

Investigación de operaciones I

Fundamentos y aplicaciones de la programación lineal

Adriano Ramírez Galeano
Luis Ramiro Aguilar Ordoñez

Investigación de operaciones I

Fundamentos y aplicaciones de la programación lineal

Adriano Ramírez Galeano
Luis Ramiro Aguilar Ordoñez

ISBN: 978-9942-33-981-2

DOI: <http://doi.org/10.48190/9789942339812>



© **Adriano Ramírez Galeano**

Docente de la Universidad Técnica de Machala
Correo: adramirez@utmachala.edu.ec
ORCID: 0009-0000-0328-836X

Luis Ramiro Aguilar Ordoñez


Docente de la Universidad Técnica de Machala
Correo: lraguilar@utmachala.edu.ec
ORCID: 0002-0000-0564-0934

Primera edición, 2025-11-05

ISBN: 978-9942-33-981-2

DOI: <http://doi.org/10.48190/9789942339812>

Distribución online

 Acceso abierto

Cita

Ramírez, A., Aguilar, L. (2025) Investigación de operaciones I. Fundamentos y aplicaciones de la programación lineal. Editorial Grupo Compás

Este libro es parte de la colección de la Universidad Técnica de Machala y ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad de la publicación. El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

Agradecimientos

Adriano Ramirez:

Agradezco a mi bondadoso maestro Ing. Eléctrico Sant Rajinder Singh Ji Maharaj, por su inspiración y apoyo.

Agradezco a mi padre(+), a mi madre, a mis hermanas, a mi esposa y mis hijos

Ramiro Aguilar:

Agradezco a mi madre, a mi esposa y a mis hijas.

ÍNDICE

CAPITULO 1. PROGRAMACIÓN LINEAL..... 12

TEMA 1. INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 13

1.1.- OBJETIVOS.....	13
1.2.- INTRODUCCIÓN	13
1.3.-SINOPSIS HISTÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN	14
1.4.- IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN.....	15
DE OPERACIONES.....	17
1.6.-CUESTIONARIO DE PREGUNTAS.....	17
1.8.-APÉNDICE.....	20

CAPÍTULO 2. PROGRAMACIÓN LINEAL.....26

TEMA 2. PROGRAMACIÓN LINEAL 27

2.1.-OBJETIVOS:	27
2.2.-INTRODUCCIÓN	27
2.3.1.-Conceptualización	28
2.3.1.1.-Conceptualización estructural:.....	28
2.3.1.2- Conceptualización como caja negra:	28
2.3.1.3--Conceptualización funcional:.....	28
2.4-Modelación.....	29
2.4.1-Modelos Icónicos:.....	29
2.4.2-Modelos Analógicos:.....	29
2.4.3- Modelos Matemáticos o Simbólicos.....	29
2.5.-Programación Lineal.....	30
2.5.1. Función objetivo:.....	30
2.5.2.-Variables de decisión:.....	30
2.5.3.-Constantes del Sistema:	30
2.5.4.-Restricciones:.....	30
2.5.5.-Planteamiento matemático	31
2.6.-EJERCICIO PROTOTÍPICO: SATISFACCIÓN DIARIA.....	32
2.7.-CONCLUSIONES	35
2.8.-CUESTIONARIO.....	35
2.8.1.-VERDADERO-FALSO.....	35
2.8.2. OPCIÓN MÚLTIPLE	36

2.8.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS.....	38
2.8.- GLOSARIO.....	41
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	43
CAPÍTULO 3. MÉTODO SIMPLEX.....	46
TEMA 3. SOLUCIÓN GRÁFICA DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL	47
3.1.-OBJETIVOS	47
3.2.-INTRODUCCIÓN	47
3.3.-DESARROLLO	47
3.3.1.-FUNDAMENTOS PARA SOLUCIÓN GRÁFICA:.....	47
3.3.2.-GEOGEBRA.....	48
3.4.-PROCEDIMIENTO:	48
3.4.1.-CAMIONETAS CABINA SENCILLA Y DOBLE	49
3.4.2.-EJERCICIO 2.	61
3.5.-CONCLUSIONES	72
3.6.-CUESTIONARIO Y EJERCICIOS PROPUESTOS	72
3.6.1.-VERDADERO-FALSO.....	72
3.6.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE	73
3.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS.....	73
3.7.-GLOSARIO.....	74
3.8.-APÉNDICE.....	76
CAPÍTULO 4. MÉTODO SIMPLEX.....	78
TEMA 4. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MÉTODO SIMPLEX	79
4.1.-OBJETIVOS	79
4.2.-INTRODUCCIÓN	79
4.3.-DESARROLLO	80
4.4.-PROCEDIMIENTO.....	81
4.5.-EJERCICIO PROTOTÍPICO 1.....	87
4.5.1.-CAMIONETAS CABINA SENCILLA Y DOBLE	87
4.5.2.-EJERCICIO PROTOTÍPICO 2	108
4.6.-CONCLUSIONES	133
4.7.-APÉNDICE <i>Operational Research</i>	134
4.8.-CUESTIONARIO.....	139
4.8.1-VERDADERO-FALSO	139

4.7.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE	140
4.7.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS.....	140
4.9.-GLOSARIO.....	143
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	148
CAPITULO 5. SOFTWARE PROGRAMACIÓN LINEAL	151
TEMA 5. SOLUCION PROGRAMACIÓN LINEAL CON	152
5.1.-OBJETIVOS	152
5.2.-INTRODUCCIÓN	152
5.3.-DESARROLLO	153
5.3.1.- SOLVER-EXCEL.....	153
5.3.1.1.-Ejercicio PROTOTÍPICO 1.....	156
5.3.1.2.-Ejercicio PROTOTÍPICO 2.....	162
5.3.2 LINGO.....	167
5.3.2.1.-DESARROLLO.....	167
5.3.2.2.-Ejercicio PROTOTÍPICO 1.....	168
5.3.2.3.-Ejercicio PROTOTÍPICO 2.....	171
5.4.-CONCLUSIONES.....	174
5.5.-CUESTIONARIO.....	174
5.5.1.-VERDADERO-FALSO.....	174
5.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE	175
5.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS.....	176
5.6.-GLOSARIO	178
CAPITULO 6. SOFTWARE PROGRAMACIÓN LINEAL	180
TEMA 6. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.....	181
6.1.-OBJETIVOS	181
6.2.-INTRODUCCIÓN	181
6.3.-DESARROLLO	182
6.4.-INDUSTRIAS JARAMILLO	185
6.5.-Análisis de sensibilidad modificando Parámetros B_i , C_j -	190
6.6.-CONCLUSIONES.....	194
6.7.-CUESTIONARIO.....	195
6.7.1.-VERDADERO-FALSO.....	195
6.7.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE	195
6.7.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS.....	196

6.8.-GLOSARIO.....	198
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS CAPITULO 5.....	198
CAPITULO 7. DUALIDAD	201
TEMA 7: OBTENCIÓN DEL PRIMAL Y DEL DUAL	202
7.1.-OBJETIVOS	202
7.2.-INTRODUCCION.....	202
7.3.-EJERCICIO PROTOTÍPICO 2.....	203
7.4.-CONCLUSIONES	211
7.5.-CUESTIONARIO.....	212
7.5.1.-VERDADERO-FALSO.....	212
7.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE	213
7.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS.....	214
7.6.-GLOSARIO.....	216
CAPITULO 8. DUALIDAD	217
Tema 8. PROBLEMA DUAL APLICADO A LA ECONOMÍA	217
8.1.-OBJETIVOS:	218
8.2.-INTRODUCCIÓN:	218
8.3.-Problema prototípico COOPERATIVA NUEVOPILO.....	218
8.4.-SOLUCION	219
8.4.1. --Solución PRIMAL	219
8.5.- DUAL.....	223
8.6.-CONCLUSIONES	227
8.7.-GLOSARIO.....	227
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS CAPITULO 8.....	227
APÉNDICE A	230
APÉNDICE B	233
APÉNDICE C	234

PREFACIO AL TOMO 1

Este libro, dividido en dos tomos, tiene como objetivo principal proporcionar una guía clara y estructurada para los estudiantes que se enfrentan por primera vez al curso de investigación de operaciones. Busca unificar los métodos de enseñanza, organizando de manera lógica los temas a tratar para evitar que los estudiantes perciban la asignatura como un conjunto desconectado de conceptos. A través de este enfoque se aborda la diversidad de modelos y métodos de optimización, desde los clásicos hasta los heurísticos, así como la aplicación práctica en problemas administrativos y económicos, tales como mezclas de producción, asignaciones y rutas óptimas. De esta manera se pretende facilitar el aprendizaje y evitar la sobrecarga cognitiva, promoviendo una mejor comprensión y organización mental de los contenidos.

La programación lineal, como herramienta matemática fundamental, se centra en la optimización de recursos y en la toma de decisiones eficientes. Este enfoque, introducido magistralmente por el ingeniero Dantzig mediante el método simplex, permite resolver problemas complejos de manera sistemática. En este libro, la estructura de los capítulos se orienta a consolidar las bases analíticas del estudiante, asegurando una comprensión sólida del modelo matemático básico que sustenta esta disciplina.

El enfoque principal de los temas tratados será la formulación de modelos matemáticos de programación lineal. Posteriormente, se procederá a resolver dichos modelos utilizando el método simplex a través del programa SOLVER de Excel, considerado una herramienta accesible y eficaz, a la que se anexa el manual de instalación. Este procedimiento permitirá observar cómo, a pesar de la diversidad de los temas, todos convergen gracias a la solución propuesta por el ingeniero Dantzig. Además, el uso de herramientas tecnológicas actuales, como computadoras y dispositivos móviles, facilitará el análisis matemático y la interpretación de los resultados obtenidos. El objetivo principal será verificar estos resultados, comparándolos con los generados por el programa, para garantizar su validez y precisión.

También se han utilizado herramientas como GEOGEBRA y la aplicación OPERATIONAL RESEARCH de Ketan Cheuhan, las cuales son accesibles desde teléfonos móviles. Estas aplicaciones han demostrado ser sumamente útiles para la enseñanza del método simplex, ya que GEOGEBRA facilita su comprensión visual, mientras que OPERATIONAL RESEARCH permite resolverlo paso a paso, optimizando el tiempo y reduciendo la necesidad de utilizar laboratorios de informática.

Se incluye un segmento adicional dedicado al análisis matricial, pensado especialmente para aquellos interesados en profundizar en las bases matemáticas que sustentan el método simplex. Este apartado permite comprender cómo los procedimientos utilizados en el método simplex encuentran su respaldo en operaciones y conceptos matriciales. Además, se exploran temas como la relación entre el problema primal y dual, así como el concepto de precio sombra desde una perspectiva matricial.

Es importante destacar que esta información complementaria no forma parte del contenido principal del libro, sino que se ofrece como un recurso adicional para quienes deseen ampliar su entendimiento sobre estas estructuras matemáticas y su aplicación en el método simplex.

Estructura del libro Tomo 1

El Tema 1 introductorio debe leerse por su contenido, pues no se trata de un resumen del libro. Dicho capítulo repasa las características básicas de La Investigación de Operaciones (IO) como una disciplina científica interdisciplinaria enfocada en optimizar la toma de decisiones mediante métodos cuantitativos y modelos matemáticos. Su desarrollo histórico, desde la Revolución Industrial hasta su consolidación en la Segunda Guerra Mundial.

En el **Tema 2** se enfatiza que, en escenarios conocidos, es esencial trasladar los problemas del mundo real a modelos matemáticos que representen las restricciones y características clave del entorno. Este proceso incluye la formulación de modelos y la identificación de restricciones, lo cual resulta fundamental para optimizar soluciones utilizando herramientas como la programación lineal. Como ejemplo, se presenta un caso particular en el que un joven, durante un día de relax, busca maximizar el aprovechamiento de su tiempo.

En el **Tema 3** se destaca que el uso de herramientas como GEOGEBRA es una estrategia efectiva para comprender de manera visual e intuitiva los problemas de programación lineal con dos variables. Esto ayuda a construir una base sólida para resolver problemas más complejos mediante el método simplex. Además, se presentan dos ejemplos prácticos que ilustran situaciones comunes en este tipo de problemas, permitiendo abordar los principales cuestionamientos y trasladar estas soluciones al entorno del método simplex. De esta forma, se facilita tanto el aprendizaje como la aplicación de los principios fundamentales de la programación lineal.

En el **Tema 4** se aborda el método Simplex, desarrollado por George Dantzig en 1947, el cual es un procedimiento algebraico iterativo diseñado para resolver

problemas de optimización en programación lineal con dos o más variables de decisión, superando las limitaciones de las soluciones geométricas al abordar problemas más complejos de manera algebraica. Este método se basa en evaluar soluciones factibles básicas en los vértices de la región factible, desplazándose iterativamente hasta encontrar la solución óptima.

El proceso incluye dos etapas fundamentales: la Etapa I, en la que se introducen variables auxiliares para garantizar un punto inicial dentro de una región factible, incluso cuando el problema original no lo tiene, y la Etapa II, que optimiza directamente sobre la región factible original utilizando las variables de decisión iniciales. Estas dos etapas reflejan el uso de dos ejemplos prototípicos comunes, que abarcan todas las posibles situaciones en las que se requieren variables artificiales. Además, se destaca la utilidad de herramientas como Operational Research, una aplicación disponible para dispositivos Android, que facilita el aprendizaje del método Simplex al permitir a los estudiantes seguir el procedimiento paso a paso de manera didáctica, verificando cada etapa del proceso y reforzando su comprensión de los conceptos clave.

En el **Tema 5** El texto aborda la evolución del modelo matemático para problemas de programación lineal, destacando su transición de soluciones gráficas a métodos algebraicos como el algoritmo Simplex, impulsada por los avances computacionales que han dado lugar a un amplio mercado de paquetes informáticos. Herramientas como Operational Research, SOLVER de Excel y LINGO se presentan como opciones accesibles y didácticas para resolver problemas de distinta complejidad. Operational Research es ideal para sistemas pequeños, manejando hasta 10 variables y 10 restricciones, mientras que SOLVER permite trabajar con 200 variables y restricciones, y LINGO ofrece una versión estudiantil gratuita para problemas más avanzados. Para casos de mayor escala, que involucran cientos de miles de variables, el mercado está dominado por desarrolladores privados que ofrecen sistemas personalizados.

