx = L u + k$
5.	$y = \lg_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \lg_a e$	Recordar: $\lg_a b = \frac{\lg_c b}{\lg_c a}$
Trigonométricas			
6.	$y = \text{sen } u$	$y' = \cos u \cdot u'$	$\int \cos u \cdot u' dx = \text{sen } u + k$
7.	$y = \cos u$	$y' = -\text{sen } u \cdot u'$	$\int \text{sen } u \cdot u' dx = -\cos u + k$
8.	$y = \text{tg } u$	$y' = \sec^2 u \cdot u'$	$\int \sec^2 u \cdot u' dx = \text{tg } u + k$
9.	$y = \text{arc sen } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sen } u + k$
10.	$y = \text{arc cos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = -\text{arc cos } u + k$
11.	$y = \text{arc tg } u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$\int \frac{u' dx}{1+u^2} = \text{arc tg } u + k$
Operaciones más usuales en derivadas e integrales			
12.	$y = k \cdot u$	$y' = k \cdot u'$	$\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$
13.	$y = u + v$	$y' = u' + v'$	Integración por partes: $\int u dv = uv - \int v du$
14.	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
15.	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	Regla de la cadena: $y(x) = y[u(v(x))]$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$
16.	$y = u^v$	$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot L u \cdot v'$	Derivada de la función inversa: Si $y = f(x)$; $x = g(y) \rightarrow g' = 1/f$
Observaciones:			
a) Las letras u y v representan funciones de x : $u = u(x)$; $v = v(x)$; $k \in \mathbb{R}$; L : logaritmo neperiano			
b) Cuando $u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$, obtenemos las derivadas e integrales simples			

A.2. MÉTODOS ANALÍTICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

▪ **Condiciones de existencia en la solución de una EDO**

Dada la EDO: $y' = f(x, y)$, admite solución si y solo si,

- a. Si $f(x, y)$ es continua y uniforme en \mathbb{R}
- b. Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe, continua para todo punto de \mathbb{R}

▪ **Ecuación de Primer Orden:**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

- Para el caso en que M y N sean lineales no homogéneas:

$$\Delta = 0 \Rightarrow t = a_1x + B_1y; \Delta \neq 0 \rightarrow x = r + h; y = s + k$$

- Para el caso en que M y N sean lineales homogéneas:

$$f(\lambda_x \lambda_y) = \lambda^n f(x, y) \rightarrow y = ux$$

- Para el caso en que la EDO sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow u(x, y) = C; u(x, y) = \int M(x, y) dx + \Phi(y)$$

▪ **Factores de integración:**

Caso I. Cuando el cociente determina una función en x,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \rightarrow FI: \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

Caso II. Cuando el cociente determina una función en y,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y) \rightarrow FI: \mu(y) = e^{\int g(y) dy}$$

Caso III. Cuando la función diferencial es homogénea,

$$Mx + Ny \neq 0 \rightarrow FI: \mu = \frac{1}{Mx + Ny}$$

Caso IV. Cuando la función diferencial no es homogénea,

$$yf(x, y)dx + xg(x, y)dy = 0; f(x, y) \neq g(x, y) \rightarrow FI: \mu = \frac{1}{xy[f(x, y) - g(x, y)]}$$

$$= \frac{1}{Mx - Ny}$$

Grupo de términos	Factor integrante (μ)	Diferencial exacta
$xdy - ydx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$

$x dy - y dx$	$\frac{1}{y^2}$	$-\frac{-x dy + y dx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$
$x dy - y dx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d\left(\ln \frac{y}{x}\right)$
$x dy - y dx$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{x dy - y dx}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$
$x dy + y dx$	$\frac{1}{(xy)^n}$	$\frac{x dy + y dx}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]; n \neq 1$ $\frac{x dy + y dx}{xy} = d[\ln(xy)] \quad n = 1$
$x dy + y dx$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$	$\frac{x dy + y dx}{(x^2 + y^2)^2} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right] \quad n \neq 1$ $\frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right] \quad n = 1$