En el ámbito educativo, herramientas como SOLVER, incluido en Microsoft Office, y LINGO son especialmente útiles para docentes y estudiantes, ya que permiten ingresar datos y verificar resultados comparándolos con métodos previamente estudiados, reforzando así la comprensión de la programación lineal y la optimización. Para facilitar el aprendizaje, se trabaja con los mismos problemas prototípicos abordados en temarios anteriores, asegurando que los estudiantes se concentren en el nuevo método de solución mediante herramientas informáticas, sin distraerse con problemas completamente nuevos. Este enfoque garantiza un aprendizaje práctico y efectivo de los conceptos y procedimientos relacionados con la programación lineal.

En el **Tema 6** La solución gráfica permite observar la posibilidad de modificar las condiciones de los parámetros, como la cantidad de recursos, el valor de los precios o los costos, reconociendo los límites hasta donde es posible realizar estas modificaciones sin afectar los valores de la función objetivo. Asimismo, se determina que, al modificar la función objetivo, se obtiene nueva información relevante, como los precios marginales. Toda esta información se genera posteriormente en los resultados de sensibilidad y límites proporcionados por paquetes informáticos como SOLVER, LINGO o cualquier otro de los numerosos disponibles en el mercado. Para facilitar el aprendizaje y la comprensión, continuamos utilizando los ejemplos prototípicos previamente estudiados, aplicándoles estas herramientas para reforzar los conceptos y el análisis práctico.

En el **Tema 7** El concepto de dualidad en programación lineal, junto con el análisis de sensibilidad y el método simplex, constituye una herramienta fundamental para comprender la relación matemática entre problemas primal y dual. La dualidad establece que cada problema de maximización tiene un problema dual equivalente de minimización, y viceversa, lo que permite analizar los problemas desde perspectivas complementarias. En el método simplex, esta relación se refleja directamente en la tabla simplex, donde las variables duales (precios sombra) emergen como subproductos de la solución óptima del problema primal, proporcionando información valiosa sobre los recursos limitados y su impacto en la función objetivo. Además, la dualidad facilita la interpretación de los resultados del análisis de sensibilidad, ya que permite identificar los límites de variación de los coeficientes de la función objetivo y de los recursos disponibles sin alterar la solución óptima. Esto resulta crucial para la toma de decisiones en escenarios dinámicos y con restricciones cambiantes.

Técnicamente, la relación primal-dual también asegura que, en la solución óptima, los valores de las funciones objetivo de ambos problemas coinciden. Para reforzar estos conceptos, se continúa utilizando problemas prototípicos previamente estudiados, aplicándoles pruebas de optimalidad en Solver. Esta herramienta permite visualizar cómo las interacciones entre las restricciones y la función objetivo se traducen tanto en las soluciones óptimas como en los precios sombra, consolidando el aprendizaje práctico de la dualidad y el análisis de sensibilidad en programación lineal.

En el **Tema 8** El análisis económico en programación lineal, a través del concepto de dualidad, permite interpretar de manera práctica y útil las relaciones entre los recursos limitados y las actividades competitivas desde una perspectiva económica. En el modelo primal, las variables representan niveles de actividad, ganancias unitarias, costos unitarios y recursos disponibles, mientras que, en el

modelo dual, las variables reflejan el valor económico de los recursos disponibles, conocidos como precios sombra o precios duales.

Esta relación primal-dual proporciona herramientas clave para optimizar recursos y tomar decisiones estratégicas en escenarios económicos específicos. El ejemplo práctico de la cooperativa NUEVOPILO ilustra la formulación del modelo, la resolución por métodos gráfico y simplex, y el análisis económico de los resultados, destacando la relevancia de las soluciones primal-dual en la evaluación de los costos de oportunidad del mercado.



CAPITULO 1. PROGRAMACIÓN LINEAL

TEMA 1. INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

1.1.- OBJETIVOS

- Comprender los fundamentos, la evolución histórica y las etapas clave de la Investigación de Operaciones para aplicar sus metodologías en la optimización de decisiones empresariales y organizacionales.
- Identificar la relevancia de la Programación Lineal como herramienta fundamental para resolver problemas de optimización en la Investigación de Operaciones.
- Analizar cómo la evolución de las organizaciones humanas, desde la Revolución Industrial hasta la Segunda Guerra Mundial, impulsó el desarrollo de la Investigación de Operaciones.
- Explicar el uso de modelos matemáticos y técnicas científicas para resolver problemas complejos relacionados con la asignación eficiente de recursos limitados.
- Describir de manera precisa las etapas del proceso de la Investigación de Operaciones, desde la definición del problema hasta la implementación práctica de la solución óptima

1.2.- INTRODUCCIÓN

La Investigación de Operaciones (IO) es una rama científica dedicada a optimizar la toma de decisiones a través de métodos cuantitativos basados en el rigor científico. Su ámbito de acción es versátil, extendiéndose a disciplinas como la Administración de Empresas, la Ingeniería e incluso la gestión en el sector público. Aunque a menudo se vincula con la Programación Lineal, esta última constituye solo una parte de la IO, siendo, no obstante, una de las más significativas dentro de su estructura.

Su enfoque tiene raíces multidisciplinarias y comenzó a consolidarse como una ciencia unificada durante los años 40, fundamentado en el concepto de sistema y en la integración de diversas técnicas matemáticas orientadas a resolver desafíos prácticos.

“No puede esperarse que un solo individuo sea experto en los múltiples aspectos del trabajo de investigación de operaciones

Investigación de Operaciones (IO):
Rama científica dedicada a optimizar la toma de decisiones mediante métodos cuantitativos y el rigor científico. Su enfoque es interdisciplinario y busca resolver problemas prácticos en diversos contextos.

Revolución Industrial:

Período histórico que marcó un cambio significativo en las estructuras organizacionales y la producción, sentando las bases para la Administración Científica y la IO.

o de los problemas que se estudian, sino que se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y aptitudes”(Frederick S. Hiller and Gerald J. Lieberman, 2000).

De acuerdo con Moore, J. H. & Weatherford, L. R., C. (2000). Las principales características de la IO incluyen:

- La aplicación intensiva de herramientas matemáticas a problemas tangibles y cotidianos.
- La obligación de llevar a cabo la toma de decisiones tras cada proceso de análisis planteado.
- La creación de modelos que estructuren y orienten el camino hacia decisiones eficaces.

El enfoque en este campo puede ir desde los elementos teóricos de los modelos matemáticos hasta su uso práctico. A pesar de ello, se resalta la importancia de asegurar que las conclusiones obtenidas sean funcionales y ajustadas a las necesidades reales del mundo, especialmente en el contexto organizacional y empresarial. Por dicha razón, la IO busca armonizar sus metodologías con soluciones aplicables para la gestión estratégica.

1.3.-SINOPSIS HISTÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Según (Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz.2006), se indica que la visión histórica presentada describe la evolución de las organizaciones humanas y el desarrollo de la Investigación de Operaciones a lo largo del tiempo. Desde las primeras formas de organización social, como familias y tribus, hasta los gremios medievales y las fábricas, se destaca cómo la necesidad de satisfacer metas individuales y colectivas impulsó la creación de estructuras organizativas.

Un punto clave en este desarrollo fue la **Revolución Industrial**, que marcó un cambio significativo en las estructuras organizacionales. Durante este período, se introdujeron conceptos como la especialización del trabajo, propuesto por Adam Smith, y avances tecnológicos como la máquina de vapor de James Watt y las partes intercambiables de Eli Whitney. Además, figuras como Charles Babbage, Frederick Taylor y Henry Ford contribuyeron con ideas innovadoras que sentaron

Método Simplex:

Algoritmo utilizado en la programación lineal para encontrar la solución óptima de un problema con múltiples variables y restricciones.

las bases de la Administración Científica y la producción en masa.

La reseña también aborda el surgimiento de la Investigación de Operaciones, especialmente durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se aplicaron enfoques científicos para resolver problemas estratégicos y tácticos. Este campo evolucionó con el desarrollo de modelos matemáticos, como el **método Simplex** de **George Dantzig**, y con el avance de la programación lineal, dinámica y no lineal. La aparición del computador digital permitió una mayor capacidad para manejar información y tomar decisiones más precisas.

En décadas posteriores, se destacó el uso de técnicas como simulación, análisis estadístico y programación matemática en diversas industrias. Estos avances han sido fundamentales para optimizar recursos, resolver problemas complejos y mejorar la toma de decisiones en las organizaciones. En conclusión, la Administración de Operaciones ha sido moldeada por siglos de innovación tecnológica, científica y organizativa, consolidándose como un campo esencial para el desarrollo empresarial y social.

1.4.- IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La Investigación de Operaciones es una disciplina que combina técnicas matemáticas y enfoques científicos interdisciplinarios para resolver problemas complejos relacionados con la asignación óptima de recursos limitados. Su objetivo principal es encontrar soluciones óptimas dentro de un marco de restricciones, objetivos y variables definidas. Esto se logra mediante la construcción de modelos matemáticos que representan el problema y permiten tomar decisiones informadas.

“La investigación de Operaciones es la aplicación de la metodología científica a través de modelos, primero para representar el problema real que se quiere resolver en un sistema, y segundo para resolverlo”. (Witenberg, 1977)

Entre las técnicas más comunes de la Investigación de Operaciones se encuentran los modelos de flujos, la

George Dantzig

Fue un matemático reconocido por desarrollar el método simplex y es considerado como el "padre de la programación lineal".

Programación Lineal:

Técnica matemática utilizada dentro de la IO para resolver problemas de optimización, donde la función objetivo y las restricciones son lineales.

Cadenas de Markov:

Modelos matemáticos que describen sistemas que cambian de estado de manera probabilística, útiles en la predicción y análisis de procesos estocásticos.

programación lineal y no lineal, la teoría de colas, la teoría de juegos, **las cadenas de Markov, la simulación**, entre otras. Estas herramientas permiten abordar problemas desde diferentes perspectivas, ya sea mediante cálculos matemáticos o simulaciones que dividen los sistemas en módulos interrelacionados.

El proceso típico incluye varias etapas: análisis y formulación del problema, desarrollo del modelo matemático, obtención de una solución, prueba del modelo y la solución, implementación y establecimiento de controles. Este enfoque no solo requiere habilidades técnicas, sino también creatividad y colaboración con expertos en el problema específico para garantizar resultados efectivos.

Simulación:

Técnica que replica el comportamiento de un sistema complejo mediante modelos computacionales, especialmente útil cuando los problemas no pueden resolverse matemáticamente

Aunque los modelos matemáticos son esenciales, no todos los problemas pueden ser representados o resueltos con estas técnicas debido a su complejidad o a la cantidad de variables involucradas. En estos casos, se recurre a métodos como la simulación para analizar el comportamiento del sistema.

En resumen, la Investigación de Operaciones es tanto una ciencia como un arte que busca optimizar decisiones en sistemas complejos, maximizando el uso eficiente de recursos escasos y apoyando a los responsables en la toma de decisiones estratégicas.

Modelo Matemático:

Es una representación simplificada de un fenómeno real que se construye con símbolos y operaciones matemáticas. Se utiliza para estudiar, analizar, predecir y explicar situaciones.

El proceso típico incluye varias etapas: análisis y formulación del problema, desarrollo del **modelo matemático**, obtención de una solución, prueba del modelo y la solución, implementación y establecimiento de controles. Este enfoque no solo requiere habilidades técnicas, sino también creatividad y colaboración con expertos en el problema específico para garantizar resultados efectivos.

Aunque los modelos matemáticos son esenciales, no todos los problemas pueden ser representados o resueltos con estas técnicas debido a su complejidad o a la cantidad de variables involucradas. En estos casos, se recurre a métodos como la simulación para analizar el comportamiento del sistema.

1.5.- ETAPAS DE ESTUDIO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

De acuerdo con (Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz. 2006), se describe detalladamente el proceso de resolución de problemas mediante la investigación de operaciones, abarcando desde la definición del problema hasta la implementación de la solución. Este proceso se divide en cinco etapas principales:

Modelo Heurístico:

Tipo de modelo que utiliza reglas aproximadas o técnicas empíricas para encontrar soluciones satisfactorias a problemas complejos.

1. Definición del problema: Se identifican los objetivos del sistema, las variables involucradas (controlables y no controlables), las restricciones existentes y las alternativas posibles para tomar decisiones.
2. Construcción del modelo: Se desarrolla un modelo que represente el sistema, considerando las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones. Este **modelo** puede ser matemático, de simulación o **heurístico**, dependiendo de la naturaleza del problema. Además, se traduce todo a un formato matemático para facilitar su análisis.
3. Solución del modelo: Se resuelve el modelo utilizando técnicas como el método gráfico o simplex para obtener una solución óptima. También se realiza un análisis de sensibilidad para evaluar cómo los cambios en los parámetros afectan al modelo.
4. Validación del modelo: Se verifica si el modelo es capaz de predecir el comportamiento del sistema mediante datos históricos. Esto asegura que el modelo sea confiable y permita ajustes futuros si el sistema cambia con el tiempo.
5. Implantación de la solución: Los resultados obtenidos se comunican a los responsables de tomar decisiones mediante informes o presentaciones. Es crucial que los decisores comprendan las hipótesis y la lógica detrás de las recomendaciones para garantizar su correcta implementación.

1.6.-CUESTIONARIO DE PREGUNTAS

- a) ¿Cómo se define la Investigación de Operaciones (IO)?
- b) ¿Qué elementos comunes caracterizan a la Investigación de Operaciones (IO)?

- c) ¿Qué factores han impulsado el crecimiento de la Investigación de Operaciones (IO)?
- d) ¿Qué áreas o ramas abarca la Investigación de Operaciones (IO)?
- e) Proporcione varios ejemplos reales donde se haya aplicado la Investigación de Operaciones (IO).
- f) ¿Cuáles son las etapas principales en el estudio de la Investigación de Operaciones (IO)?
- g) ¿Cómo se describe el proceso de solución de un modelo en Investigación de Operaciones (IO)?
- h) ¿Los orígenes de la Administración de Operaciones se remontan a la Revolución Industrial?

1.7.-GLOSARIO

Administración Científica:

Enfoque sistemático para mejorar la eficiencia en la gestión y producción, desarrollado por figuras como Frederick Taylor y Henry Ford.

Análisis de Sensibilidad:

Técnica que evalúa cómo los cambios en los parámetros de un modelo afectan a su solución, permitiendo medir la robustez del modelo.

Asignación Óptima de Recursos:

Proceso de distribuir recursos limitados de manera eficiente para maximizar los beneficios o minimizar los costos.

Cadenas de Markov:

Modelos matemáticos que describen sistemas que cambian de estado de manera probabilística, útiles en la predicción y análisis de procesos estocásticos.

Implantación de la Solución:

Etapas finales del proceso de IO en la que se aplican los resultados obtenidos del modelo para resolver el problema real.

Interdisciplinariedad:

Característica de la IO que combina conocimientos de diversas disciplinas, como matemáticas, estadística, ingeniería y ciencias sociales, para resolver problemas complejos.

Investigación de Operaciones (IO):

Rama científica dedicada a optimizar la toma de decisiones mediante métodos cuantitativos y el rigor científico. Su enfoque es interdisciplinario y busca resolver problemas prácticos en diversos contextos

Método Simplex:

Algoritmo utilizado en la programación lineal para encontrar la solución óptima de un problema con múltiples variables y restricciones.

Modelo Heurístico:

Tipo de modelo que utiliza reglas aproximadas o técnicas empíricas para encontrar soluciones satisfactorias a problemas complejos.

Modelo Matemático:

Es una representación simplificada de un fenómeno real que se construye con símbolos y operaciones matemáticas. Se utiliza para estudiar, analizar, predecir y explicar situaciones.

Problema de Decisión:

Situación en la que se deben elegir entre varias alternativas para alcanzar un objetivo bajo ciertas restricciones.

Producción en Masa:

Sistema de producción caracterizado por la fabricación de grandes cantidades de productos estandarizados, impulsado por la especialización y la automatización.

Programación Lineal:

Técnica matemática utilizada dentro de la IO para resolver problemas de optimización, donde la función objetivo y las restricciones son lineales.

Revolución Industrial:

Período histórico que marcó un cambio significativo en las estructuras organizacionales y la producción, sentando las bases para la Administración Científica y la IO.

Simulación:

Técnica que réplica el comportamiento de un sistema complejo mediante modelos computacionales, especialmente útil cuando los problemas no pueden resolverse matemáticamente.

Teoría de Colas:

Rama de la IO que estudia sistemas de espera o colas para optimizar el tiempo de atención y los recursos necesarios en servicios.

Teoría de Juegos:

Técnica matemática que analiza situaciones de conflicto o cooperación entre diferentes participantes para determinar estrategias óptimas.

Validación del Modelo:

Proceso de verificar si un modelo matemático representa adecuadamente el comportamiento del sistema real y produce resultados confiables.

1.8.-APÉNDICE



En la siguiente Tabla (Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz. 2006), se pueden observar algunos ejemplos de casos reales de uso de la Investigación Operativa por parte de diferentes organizaciones y las ganancias y/o ahorros conseguidos a raíz de ello.

Tabla 1. Uso de la Investigación Operativa

Organización	Aplicación	Año	Ahorros anuales
Ministerio holandés de Infraestructura y Medio Ambiente (The Netherlands Rijkswaterstaat)	Desarrollo de la política nacional de administración del agua, incluyendo mezcla de nuevas instalaciones, procedimientos de operaciones y costes	1985	\$15 millones
Monsanto Corp.	Optimización de las operaciones de producción para cumplir metas con un costo mínimo	1985	\$2 millones
Weyerhaeuser Co.	Optimización del corte de árboles para maximizar la producción de productos derivados de la madera	1986	\$15 millones
Electrobras/CEPAL Brasil	Asignación óptima de recursos hidráulicos y térmicos en el sistema nacional de generación de energía	1986	\$43 millones
United Airlines	Programación de turnos de trabajo en oficinas de reservas y aeropuertos para cumplir con las necesidades del cliente a un costo mínimo	1986	\$6 millones

Organización	Aplicación	Año	Ahorros anuales
CITGO Petroleum Corp.	Optimización de las operaciones de refinación y de la oferta, distribución y comercialización de productos	1987	\$70 millones
Santos, Ltd.	Optimización de inversiones de capital para producir gas natural durante 25 años en Australia	1987	\$3 millones
Electric Power Research Institute	Administración de inventarios de petróleo y carbón para el servicio eléctrico con el fin de equilibrar los costos de inventario y los riesgos de déficit	1989	\$59 millones
San Francisco Police Department	Optimización de la programación y asignación de oficiales de patrulla con un sistema informatizado	1989	\$11 millones
Texaco, Inc.	Optimización de la mezcla de ingredientes disponibles para que los combustibles obtenidos cumplieran con los requerimientos de ventas y calidad	1989	\$30 millones
IBM	Integración de una red nacional	1990	\$20 millones + \$250 millones

Organización	Aplicación	Año	Ahorros anuales
	de inventario de recambios para mejorar el apoyo al servicio		en menor inventario
U.S. Military Airlift Command	Rapidez en la coordinación de aviones, tripulación, carga y pasajeros para manejar la evacuación por aire en el proyecto "Tormenta del Desierto" en el Medio Oriente	1992	Victoria
American Airlines	Diseño de un sistema de estructura de precios, sobreventas (exceso de reservas) y coordinación de vuelos para mejorar los beneficios	1992	\$500 millones más de ingresos
Yellow Freight System, Inc.	Optimización del diseño de una red nacional de transporte y la programación de rutas de envío en Estados Unidos	1992	\$17.3 millones
New Haven Health Dept.	Diseño de un programa efectivo de cambio de agujas para combatir el contagio del SIDA	1993	33% menos contagios
AT&T	Desarrollo de un sistema	1993	\$750 millones

Organización	Aplicación	Año	Ahorros anuales
	informático en el diseño del centro de llamadas para guiar a los clientes del negocio		
Delta Airlines	Maximización de ganancias a partir de la asignación de los tipos de aviones en 2.500 vuelos nacionales en Estados Unidos	1994	\$100 millones
Digital Equipment Corp.	Reestructuración de toda la cadena de suministros entre proveedores, plantas, centros de distribución, sitios potenciales y áreas de mercado	1995	\$800 millones
China	Selección y programación óptima de proyectos masivos para cumplir con las necesidades futuras de energía del país	1995	\$425 millones
Cuerpo de defensa de la República Sudáfrica	Rediseño óptimo del tamaño y forma del cuerpo de defensa y su sistema de armas	1997	\$1.100 millones
Procter & Gamble	Rediseño del sistema de	1997	\$200 millones

Organización	Aplicación	Año	Ahorros anuales
	producción y distribución norteamericano para reducir costos y mejorar la rapidez de llegada al mercado		
Taco Bell	Programación óptima de empleados para proporcionar el servicio a clientes deseado con un costo mínimo	1998	\$13 millones
Hewlett-Packard	Rediseño de tamaño y localización de inventarios de seguridad en la línea de producción de impresoras para cumplir metas de producción	1998	\$280 millones de ingreso adicional

Fuente: (Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz, 2006)



CAPÍTULO 2. PROGRAMACIÓN LINEAL

TEMA 2. PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1.-OBJETIVOS:

- Conceptualizar la creación de modelos matemáticos.
- Comprender que es la programación lineal
- Comprender los conceptos, de función objetivo, variables de decisión y restricciones.
- Aplicación de ejercicio al desarrollo de modelo matemático de programación lineal.

Origen Histórico

Hecho: La programación lineal fue desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial para optimizar recursos militares, como la asignación de aviones y combustible. El matemático George Dantzig es considerado el padre de la programación lineal por haber creado el Método Simplex en 1947.

Curiosidad: Dantzig creó el Método Simplex como una herramienta práctica para resolver problemas reales, y no esperaba que se convirtiera en uno de los algoritmos más importantes de la historia.

2.2.-INTRODUCCIÓN

“En situaciones ciertas, no hay margen de maniobra cuando se trata de resolver un problema; es necesario trasladarlo a un entorno determinado con límites, como, por ejemplo; los suministros de materia prima, la capacidad de las empresas y las demandas de productos terminados. En un entorno de toma de decisiones, los modelos importan porque capturan la esencia de muchos temas importantes. En cierto sentido, la noción precisa de ser capaz de dar solución a un problema concreto significa que es posible resolver el problema a satisfacción, optimizándolo, creando el camino hacia el desarrollo del uso de la programación lineal. “En la investigación de operaciones como en la medicina, el problema se presenta por los síntomas, no por el diagnóstico, en todo el estudio de I.O. se debe buscar el mayor número de síntomas antes de empezar el proyecto que generara soluciones”(Witenberg, 1977).

Por lo tanto, la capacidad de formular modelos, es decir, traducir el problema del mundo real en un problema matemático de modelo cuantitativo, es un primer paso importante en el modelado como herramienta de gestión, dentro de este primer paso en la formulación de modelos estará la identificación de restricciones.

Un modelo matemático por lo tanto es la representación simbólica de un sistema del cual se quiere resolver un problema. Está conformado por un sistema de ecuaciones y expresiones matemáticas relacionadas que describirán el problema.

2.3.-DESARROLLO

Conceptualización

Proceso de describir y entender los elementos de un sistema para formular un problema matemático.

2.3.1.-Conceptualización

La creación de un modelo de programación lineal se inicia con el diagnóstico del sistema a ser estudiado, este primer paso implica el reconocer los síntomas indicadores de la presencia de una situación que amerita mejoras en la toma de decisiones. El sistema se interpreta como la **conceptualización** de la realidad describiendo los elementos que intervienen e interactúan entre sí en una organización. Los sistemas a nivel organizacional se pueden asimilar de las siguientes formas:

2.3.1.1.-Conceptualización estructural:

Un sistema es un conjunto de elementos interrelacionados diseñados para lograr un objetivo común. El propósito de este paso es responder ¿por qué?

2.3.1.2- Conceptualización como caja negra:

Un Sistema es un proceso en el que intervienen entradas (recursos, materia prima, etc.) para obtener salidas (productos). El Objetivo de este paso es responder la pregunta ¿Para qué?

2.3.1.3--Conceptualización funcional:

Un sistema es un conjunto de actividades interrelacionadas diseñadas para lograr un objetivo específico. El propósito de este paso es responder a la pregunta, ¿cómo funciona?

Estos sistemas conceptualizados nos permiten comenzar el intento de formular el problema, el mismo que requiere:

- a) Identificar las componentes controlables y no controlables de un sistema.
- b) Identificar las posibles rutas de acción, dadas por las componentes controlables.
- c) Definir el marco de referencia dado por las componentes no controlables.
- d) Definir los objetivos que se persiguen y clasificarlos por su orden de importancia.
- e) Identificar las interrelaciones importantes entre las diferentes componentes del sistema. Este paso equivale a encontrar las restricciones que existen, a la vez que permite más adelante representar estas interrelaciones en forma matemática.



Impacto en la Economía

Hecho: Muchas empresas, desde supermercados hasta gigantes tecnológicos, utilizan programación lineal para optimizar sus operaciones. Por ejemplo:

Amazon: Optimiza rutas de entrega y distribución de inventarios.

Starbucks: Decide cuántos productos enviar a cada tienda para minimizar costos y evitar desperdicios.



Aplicaciones en la Vida Real

Hecho: La programación lineal se usa en la industria de la aviación para planificar horarios de vuelos, asignar tripulaciones y minimizar costos de combustible.

Ejemplo curioso: En 1985, American Airlines utilizó programación lineal para rediseñar sus rutas y ahorró más de 40 millones de dólares en un solo año.

Modelo Matemático

Representación simbólica de un sistema real mediante ecuaciones y expresiones matemáticas para resolver problemas específicos. Formular un problema matemático

Programación Lineal

Rama de las matemáticas aplicada que se ocupa de maximizar o minimizar una función objetivo, sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

De acuerdo con la información que se pueda obtener, después de definir el problema, observaremos que los datos pueden conducir a dos tipos de problemas, bajo certidumbre (un solo resultado) y bajo incertidumbre (muchos resultados). Analizaremos en este capítulo los que tienen certidumbre, que pueden ser de información obtenida en tiempo real, o histórica.

Habiendo descrito la organización, a través de un sistema, y habiendo desarrollado por medio de ellos la conceptualización, pasamos al siguiente paso que es la modelación.

2.4-Modelación

Según (Moore, J. H. & Weatherford, L. R. Para nuestro análisis de Investigación de operaciones, podemos definir tres clases de modelos; a saber (2000) :

2.4.1-Modelos Icónicos:

Representa de forma gráfica el sistema cuyo problema se desea resolver.

Ejemplos: Planos, Maquetas, Fotografías.

2.4.2-Modelos Analógicos:

Representan las propiedades del sistema haciendo uso de otro, el cual tenga las mismas propiedades.

Ejemplos: Analogía entre sistema hidráulico-sistema eléctrico
Analogía entre sistema mecánico -eléctrico.

2.4.3- Modelos Matemáticos o Simbólicos.

Se representan los sistemas a través de conceptualizaciones abstractas haciendo uso de letras, símbolos, ecuaciones, desigualdades.

De estos tres usaremos los **modelos matemáticos**, ya que son los más económicos de representar y fáciles de operar.

El modelado implica intentos de traducir las definiciones de problemas en relaciones matemáticas. Si el modelo resultante se ajusta a uno de los modelos matemáticos estándar, como en la programación lineal, la solución generalmente se puede obtener utilizando los algoritmos disponibles.

Por otro lado, si la relación matemática es demasiado compleja para determinar una solución



Inspiración en la Naturaleza

Hecho: Algunos modelos de programación lineal se inspiran en procesos naturales. Por ejemplo, las abejas optimizan sus rutas de recolección de néctar de manera similar a cómo los algoritmos de programación lineal optimizan rutas de transporte.