▪ **Ecuación diferencial lineal de primer orden:**

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \rightarrow y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Ce^{-\int P(x)dx} \right]$$

▪ **Ecuación diferencial de primer orden del tipo de Bernoulli:**

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x); z = y^{1-n}$$

▪ **Ecuación diferencial de primer orden del tipo de Ricatti:**

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y^2 + B(x)y + C(x) = 0; \quad y_1 \rightarrow y = y_1 + 1/z$$

▪ **Ecuación diferencial lineal de orden superior:**

$$p^n + P_1 p^{n-1} + \dots + P_{n-1} p + P_n = 0; \quad \frac{dy}{dx} = p \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

▪ **Ecuación diferencial lineal de Clairaut:**

$$y = xy' + g(y') \rightarrow y = Cx + f(C)$$

▪ **Ecuación diferencial lineal de Lagrange:**

$$y = x\varphi(y') + \Psi(y') = x\varphi(p) + \Psi(p) \rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{1}{\varphi - p} \frac{d\varphi}{dp} x = \frac{1}{p - \varphi} \frac{d\Psi}{dp}$$

▪ **Ecuación diferencial de Abel:**

$$y'' + R(x)y' + S(x)y = Q(x), \quad \text{Conocido } y_1, \text{ entonces: } y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int R(x)dx}}{y_1^2} dx$$

▪ **Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes:**

Expresión de la EDO en factores: $(D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_n) = 0$

Caso I. $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \dots \rightarrow y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \dots$

Caso II. $m_1 = m_2 \neq m_3 \dots \rightarrow y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} \dots$

Caso III. $m = \pm bi \rightarrow y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

▪ **Método continuo**

$$y = e^{m_1 x} \int e^{(m_2 - m_1)x} \int e^{(m_3 - m_2)x} \dots \int e^{(m_n - m_{n-1})x} \int Q e^{-m_n x} (dx)^n$$

▪ **Operadores anuladores:**

Caso I. $y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Nx^{n-1} \Rightarrow L_0 = D^n$

Caso II. $y = e^{ax} \rightarrow L_0 = (D - a)$

Caso III. $y = e^{ax} + x e^{ax} + x^2 e^{ax} + \dots + x^{n-1} e^{ax} \rightarrow L_0 = (D - a)^n$

Caso IV. $y = \sin bx; y = \cos bx \rightarrow L_0 = (D^2 + b^2)$

Caso V. $\begin{cases} y = \sin bx + x \sin bx + x^2 \sin bx + \dots + x^{n-1} \sin bx \\ y = \cos bx + x \cos bx + x^2 \cos bx + \dots + x^{n-1} \cos bx \end{cases} \rightarrow L_0 = (D^2 + b^2)^n$

Caso VI. $y = e^{ax} \sin bx; y = e^{ax} \cos bx \rightarrow L_0 = [(D^2 - a^2) + b^2]$

Caso VII. $\begin{cases} y = e^{ax} \sin bx + e^{ax} x \sin bx + e^{ax} x^2 \sin bx + \dots + e^{ax} x^{n-1} \sin bx \\ y = e^{ax} \cos bx + e^{ax} x \cos bx + e^{ax} x^2 \cos bx + \dots + e^{ax} x^{n-1} \cos bx \end{cases}$
 $\rightarrow L_0 = [(D^2 - a^2) + b^2]^n$

▪ **Método de variación de parámetros**

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

$$y_p = L_{1(x)} y_1(x) + L_{2(x)} y_2(x) + \dots + L_{n(x)} y_n(x)$$

$$L'_1 y_1 + L'_2 y_2 + \dots + L'_n y_n = 0$$

$$L'_1 y'_1 + L'_2 y'_2 + \dots + L'_n y'_n = 0$$

... ..

$$L'_1 y_1^{(n-1)} + L'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + L'_n y_n^{(n-1)} = Q$$