Curiosidad: Aunque las abejas no hacen cálculos matemáticos, su comportamiento es tan eficiente que ha inspirado algoritmos de optimización.

analítica, el equipo de Investigación de operaciones puede optar por simplificar el modelo y usar heurística o considerar simulaciones si es necesario.

Para Witenberg, “los modelos siempre deben ser menos complejos que el sistema real, de otra manera, para que quebrarse la cabeza con modelos si se puede trabajar con el sistema real en si” (1977).

En algunos casos, las simulaciones matemáticas se pueden combinar con modelos heurísticos para resolver problemas de toma de decisiones.

2.5.-Programación Lineal

“El desarrollo de la **programación lineal** ha sido clasificado como uno de los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, y estamos de acuerdo con esta aseveración. Su efecto desde 1950 ha sido extraordinario” (Moore, J. H. & Weatherford, L. R., 2000).

Uno de estos modelos matemáticos estándar de programación Lineal, fue desarrollado por el Ing. Danzig. El mismo que tiene las siguientes especificaciones:

2.5.1. Función objetivo:

Es una medida de desempeño optimizable minimizada o maximizada, expresada como variables de decisión.

2.5.2.-Variables de decisión:

Reflejan el número de decisiones a tomar; son los valores que debe encontrar el sistema para lograr un nivel óptimo de rendimiento.

2.5.3.-Constantes del Sistema:

Estos son los parámetros conocidos del problema. Para determinarlos, se deben recopilar datos apropiados sobre la función objetivo y las restricciones de la variable de decisión durante la definición del problema.

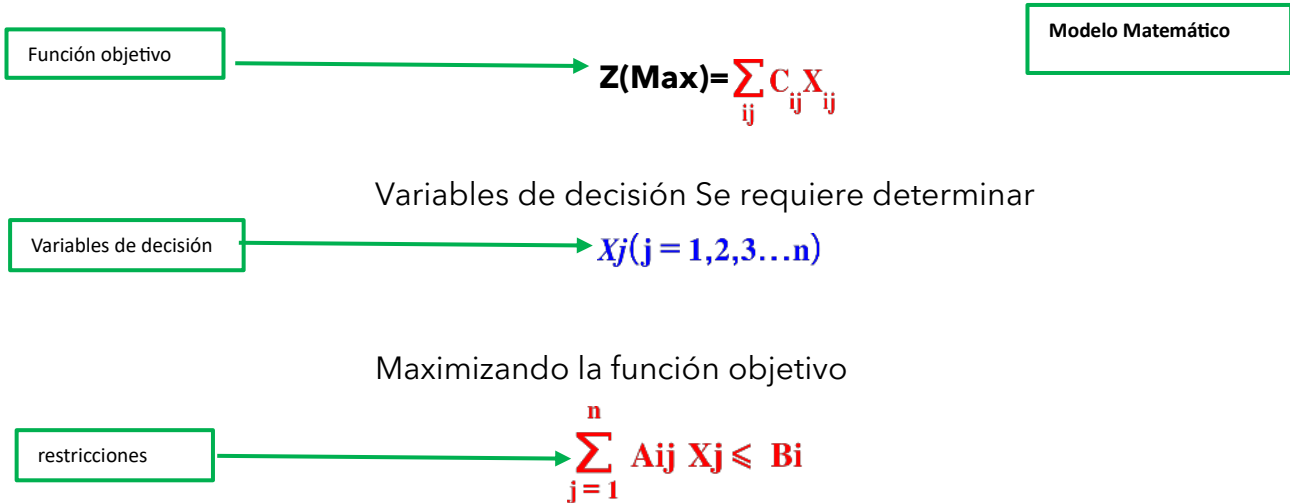
2.5.4.-Restricciones:

Estas son restricciones del sistema que limitan matemáticamente las variables de decisión y definen la solución al problema, Se representan mediante ecuaciones o desigualdades. Dentro de las restricciones del modelo

matemático de programación lineal, existe una condición implícita que siempre debe cumplirse: la condición de no negatividad. Esta restricción restringe la solución al obligar a la variable de decisión a tomar solo valores positivos o cero; nunca un número negativo.

Matemáticamente tendrá el siguiente planteamiento de programación lineal:

2.5.5.-Planteamiento matemático



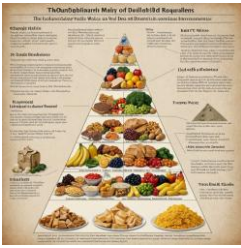
Donde:

B_i Es una constante que debe indicar la limitación del recurso i para producir o servir

A_{ij} Concurso de un recurso i a un determinado producto j

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad i=1,2,3,\dots, m ; j= 1,2,3,\dots,n$$

A este modelo matemático de programación lineal lo denominaremos forma canónica. De acuerdo con González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A., "vamos a desarrollar el siguiente ejemplo, al que llamaremos de satisfacción diaria, para determinar la adaptación del modelo matemático propuesto a una situación cotidiana" (2015).



Un Problema Famoso: La Dieta

Hecho: Uno de los primeros problemas resueltos con programación lineal fue el Problema de la Dieta, planteado por el ejército de EE. UU. durante la Segunda Guerra Mundial para encontrar la combinación más económica de alimentos que cumpliera con los requisitos nutricionales de los soldados.

Curiosidad: Este problema sigue siendo un clásico en los cursos de programación lineal, y su versión moderna se aplica en aplicaciones de nutrición y salud.



Existen muchas situaciones cotidianas que, a primera vista, parecen no tener relación con modelos matemáticos de programación lineal. Sin embargo, esta herramienta puede aplicarse a una amplia variedad de problemas prácticos. Por ejemplo, este caso del joven que va a pasar un día de descanso parecería en un primer momento no ser identificable con un modelo de programación lineal

2.6.-EJERCICIO PROTOTÍPICO: SATISFACCIÓN DIARIA

Un alumno de la facultad de ciencias empresariales va a asistir a un paseo de integración, que durara un día. El espera sacarle el máximo provecho. Realizando las actividades que más le gustan.

La tabla 1. expresa el grado de satisfacción (del 1 al 10), que le produce cada una de las actividades.

Tabla 2. Grado de satisfacción

	Actividad	Grado de satisfacción
1	Comer una parrillada	8
2	Tomar una cerveza	4
3	Jugar un partido de Futbol	7
4	Bailar	6
5	Nadar	3
6	Dormir	4

Fuente: adaptado de González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A. (2015).

Aunque él quisiera realizar todas las actividades, tiene limitaciones. Como es lógico, sólo se dispone de un día de 24 horas, y las actividades consumen tiempo, así:

Actividad 1 30 min.

Actividad 2 15 min.

Actividad 3 2 horas

Actividad 4 60 min.

Actividad 5 60 min

Actividad 6 60 min.

Además, por la situación económica en que vive no le es posible tomar más de cinco cervezas diarias; no puede comer más de dos parrilladas al día, por cuestiones de salud; no puede jugar más de dos partidos de fútbol diario, por



Programación Lineal en el Cine

Hecho curioso: En la película "Una mente brillante" (2001), basada en la vida del matemático John Nash, se menciona la optimización matemática como parte fundamental de las teorías económicas y de decisiones.

Dato extra: Aunque Nash trabajó en teoría de juegos (no programación lineal directamente), su trabajo complementa los métodos utilizados en optimización.



Un ejemplo cotidiano donde se puede aplicar un modelo de programación lineal es la planificación de las comidas de una semana. Supongamos que quieres diseñar un menú semanal que cumpla con ciertos requerimientos nutricionales (proteínas, carbohidratos, grasas, vitaminas) y que al mismo tiempo minimice el costo total de los ingredientes.

VARIABLES DE DECISIÓN:

- x1: Cantidad de pollo en gramos.
- x2: Cantidad de arroz en gramos.
- x3: Cantidad de brócoli en gramos. - (y así con los demás alimentos que consideres).

Función objetivo:

Minimizar el costo total:

$$\text{Costo} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots$$

Restricciones

cansancio; no puede nadar más de dos horas, por aburrimiento, y no puede bailar más de dos horas también por agotamiento. En cuanto a dormir, se sabe que no se puede dormir más de diez horas al día, ni menos de siete.

¿Cuáles son las actividades y cuantas debe realizar para lograr su objetivo sin salirse de las limitaciones?

Tabla 3. Duración y límite de las actividades

	Actividad	Tiempo	Límite de actividad	Grado de satisfacción
1	Comer una parrillada	30 min.	2	8
2	Tomar una cerveza	15 min.	5	4
3	Jugar un partido de Futbol	120 min	2	7
4	Bailar	60 min.	2	6
5	Nadar	60 min	2	3
6	Dormir	60 min.	$7 \leq X \leq 10$	4

Fuente: adaptado de González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A. (2015).

Análisis

Definición de las **Variables de decisión:**

VARIABLE	Actividad
x_1	Comer una parrillada
x_2	Tomar una cerveza
x_3	Jugar un partido de Futbol
x_4	Bailar
x_5	Nadar
x_6	Dormir

Diseño del modelo Matemático

Si se designa con **Z** la función de satisfacción total, la función objetivo será:

Función objetivo:

$$Z(\max) = 8X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 6X_4 + 3X_5 + 4X_6$$

Restricciones:

Sujeto a (S.A.):

$$30X_1 + 15X_2 + 120X_3 + 60X_4 + 60X_5 + 60X_6 \leq 1440 \text{ minutos (tiempo por un día)}$$

$$X_1 \leq 2(\text{cantidad de parrilladas})$$

$$X_2 \leq 5(\text{cantidad de cervezas})$$

$$X_3 \leq 2(\text{cantidad de partidos})$$

$$X_4 \leq 2(\text{cantidad de baile})$$

$$X_5 \leq 2(\text{cantidad de nado})$$

$$X_6 \leq 10(\text{cantidad de dormida}$$

máxima)

$$X_6 \geq 7(\text{cantidad de dormida}$$

mínima)

Hallado el modelo matemático, se procederá a hallar la solución, a través de los procedimientos creados para tal fin, y que los veremos en los siguientes temas.

1.Requerimientos nutricionales:

- Proteínas: $p1 \cdot x1 + p2 \cdot x2 + p3 \cdot x3 \geq$
- Carbohidratos: $h1 \cdot x1 + h2 \cdot x2 + h3 \cdot x3 \geq$ requerimiento mínimo.
- Grasas: $g1 \cdot x1 + g2 \cdot x2 + g3 \cdot x3 \leq$ límite máximo.

2. Restricción de calorías totales:

- $k1 \cdot x1 + k2 \cdot x2 + k3 \cdot x3 \leq$ calorías diarias recomendadas.

3. Restricciones de disponibilidad:

- Cada alimento no puede superar cierta cantidad disponible en casa o en el mercado.

De esta forma, puedes usar programación lineal para encontrar la combinación óptima de alimentos que cumpla con tus necesidades y respete tu presupuesto. Aunque parece una tarea cotidiana, es un problema que puede modelarse matemáticamente.



Programación Lineal en el Futuro

Hecho: La programación lineal juega un papel clave en la inteligencia artificial y el aprendizaje automático, especialmente en áreas como la optimización de modelos de redes neuronales.

Curiosidad: Con el auge de los vehículos autónomos, la programación lineal se utiliza para calcular rutas óptimas y minimizar el consumo de energía.

2.7.-CONCLUSIONES

En conclusión, la programación lineal se identifica como un modelo matemático que permite representar problemas mediante una función objetivo, la cual puede ser maximizada o minimizada según el caso. Este modelo incluye restricciones lineales, expresadas como igualdades o desigualdades matemáticas, que delimitan las posibles soluciones. Además, se demostró que situaciones cotidianas descritas en lenguaje común pueden traducirse a un modelo estandarizado de programación lineal, proporcionando una herramienta clara y estructurada para abordar y resolver problemas. Esto establece una base sólida para comprender y aplicar de manera efectiva los principios de la programación lineal en diversos contextos.

2.8.-CUESTIONARIO

2.8.1.-VERDADERO-FALSO

1. Por lo general, entre más complicado sea un modelo, menos útil será **(V) (F)**
2. La totalidad de lo que sucede en el mundo real es tomado en cuenta por los modelos **(V) (F)**
3. Los modelos para situaciones administrativas tienen una sola forma de ser realizados **(V) (F)**
4. Los modelos construidos en la práctica para situaciones administrativas siempre son realizados por especialistas en diferentes campos **(V) (F)**
5. El discernimiento y el conocimiento de un empleado son regularmente sustituidos por un modelo **(V) (F)**
6. Son a menudo utilizados datos en la creación de modelos **(V) (F)**
7. El trabajo más importante de la administración generalmente es la evaluación de modelos **(V) (F)**
8. Las limitaciones son expresadas por las restricciones en un modelo **(V) (F)**
9. En un modelo de PL todas las restricciones son desigualdades **(V) (F)**

10. La Función objetivo es una medida de desempeño optimizable minimizada o maximizada, expresada como variables de decisión **(V) (F)**
11. Las Variables de decisión reflejan el número de decisiones a tomar **(V) (F)**
12. Las Constantes del Sistema son los parámetros conocidos del problema **(V) (F)**

2.8.2. OPCIÓN MÚLTIPLE

13.- Todo modelo es:

- a. una situación imaginada
- b. La imagen seleccionada de una situación real
- c. un acercamiento a la situación
- d. una idealización
- e. todo lo anterior

14.- Normalmente, se toman las decisiones en consideración de:

- a. la valoración de los resultados
- b. valores dados por los modelos
- c. modelos intuitivos no redactados
- d. todo lo anterior

15.- Un modelo de programación lineal por lo general:

- a. aunque sean muy grandes se pueden optimizar
- b. es más útil para analizar problemas que para hallar soluciones
- c. son de carácter estocástico
- d. alguna vez son resueltos con programas informáticos

16.- Los sistemas a nivel organizacional se pueden asimilar de forma:

- a. estructural, funcional y como caja negra.

- b.** informal, estructural y funcional
- c.** funcional, estructural y condicional.
- d.** todo lo anterior

17.- Un programa lineal se caracteriza:

- a.** Por tener función objetivo y restricciones.
- b.** Porque todas las funciones son lineales
- c.** Para las variables de decisión se obtienen valores óptimos.
- d.** Ninguna de las anteriores

18.- Para nuestro análisis de Investigación de operaciones, podemos

definir tres clases de modelos; a saber:

- a.** Icónicos, analógicos y matemáticos.
- b.** informal, estructural y funcional
- c.** Metódicos, analógicos y funcionales
- d.** Ninguna de las anteriores

19.- Las restricciones de no negatividad son parte de la programación

lineal porque:

- a.** Permiten resolver más fácilmente el problema.
- b.** Permiten que el problema sea más cercano a la situación a ser modelada.
- c.** Puntos a y b
- d.** Ninguna de las anteriores

2.8.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

En los siguientes ejercicios formular el modelo matemático de programación lineal.

20.- La IMPERIAL fabrica y vende dos modelos de zapatos. Obteniendo una ganancia de \$14 por cada par que vende de su modelo 1, y de \$15 por cada par de su modelo 2. En la tabla 1. se resumen las horas de trabajo para la fabricación de estos modelos en las tres secciones de producción. Se dispondrá de la siguiente cantidad de horas de trabajo durante el siguiente mes: 100 horas en la sección 1, 50 horas en la sección 2 y 200 horas en la sección 3. Si la IMPERIAL desea en maximizar las ganancias, desarrolle el modelo de programación lineal.

Tabla 4. REQUERIMIENTO DE HORAS DE TRABAJO DEPARTAMENTO

SECCION	Modelo 1 (horas)	Modelo 2 (horas)
1	1	2
2	1	3
3	2	3

21.-CAT SHOP, tienda de balanceado para gatos mezcla dos tipos de soya (de acuerdo con la tabla 3) para obtener una dosis bien balanceada, que incluya al menos 16 onzas de proteína y 2 onzas de grasa al día.

Tabla 5. Datos Tipos de Soya

SOYA	VALOR POR ONZA (\$)	PROTEINA(%)	GRASAS(%)
TIPO 1	0.80	50	10
TIPO 2	0.15	20	20

Desarrolle el modelo matemático de programación lineal, que permita hallar el costo mínimo de la mezcla ideal.

22.- Henry Yanes preside una compañía de inversiones que maneja las carteras de acciones de algunas empresas. Una empresa pide que Yanes se haga cargo de una cartera de \$1,000,000. Y que se invierta en una mezcla de tres tipos de acciones únicamente, tal y como se observa en la tabla 4. Desarrolle un modelo de PL que permita indicar cuántas acciones de cada tipo tendría que adquirir Henry con la finalidad de maximizar el rendimiento anual total estimado de esa cartera.

Tabla 6. Valor de las acciones

ACCIONES	VALOR POR ACCION (\$)	RENDIMIENTO ESTIMADO ANUAL (\$)	MAXIMA INVERSION POSIBLE (\$)
EL ROSADO	120	14	120000
LA FAVORITA	50	6	50000
LA UNIVERSAL	40	6	60000

23.- Una cooperativa dispone de \$200.000 y quiere invertirlos en dos operaciones que maximizasen el beneficio de la inversión. La primera le da una ganancia de \$15 mensuales, y la segunda le reporta \$50 mensuales por cada \$200 invertidos. La asamblea de socios impone las condiciones de que se debe invertir por lo menos el 30 % del capital en la primera operación y no más del 60 % en la segunda. Asimismo, el valor invertido en el último no debe ser mayor a 1,4 veces la cantidad invertida en el primero. Desarrollar el problema como un modelo matemático de programación lineal.

24.- «Industrias Lácteas» puede almacenar hasta de 100.000 litros de leche por día. La Gerencia pide que al menos 60.000 litros se envasen por día, y lo demás se use para obtener leche saborizada o mantequilla. De acuerdo con el uso dispuesto cada litro de leche reporta una ganancia de: envasada \$10, saborizada \$15 y \$16 la unidad de mantequilla producida por un litro de leche. La planta de producción de mantequilla puede usar hasta 24.000 litros diarios de leche, el equipo de envase puede manejar hasta 80.000 litros diarios, y el de leche saborizada puede manejar hasta 40.000 litros por día.

Con la finalidad de obtener la máxima utilidad, se desea conocer cuanta mantequilla, leche saborizada y envasada se debe producir diariamente. Plantear el modelo matemático.

25.- El siguiente es el número mínimo de meseras necesarias para que una cafetería pueda funcionar las 24 horas del día:

Tabla 7. Número mínimo de meseras

Período	Mínimo de meseras
6:00 - 10:00	10
10:00 - 14:00	12
14:00 - 18:00	7
18:00 - 22:00	8
22:00 - 2:00	12
2:00 - 6:00	7

Cada mesera trabaja ocho horas consecutivas por día. El objetivo es encontrar el menor número requerido para cumplir con las condiciones anteriores. Plantee este problema como un modelo de programación lineal.

26.- El **problema clásico de la dieta**, también conocido como el **problema de la dieta de Stigler**, es un problema de optimización lineal que busca determinar la combinación más económica de alimentos que satisfaga los requerimientos nutricionales mínimos de una persona. Fue uno de los primeros problemas de programación lineal que se resolvieron utilizando métodos matemáticos, y el matemático **George Dantzig**, creador del método simplex, lo resolvió de manera eficiente. **Contexto del problema:** El problema fue planteado originalmente durante la Segunda Guerra Mundial para ayudar al ejército de los Estados Unidos a proporcionar raciones nutritivas a bajo costo. La idea era seleccionar alimentos de una lista disponible para cumplir con los requisitos nutricionales (calorías, proteínas, vitaminas, etc.) al menor costo posible. ¿Cómo se formularía el problema mediante un modelo de **programación lineal**?

2.8.- GLOSARIO

Algoritmo

Conjunto de pasos o procedimientos utilizados para resolver un problema matemático o computacional.

Certidumbre

Situación en la cual los datos disponibles permiten predecir un único resultado.

Conceptualización

Proceso de describir y entender los elementos de un sistema para formular un problema matemático.

Conceptualización Estructural

Describe un sistema como un conjunto de elementos interrelacionados con un objetivo común. Responde a la pregunta "¿Por qué?".

Función Objetivo

Expresión matemática que mide el desempeño de un sistema y que debe ser optimizada (maximizada o minimizada).

Heurística

Métodos simplificados o aproximados para resolver problemas complejos cuando no es posible encontrar una solución exacta.

Incertidumbre

Situación en la que los datos disponibles pueden conducir a múltiples resultados posibles.

Investigación de Operaciones (I.O.)

Disciplina que utiliza modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos para ayudar en la toma de decisiones y optimización de sistemas complejos.

Modelación

Proceso de traducir un problema real en un modelo matemático mediante relaciones matemáticas.

Modelo Matemático

Representación simbólica de un sistema real mediante ecuaciones y expresiones matemáticas para resolver problemas específicos.

Modelos Analógicos

Representan las propiedades de un sistema utilizando otro sistema con características similares (ej. analogías hidráulicas o eléctricas).

Modelos Icónicos

Representan gráficamente un sistema (ej. planos, maquetas).

Modelos Matemáticos o Simbólicos

Representan un sistema mediante ecuaciones, desigualdades y símbolos abstractos.

Optimización

Proceso de encontrar la mejor solución posible dentro de las limitaciones dadas por un modelo matemático.

Programación Lineal

Rama de las matemáticas aplicada que se ocupa de maximizar o minimizar una función objetivo, sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

Restricciones

Limitaciones o condiciones del sistema que restringen las posibles soluciones del modelo, expresadas mediante ecuaciones o desigualdades.

Tiempo Real

Información obtenida en el momento actual, utilizada para tomar decisiones en condiciones de certidumbre.

Variables de Decisión

Elementos que representan las decisiones a tomar dentro de un modelo y cuyos valores deben encontrarse para lograr un resultado óptimo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (2009). Network flows: Theory, algorithms, and applications. Prentice Hall.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011). Linear programming and network flows (4^a ed.). Wiley.
- Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (2004). Introduction to Linear optimization. Athena Scientific.
- Cohen, M. A., & Murdock, J. (2012). Operations research: A practical introduction. Wiley.
- Dantzig, G. B., & Thapa, M. (2003). Linear programming: Foundations and extensions (2^a ed.). Springer.
- Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz. (2006). PHPSIMPLEX Versión 0.81 [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm
- Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (1993). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa. Prentice Hall.
- Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., & Schmidt, C. (2000). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa (5^a ed.). Prentice Hall.
- González Ariza, Á. L., & García Llinás, G. A. (2015). Manual práctico de investigación de operaciones I (4.^a ed.). Editorial Universidad del Norte.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). Introduction to operations research (10^a ed.). McGraw-Hill.
- Kall, P., & Mayer, S. (2005). Stochastic optimization: Methods and applications. Springer.

- Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2008). Linear and nonlinear programming (3ª ed.). Springer.
- Murty, K. G., & Katta, S. (1983). Linear programming. Wiley.
- Prawda Witenberg, Juan. (1977). Métodos y modelos de investigación de operaciones: Vol. 1 (1977.a ed.). Limusa.
- Rardin, R. L. (2016). Optimization in operations research (2ª ed.). Pearson.
- Sasieni, M. W., & Cohen, R. (2007). Operations research: A practical guide to the use of OR techniques. Wiley.
- Shamblin, J., & Stevens, G. T. (1988). Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental. McGraw-Hill Interamericana.
- Taha, H. A. (2017). Operations research: An introduction (10ª ed.). Pearson.
- Winston, W. L. (2004). Operations research: Applications and algorithms (4ª ed.). Brooks/Cole.
- Bingham, R. (1983). Programas de computación para formular alimentos. Avicultura profesional.
- Gass, S. I. (1990). An illustrated guide to linear programming. Dover Publications.
- Gallagher, H., & Watson, J. (1990). Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. McGraw-Hill Interamericana.
- Peñafiel, L. (1976). Programación lineal. Trillas S.A.
- Rincón Abril, Luis Alberto. (2001). Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas. Universidad Nacional de Colombia.

Varela, J. E. (1991). Introducción a la investigación de operaciones. Fondo Editorial Interamericana.



CAPÍTULO 3. MÉTODO SIMPLEX

TEMA 3. SOLUCIÓN GRÁFICA DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1.-OBJETIVOS

- Usar GEOGEBRA
- Graficar las restricciones del modelo matemático para determinar la región factible.
- Hallar los vértices de la región factible
- Sustituir las coordenadas de los vértices en la función objetivo
- Encontrar el vértice óptimo en la región factible
- Obtener la solución óptima de manera grafica

3.2.-INTRODUCCIÓN

El empleo de herramientas como GEOGEBRA para solucionar problemas de programación lineal resulta una estrategia eficaz para lograr una comprensión visual e intuitiva tanto de las restricciones como de la función objetivo. Aunque habitualmente no se enfrenten casos con solo dos variables en la práctica, trabajar con este nivel de simplicidad permite establecer los fundamentos necesarios para enfrentar problemas más avanzados mediante el método simplex. Por otra parte, los ejemplos utilizados, como las camionetas de cabina simple y doble, o los molinos chilenos y de bolas, son de gran utilidad para ilustrar cómo aplicar estos principios y para familiarizarse con las soluciones de dos estados que se explorarán en etapas posteriores.

3.3.-DESARROLLO

3.3.1.-FUNDAMENTOS PARA SOLUCIÓN GRÁFICA:

Para Eppen, Gould y Schmidt, la solución gráfica se emplea de manera general para encontrar la solución a problemas de dos variables, ya que resulta bastante difícil dibujar planos de tres variables, y físicamente imposible realizarlo para cuatro o más variables. Su objetivo primordial es introducir los conceptos básicos utilizados para desarrollar posteriormente las técnicas analíticas que permitirán hallar solución de problemas con n variables (1993).

Para esto necesitaremos el uso del programa gratuito GeoGebra, dando a continuación las bases para su instalación.

3.3.2.-GEOGEBRA

GeoGebra:

Software gratuito que combina geometría, álgebra y cálculo para resolver problemas matemáticos de manera visual e interactiva.

Creación por un estudiante universitario

GeoGebra fue creado en 2001 por Markus Hohenwarter, un estudiante universitario austriaco, como parte de su proyecto de maestría. En ese momento, su objetivo era crear una herramienta que combinara álgebra y geometría de manera interactiva, algo que no era común en el software educativo de la época.

Introducción: GeoGebra es una herramienta muy útil para estudiantes y profesores, ya que facilita el aprendizaje y la enseñanza de conceptos matemáticos y físicos. Su capacidad para combinar geometría, álgebra y cálculo en un entorno dinámico permite explorar y comprender de manera visual y práctica diversas ideas matemáticas. Además, su facilidad para construir y modificar elementos como puntos, figuras, rectas y funciones lo convierte en un recurso versátil para resolver problemas y realizar demostraciones interactivas.

Lo puede instalar en su teléfono celular, o en su computador. Su instalación es gratuita desde su página oficial:

Página Web: <http://www.geogebra.org>

Búsqueda de Ayuda: <http://www.geogebra.org/ayuda/search.html>

o también pueden hacerlo funcionar desde su servidor online: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT

3.4.-PROCEDIMIENTO:

Según Eppen, Gould y Schmidt, el procedimiento de adaptación de un modelo de programación lineal, para ser graficado es primero (1993):

- a) Convertir las desigualdades en igualdades, reemplazando los signos \leq \geq por el signo $=$; este cambio genera líneas rectas.
- b) Tabular cada restricción de acuerdo con las técnicas de las matemáticas, para hallar los puntos de corte en el plano cartesiano $P(x_1, x_2)$.
- c) Representar los puntos hallados en el plano $P(x_1, x_2)$, en el primer cuadrante, donde se generan las áreas positivas de soluciones factibles de acuerdo con la condición de no negatividad.
- d) Graficar las restricciones convertidas en ecuaciones de línea recta en el plano $P(x_1, x_2)$ utilizando flechas en cada restricción para ver el sentido de estas y determinar la región que debe considerarse como parte del espacio de solución. Se debe cumplir que cada punto dentro sobre el espacio de soluciones satisfaga todas las restricciones del problema.

GeoGebra en tiempos de pandemia

Durante la pandemia de COVID-19, GeoGebra se convirtió en una herramienta esencial para la enseñanza a distancia. Profesores de todo el mundo compartieron GeoGebra manteniendo a los estudiantes comprometidos con las matemáticas a través de clases virtuales.