A3. TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6.	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8.	$\text{sen}(wt)$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
9.	$\text{cos}(wt)$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
10.	$\text{sen}(wt + \theta)$	$\frac{s \cdot \text{sen}(\theta) + w \cdot \text{cos}(\theta)}{s^2 + w^2}$
11.	$\text{cos}(wt + \theta)$	$\frac{s \cdot \text{cos}(\theta) - w \cdot \text{sen}(\theta)}{s^2 + w^2}$
12.	$e^{-at} \text{sen}(wt)$	$\frac{w}{(s+a)^2 + w^2}$
13.	$e^{-at} \text{cos}(wt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + w^2}$
14.	$t \cdot \text{sen}(wt)$	$\frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$
15.	$t \cdot \text{cos}(wt)$	$\frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2}$

16.	$\sinh(wt)$	$\frac{w}{s^2 - w^2}$
17.	$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2 - w^2}$
18.	$e^{-at}f(t)$	$sF(s + a)$
19.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
20.	$f(t - a)U(t - a), a > 0$	$e^{-as} \cdot F(s)$
21.	$\delta(t - t_0)$	e^{-sto}
22.	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$
23.	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - s \cdot f(0^+) - f^{(1)}(0^+)$
24.	$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$
25.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
26.	$f(t - t_1)$	$e^{-t_1 s} F(s)$
27.	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
28.	$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$

A4. TABLA DE SERIES DE POTENCIAS

1.	$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = \sum \frac{1}{n!}x^n; -\infty < x < \infty$
2.	$a^x = 1 + \frac{\text{Ln } a}{1!}x + \frac{\text{Ln}^2 a}{2!}x^2 + \frac{\text{Ln}^3 a}{3!}x^3 + \frac{\text{Ln}^4 a}{4!}x^4 + \dots = \sum \frac{\text{Ln}^n a}{n!}x^n; -\infty < x < \infty$
3.	$\text{sen } x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots = \sum (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}; -\infty < x < \infty$
4.	$\text{cos } x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \dots = \sum (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}; -\infty < x < \infty$
5.	$\text{Ln}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}; -1 < x \leq 1$
6.	$\text{arcsen } x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots = \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; -1 < x \leq 1$
7.	$\text{arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum (-1)^n \frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}; -1 < x \leq 1$
8.	$\text{senh } x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots = \sum \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}; -\infty < x < \infty$
9.	$\text{cosh } x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots = \sum \frac{1}{(2n)!}x^{2n}; -\infty < x < \infty$

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Acero, I., López, M. (2009). *Ecuaciones diferenciales. Teoría y problemas*. Editorial Tébar. Madrid, España.
- [2] Bargaño, V., Alonso, M. (2013). *Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas*. Editorial UNED. Madrid, España.
- [3] Boyce, W., DiPrima, R. (2001). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la frontera*. Editorial Limusa-Willey. México, México.
- [4] Bronson, R., Costa, G. (2003). *Ecuaciones Diferenciales*. Editorial McGraw-Hill. México, México.
- [5] Carmona, I., López, E. (2004). *Ecuaciones diferenciales*. Editorial Pearson. México, México.
- [6] Chungaro, L. (2012). *Ecuaciones diferenciales*. Editorial Leonardo. Lima, Perú
- [7] Espinoza, E. (2004). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Lima, Perú.
- [8] Espinoza, E. (1997). *Transformada de La place*. Lima, Perú.
- [9] García, A., Reich, D. (2014). *Ecuaciones diferenciales*. Editorial Patria. México, México.
- [10] Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning. México, México.

Descubre tu próxima lectura

Si quieres formar parte de nuestra comunidad,
regístrate en <https://www.grupocompas.org/suscribirse>
y recibirás recomendaciones y capacitación



   @grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

   @grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

ISBN: 978-9942-33-422-0



9 789942 334220



@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compas
Grupo de capacitación e investigación pedagógica