- e) Determinar el área de soluciones factibles, o polígono de solución factible. Que debe ser igual al área común resultante de representar las restricciones en el plano $P(x_1, x_2)$
- f) Escoger como solución óptima el punto que pertenece al espacio de soluciones o solución factible, y que hace máximo o mínimo el valor de la función objetivo, según si se trata de un problema de maximización o de minimización.
- g) El valor que optimiza la función objetivo siempre se encuentra en uno de los puntos extremos. En resumen, una vez que se han determinado los puntos extremos, el óptimo es el punto extremo que proporciona el mejor valor a la función objetivo.
- h) Escoger como solución óptima el vértice del espacio de soluciones factibles que maximice o minimice la función objetivo.
- i) "Determinar los valores de las variables". (Eppen et al., 1992).

Todo esto se observará en los siguientes ejercicios prototípicos:

3.4.1.-CAMIONETAS CABINA SENCILLA Y DOBLE

Una compañía ensambladora de camionetas produce dos modelos, uno de cabina sencilla y el otro de doble cabina.

Hay dos líneas de producción, una para cada modelo, e intervienen dos departamentos en la producción de cada modelo. La capacidad de la línea de producción de cabina sencilla es de 70 camionetas por día. La capacidad de la línea de doble cabina es de 50 camionetas doble cabina diarios. En el departamento A se arman los chasis. En este departamento, se requiere una hora de trabajo para cada modelo Cabina sencilla y dos horas de trabajo para cada Doble cabina. En la actualidad, puede asignarse un máximo de 120 horas de trabajo diarias para la producción de ambos tipos de camionetas en el departamento A. En el departamento B se construye la carrocería. Aquí se requiere una hora de trabajo para cada Cabina sencilla y también una hora para cada modelo Doble cabina. Actualmente se pueden asignar 90 horas de trabajo al departamento B para la producción de ambos modelos. La contribución a las ganancias es de 10000 y

20000 dólares, respectivamente por cada modelo Cabina doble y Cabina sencilla. Esta información se presenta resumida en la tabla 1. Si la compañía sabe que podrá vender todos los Camionetas dobles y sencillas que sean capaz de fabricar, ¿cuál deberá ser el plan de producción por día (es decir, la producción diaria) para cada modelo?

Intente formular la situación descrita de Cabina doble y Cabina sencilla como un modelo de programación lineal. Escriba el modelo simbólico de PL, luego desarrolle el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo después con SOLVER.

SOLUCIÓN GRÁFICA

TABLA 8. Información Cabina sencilla y doble.

	Capacidad diaria	Depto A	Depto B	Ganancia por Modelo
Cabina sencilla	70	1	1	20000
Cabina doble	50	2	1	10000
Disponibilidad total		120	90	

Fuente: Elaboración propia

MODELO MATEMATICO

DATOS

VARIABLES DE DECISIÓN

C_1 =Cabina sencilla

C_2 =Cabina doble

$a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ = VARIABLES TÉCNICAS

b_1, b_2, b_3, b_4 = RECURSOS

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2 = \text{Utilidad}$$

Sujeto A:

$C_1 + 2 C_2 \leq 120$ Restricción de trabajo departamento A

$C_1 + C_2 \leq 90$ Restricción de trabajo departamento B

Modelo Matemático

Ecuaciones en forma canónica

$C_1 \leq 70$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina sencilla

$C_2 \leq 50$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina doble

$C_1 \geq 0; C_2 \geq 0$ Restricciones de no negatividad

Tabla 9. Estructura básica restricciones-Formula canónica

RESTRICCION	C_1	C_2		RECURSOS
1	$a_{11} C_1$	$a_{12} C_2$	\leq	b_1
2	$a_{21} C_1$	$a_{22} C_2$	\leq	b_2
3	$a_{31} C_1$	$a_{32} C_2$	\leq	b_3
4	$a_{41} C_1$	$a_{42} C_2$	\leq	b_4

Fuente: elaboración propia

Tabla 10. Estructura con valores

RESTRICCION	C_1	C_2		RECURSOS
1	1	2	\leq	120
2	1	3	\leq	90
3	10	15	\leq	70
4	20	10	\leq	50

Fuente: Elaboración propia

Primer Paso:

Transformar las restricciones en igualdades como sigue:

MODELO ESTRUCTURA ESTANDAR

Agregamos variables de holgura s_j para convertir las inecuaciones en ecuaciones.

FUNCIÓN OBJETIVO

$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2$

Sujeto a:

$C_1 + 2 C_2 + S_1 = 120$ (Departamento A)

$C_1 + C_2 + S_2 = 90$ (Departamento B)

$C_1 + S_3 = 70$ (Capacidad Cabina Sencilla)

Modelo Matemático
Ecuaciones en forma estandarizada

$C_2 + S_4 = 50$ (Capacidad Doble Cabina)

Variables = $C_1, C_2, S_1, S_2, S_3, S_4$

Tabla 11. Estructura Estándar

RESTRICCIÓN	C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		RECURSOS
1	C_1	$2C_2$	1				=	120
2	C_1	C_2		1			=	90
3	C_1				1		=	70
4		C_2				1	=	50

Fuente: elaboración propia

Segundo Paso:

Graficamos las restricciones con GEOGEBRA (figuras 1,2,3,4)

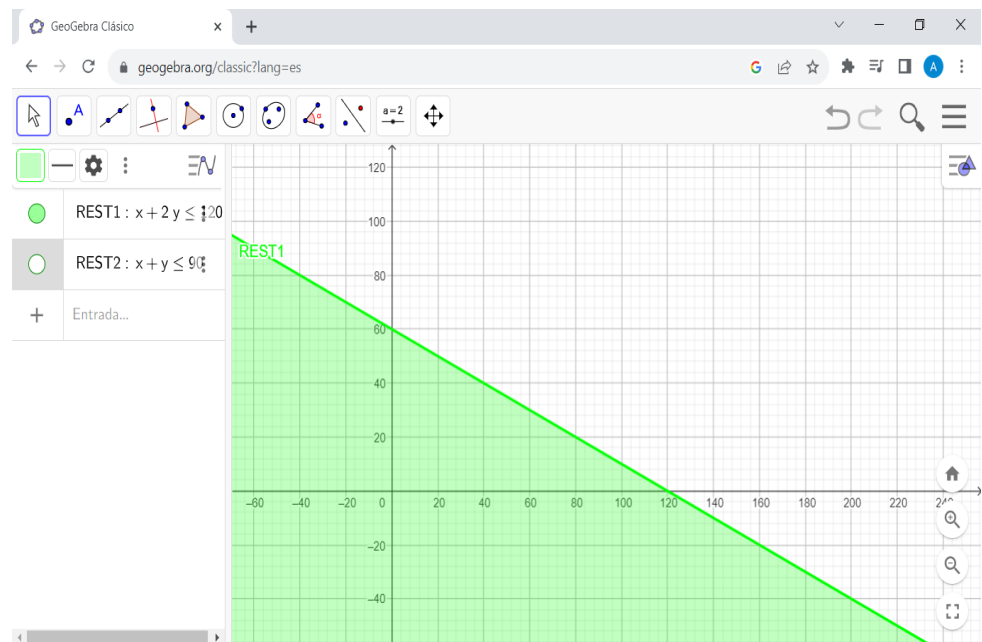
Gráfico 1.

$C_1 + 2C_2 \leq 120$ Restricción de trabajo, Departamento A

Inecuación:

Una **inecuación** es una expresión matemática que establece una relación de desigualdad entre dos expresiones algebraicas. En lugar de usar el signo de igualdad $=$, se utilizan los signos de desigualdad:

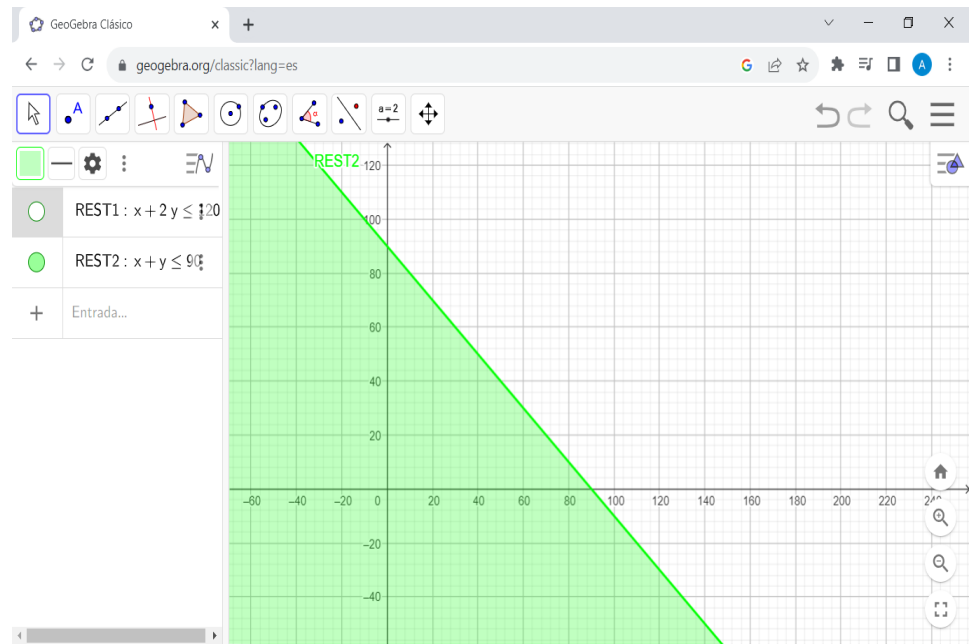
- $<<$ (menor que)
- $>>$ (mayor que)
- \leq (menor o igual que)
- \geq (mayor o igual que)



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 2.

$C1 + C2 \leq 90$ Restricción de trabajo, Departamento B

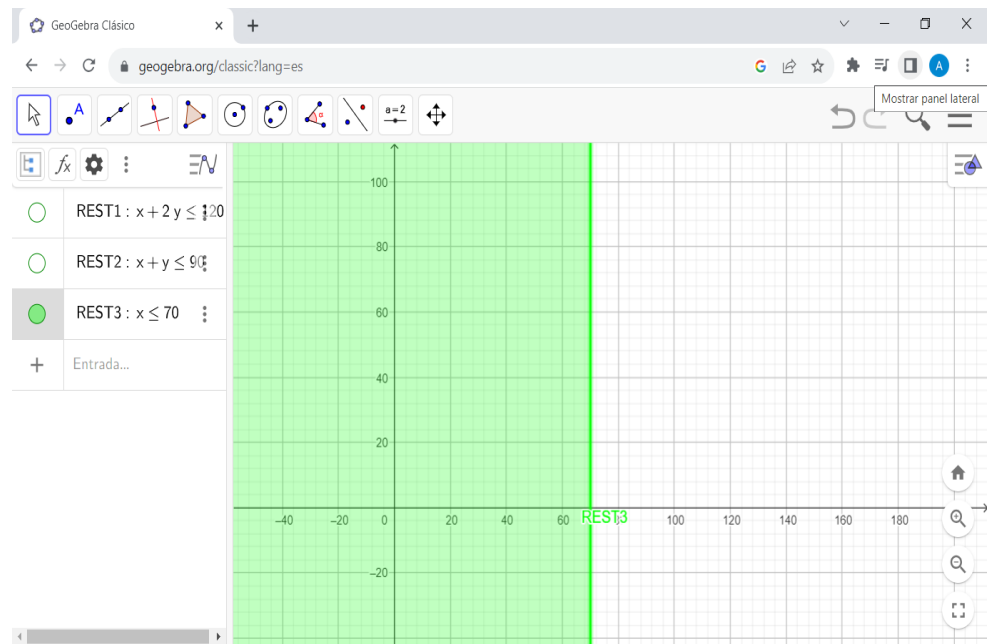


Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 3.

$C1 \leq 70$ Restricción de Capacidad de la línea de producción

Cabina Sencilla



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

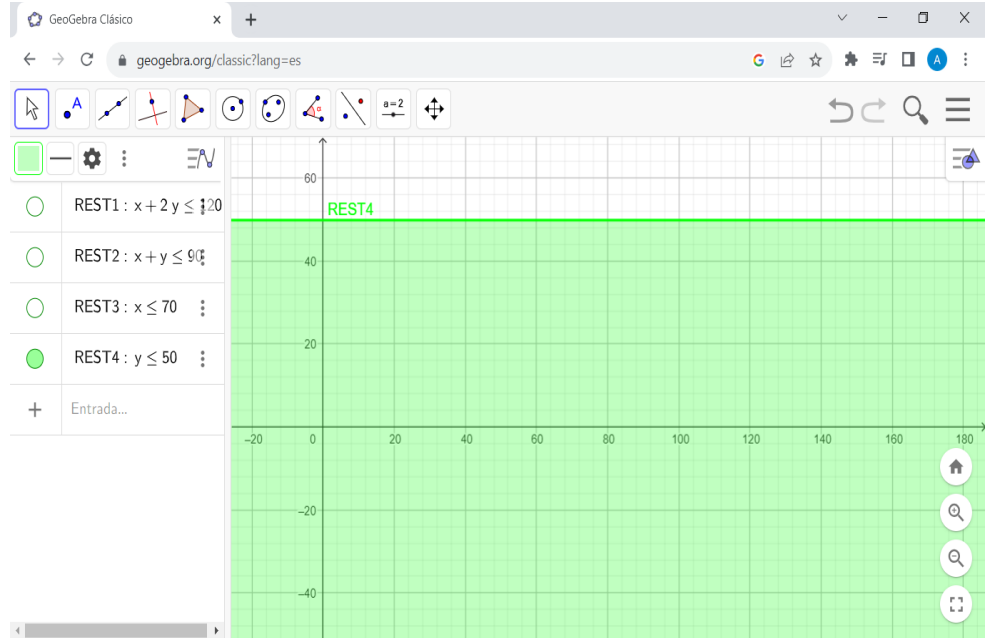
Gráfico 4.

$C2 \leq 50$ Restricción de Capacidad de producción de la línea

Doble Cabina

Región factible.

Conjunto de combinaciones de valores de las variables de decisión que satisfacen las condiciones de no negatividad y todas las restricciones simultáneamente; es decir, las decisiones permisibles.



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Tercer Paso:

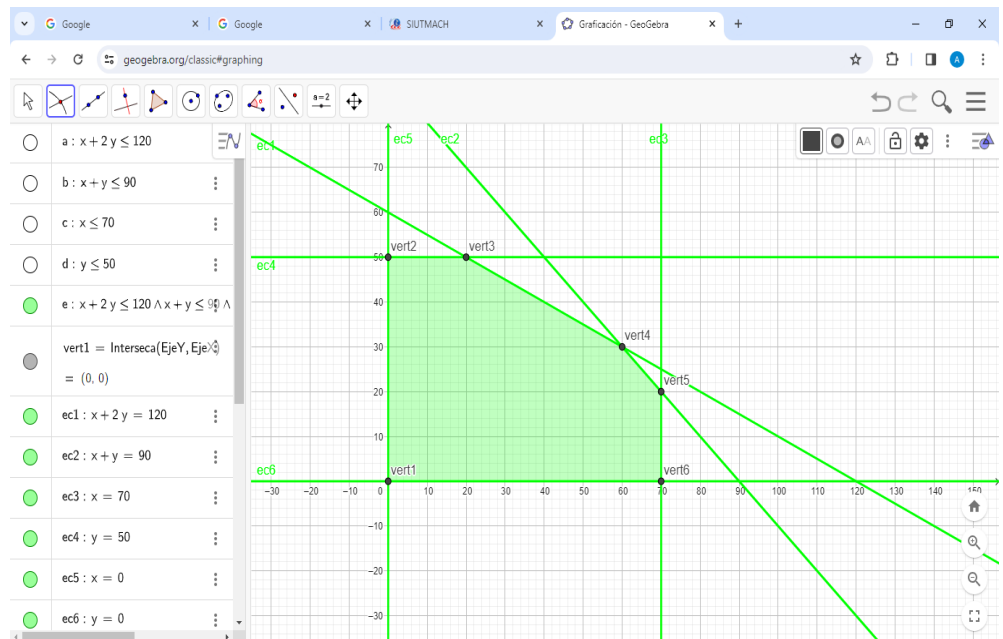
Representamos en el plano $P(C1,C2)$, **región factible** (grafico 5)

Vértice:

Punto extremo de la región factible donde se evalúan las posibles soluciones en el método gráfico o simplex.

Gráfico 5.

Región Factible



Solución factible.

La que satisface las condiciones de no negatividad y todas las restricciones. Gráficamente, las soluciones factibles están en correspondencia, uno a uno, con los puntos de la región factible.



Para desplazar una ecuación lineal en GeoGebra, sigue estos pasos:

1. Haz clic derecho sobre la recta que deseas mover.
2. En el menú que aparece, busca la opción para activar las propiedades de la recta.
3. Asegúrate de desactivar la propiedad de "objeto fijo" si está activada.
4. Una vez desactivada esta opción, podrás arrastrar la recta directamente sobre el eje de coordenadas con el cursor.

Esto te permitirá ajustar su posición de manera sencilla.

Fuente: *gráfico obtenido usando GEOGEBRA*

Cuarto Paso:

Hallar los **vértices** desconocidos (gráficos 6,7,8,9,10,11).

UTILIDAD VERTICE1

$$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$$

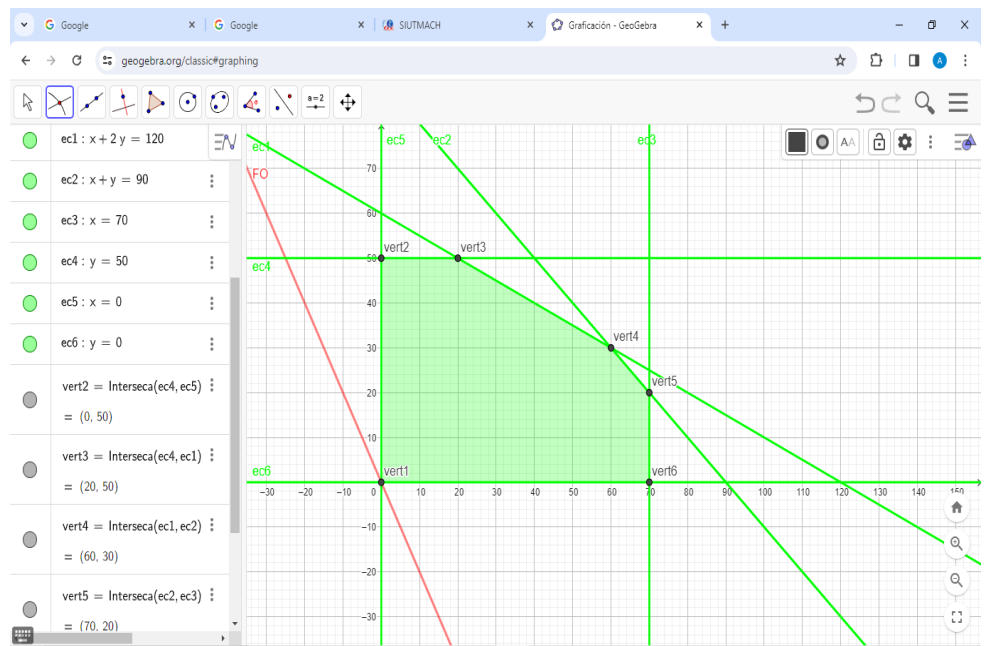
Tabla 12. Utilidad vértice 1

C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
0	0	0	0	0	0	0

Fuente: elaboración propia

Gráfico 6.

Utilidad vértice 1



Fuente: *gráfico obtenido usando GEOGEBRA*

UTILIDAD VERTICE2

$$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$$

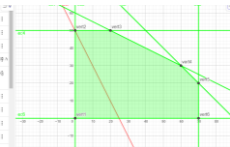
Tabla 13. Utilidad vertice2

C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
0	50	0	0	0	0	500000

Fuente: elaboración propia

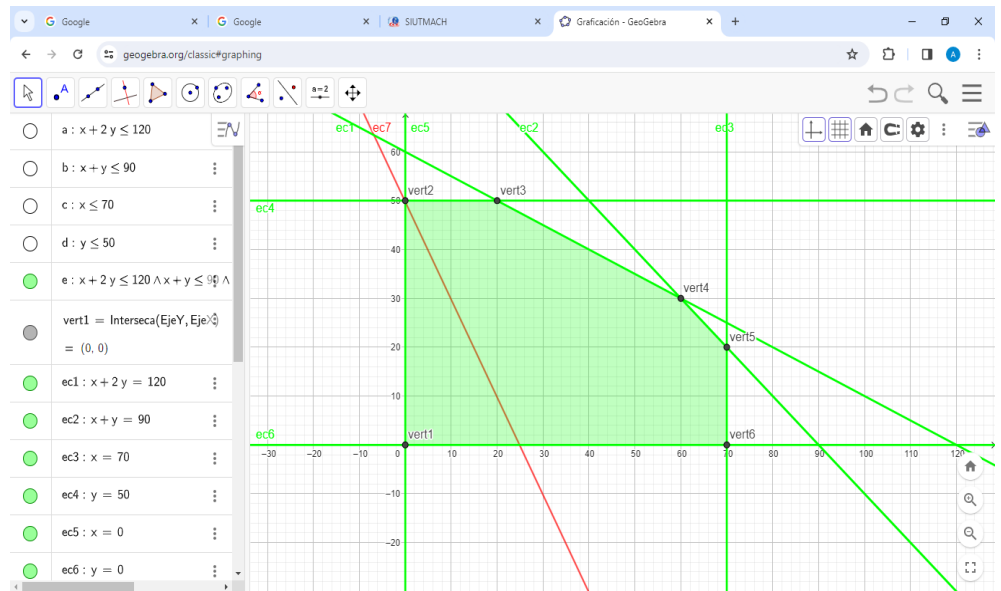
Gráfico 7.

Utilidad vértice 2



Para obtener la región factible en GeoGebra:

ingresa todas las ecuaciones lineales separadas por el operador lógico "y" en la barra de entrada. Luego, presiona Enter y automáticamente se mostrará la región factible en el área gráfica. Asegúrate de que las desigualdades estén correctamente definidas para que el programa pueda interpretar y graficar adecuadamente la solución.



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 3

$$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$$

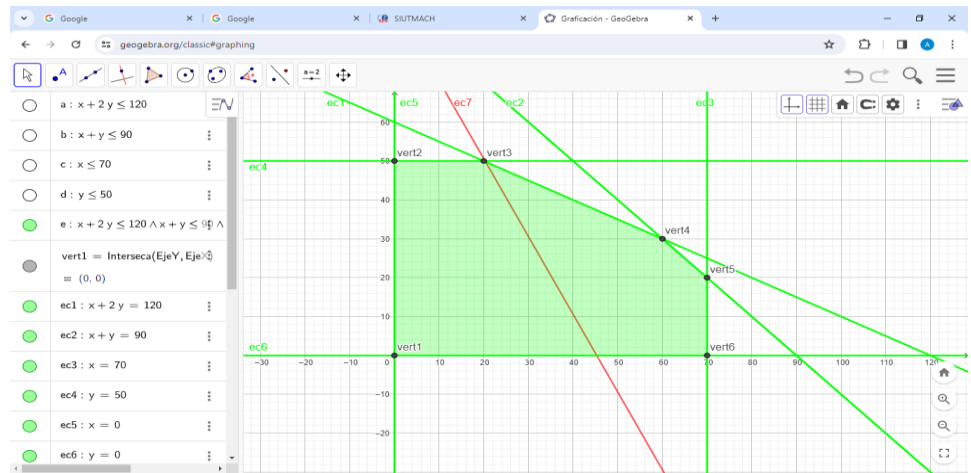
Tabla 14. Utilidad vértice 3

C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
20	50	0	0	0	0	900000

Fuente: elaboración propia

Gráfico 8.

Utilidad vértice 3



Nota: grafico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 4

$$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$$

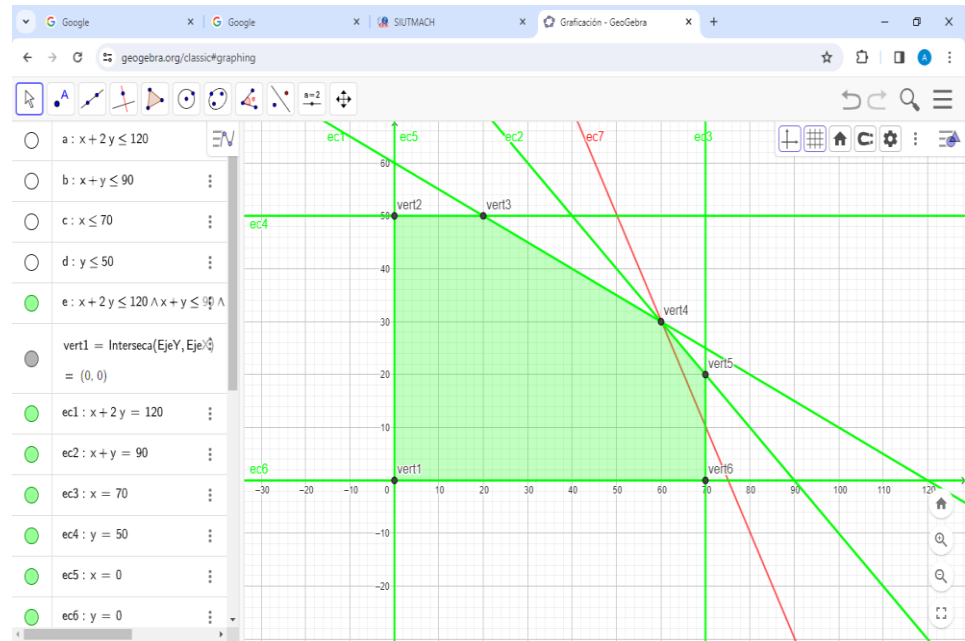
Tabla 15. Utilidad vértice 4

C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
60	30	0	0	0	0	1500000

Fuente: elaboración propia

Gráfico 9.

Utilidad vértice 4



Nota: grafico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 5

$$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$$

Tabla 16. Utilidad vértice 5

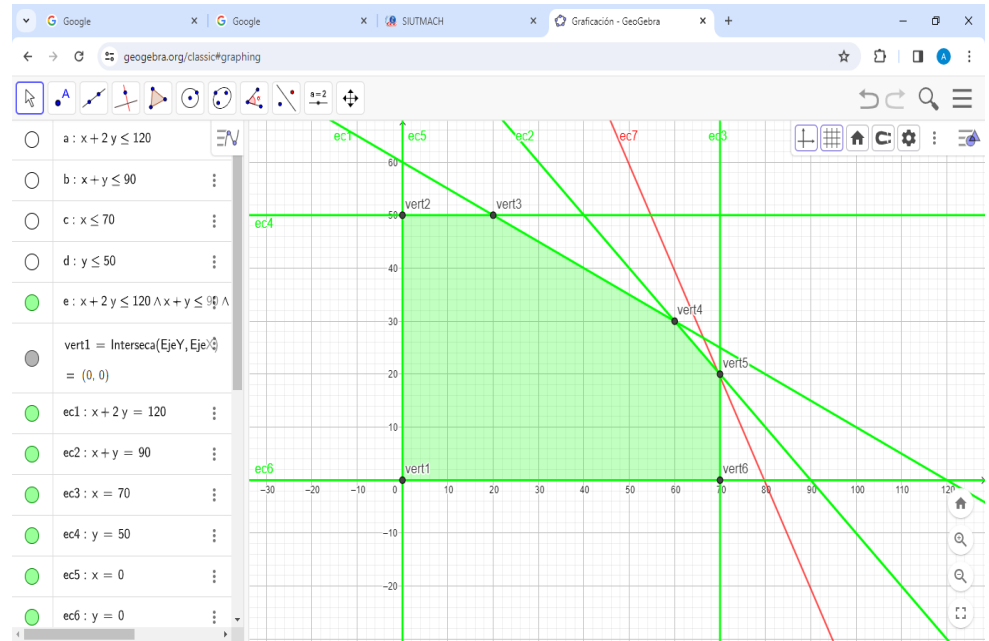
C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
70	20	0	0	0	0	1600000

Fuente: elaboración propia

Gráfico 10.

Utilidad vértice 5

Solución óptima.
Punto de la región factible donde la función objetivo se maximiza.



Fuente: grafico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 6

$$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$$

Tabla 17.

Utilidad vértice 6

C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
70	0	0	0	0	0	1400000

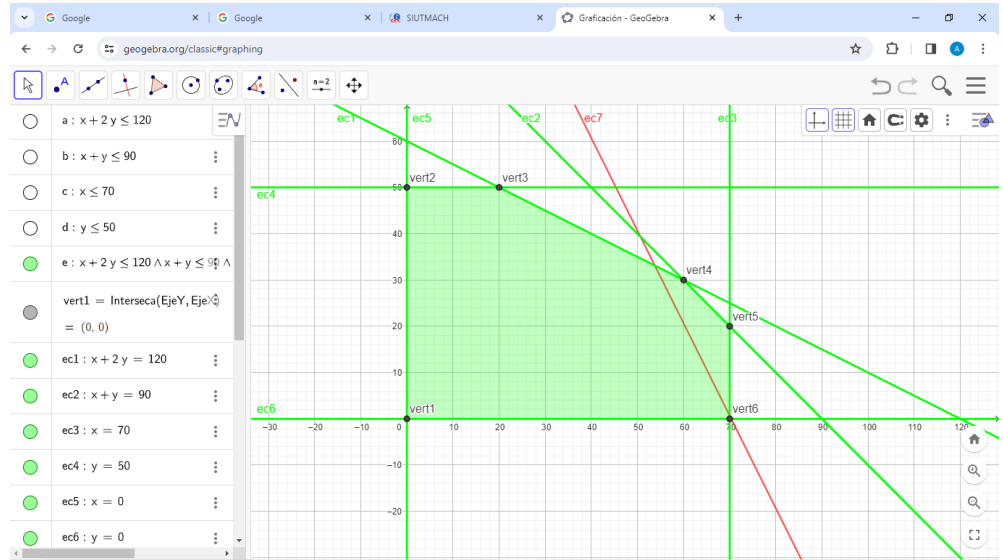
Fuente: elaboración propia

Gráfico 11.

Utilidad vértice 6

Solución óptima.

Punto de la región factible donde la función objetivo se maximiza.



Fuente: *grafico obtenido usando GEOGEBRA*

Quinto Paso:

Buscamos el vértice óptimo del área de soluciones factible, para ello reemplazamos los valores de cada vértice en la función objetivo (gráficos 6,7,8,9,10,11):

Para Eppen,Gould y Schmidt, “al desplazar la función objetivo **Zmax** por todos los vértices de intersección de las restricciones que conforman la región factible vemos que el máximo valor lo obtiene en el vértice 5” (1993); tal y como lo indica la siguiente tabla.

Este desplazamiento se lo realiza en GeoGebra, al quitar la propiedad de FIJO de la recta con el botón derecho del ratón o de la pantalla en el móvil.

Tabla 18. Utilidad vértices

VERTICE	C1	C2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Z (Max)=UTILIDAD
Vértice1	0	0	0	0	0	0	0
Vértice2	0	50	0	0	0	0	500000

Vertice3	20	50	0	0	0	0	900000
Vertice4	60	30	0	0	0	0	1500000
Vertice5	70	20	0	0	0	0	1600000
Vertice6	70	0	0	0	0	0	1400000

Fuente: elaboración propia

Por lo que el plan de producción por día (es decir, la producción diaria) para cada modelo quedaría:

70 unidades diarias de Cabina Sencilla, y 20 de Doble Cabina. Con lo que se conseguiría la máxima utilidad de \$1600000,00 diarios.

3.4.2.-EJERCICIO 2.

INDUSTRIAS JARAMILLO

INDUSTRIAS JARAMILLO(IJ), produce dos líneas de molinos para minería. Una de sus líneas de productos, llamada Molinos Chilenos, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de trituración líquida. La otra línea, denominada molinos de bolas, está destinada a la trituración de material en seco. Las M1 y M2 son hechas en los mismos galpones y con las mismas herramientas. Las predicciones económicas indican que se podrían vender normalmente todas las M1 y M2 que se fabriquen. Se desea pronosticar cuantas M1 y M2 se deben fabricar para obtener máximas ganancias. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo.

Los datos de IJ

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de IJ es de \$5000 por cada **M1** vendido y de \$4000 por cada **M2**.
2. En cada galpón pasan por mecanizado cualquier M1 o M2.
3. El galpón A dispondrá el próximo mes de 150 horas y el galpón B de 160 horas. En el galpón A, cada M1 necesita 10 horas de mecanizado y cada M2, 15 horas. En el galpón B, cada M1 necesitara de 20 horas de mecanizado, y cada M2 ,10 horas. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 12.

4. Las pruebas de los M1 y M2, serán realizadas en un galpón independiente, manejado por el sindicato de trabajadores, quien exige no menos de 135 horas, para sus trabajadores, los cuales gastan 30 horas en cada M1 y 10 horas por cada M2. Esta información se resume en la tabla 13.

5. El directorio como una medida de posicionamiento en el mercado deberá fabricar por lo menos una **M1** por cada tres **M2**.

6. Un distribuidor importante ha pedido para el siguiente mes 5 equipos sin importar cuantos son M1 y cuantos son M2.

Se desea determinar la producción de M1 y M2 que maximizaría las ganancias

Tabla 19. Datos de maquinado de IJ

GALPON	HORAS		
	POR M1	POR M2	TOTAL, DISPONIBLE
A	10	15	150
B	20	10	160

Fuente: elaboración propia

Tabla 20. Datos de prueba de IJ

	1 M1	1 M2	Horas totales requeridas
Horas de prueba	30	10	135

Fuente: elaboración propia

SOLUCIÓN GRÁFICA

MODELO MATEMÁTICO

DATOS

VARIABLES DE DECISIÓN

M1=Molino Chileno

M2=Molino de Bolas

a_{12} a_{22} a_{21} a_{22} a_{51} a_{52} **VARIABLES TÉCNICAS**

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 **RECURSOS**

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$Z(\text{Max}) = 5000M1 + 4000M2 = \text{UTILIDAD}$

Sujeto A:

$M1 + M2 \geq 5$ **Restricción de producción mínima**

$M1 - 3M2 \leq 0$ **Restricción de balance de posición en el mercado**

$10M1 + 15M2 \leq 150$ **Restricción de Capacidad del Galpón A**

$20M1 + 10M2 \leq 160$ **Restricción de Capacidad del galpón B**

$30M1 + 10M2 \geq 135$ **Restricción mínima cantidad de horas para pruebas**

$M1 \geq 0 ; M2 \geq 0$ **Restricciones de no negatividad**

a_{12} a_{22} a_{21} a_{22} a_{51} a_{52} **VARIABLES TÉCNICAS**

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 **RECURSOS**

Tabla 21. Estructura Canónica

RESTRICCION	M1	M2		RECURSOS
1	$a_{11}M1$	$a_{12}M2$	\geq	b_1
2	$a_{21}M1$	$a_{22}M2$	\leq	b_2
3	$a_{31}M1$	$a_{32}M2$	\leq	b_3
4	$a_{41}M1$	$a_{42}M2$	\leq	b_4
5	$a_{51}M1$	$a_{52}M2$	\geq	b_5

Fuente: elaboración propia

Table 22. Estructura con valores

RESTRICCION	M1	M2		RECURSOS
-------------	----	----	--	----------

1	1	1	\geq	5
2	1	-3	\leq	0
3	10	15	\leq	150
4	20	10	\leq	160
5	30	10	\geq	135

Fuente: elaboración propia

Primer Paso:

Transformar las restricciones en igualdades como sigue:

$$M1 + M2 - S_1 = 5$$

$$M1 - 3M2 + S_2 = 0$$

$$10M1 + 15M2 + S_3 = 150$$

$$20M1 + 10M2 + S_4 = 160$$

$$30M1 + 10M2 - S_5 = 135$$

Modelo Matemático

Ecuaciones en forma estandarizada

Tabla 23. Estructura Estándar

RESTRICCION	M1	M2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅		RECURSOS
1	1	1	-					=	5
2	1	-3	1					=	0
3	10	15			1			=	150
4	20	10				1		=	160
5	30	10					-	=	135
							1		

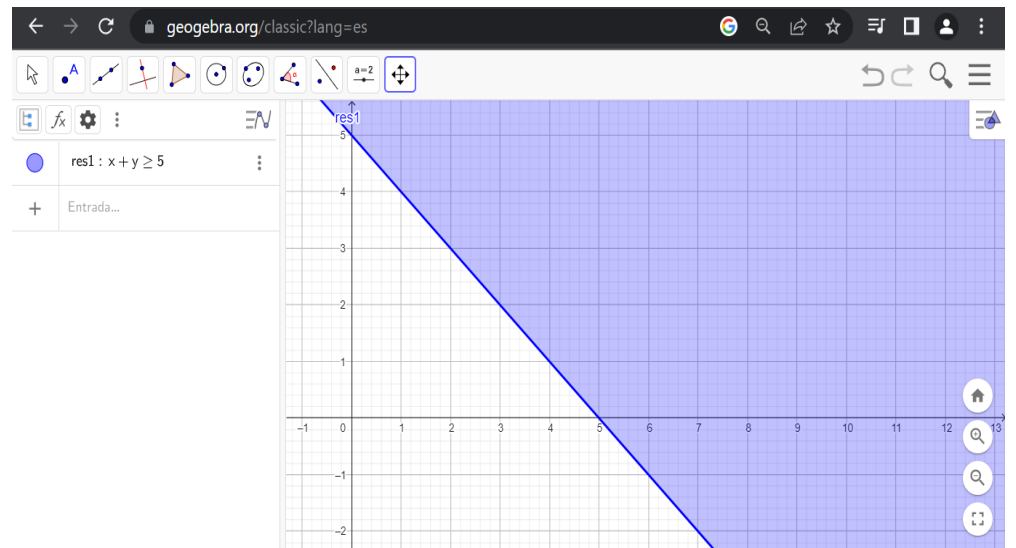
Fuente: elaboración propia

Segundo Paso:

Graficamos las restricciones con GEOGEBRA (figuras 12,13,14,15,16)

Gráfico 12.

$M1 + M2 \geq 5$ Restricción de producción mínima

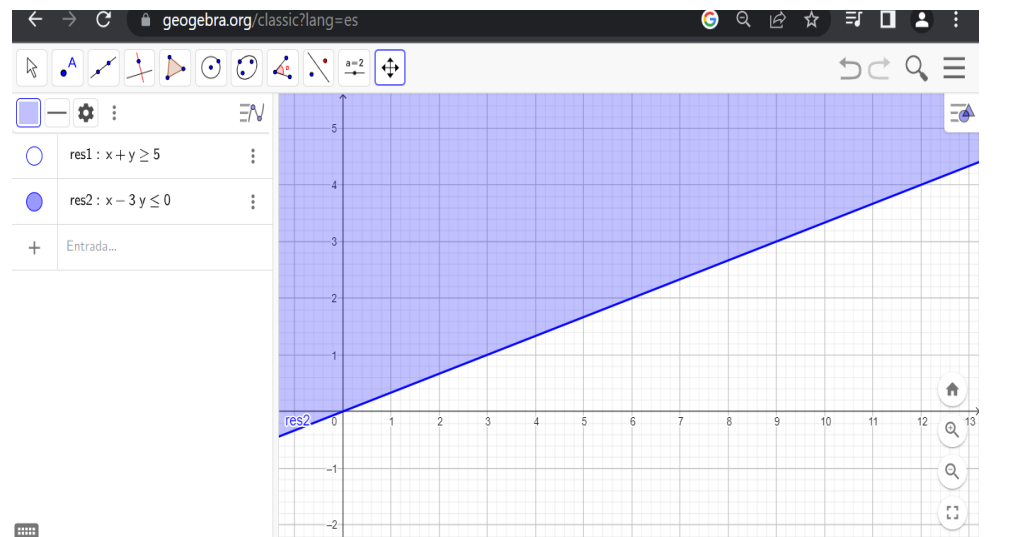


Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 13.

$M1 - 3M2 \leq 0$ Restricción de balance de posición en el mercado

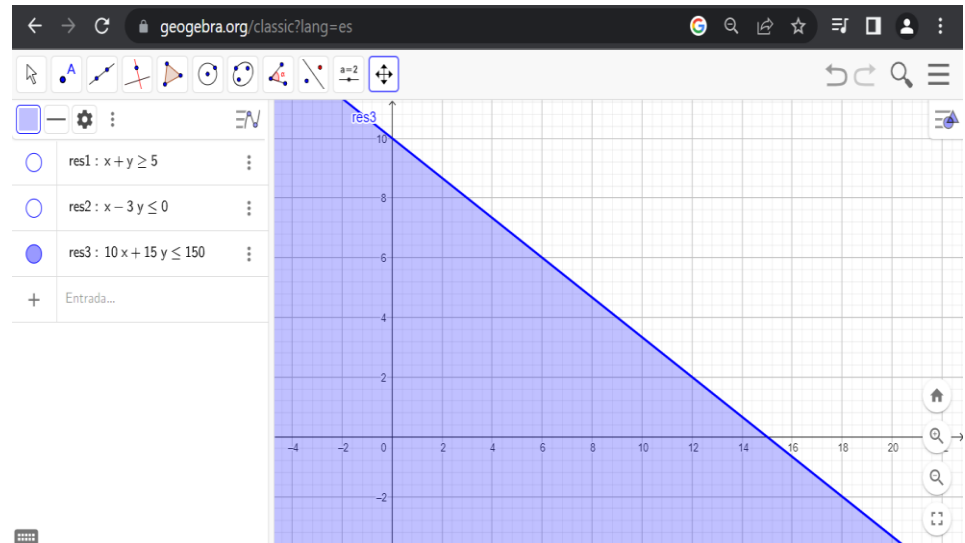
Solución óptima.
Punto de la región factible donde la función objetivo se maximiza.



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 14.

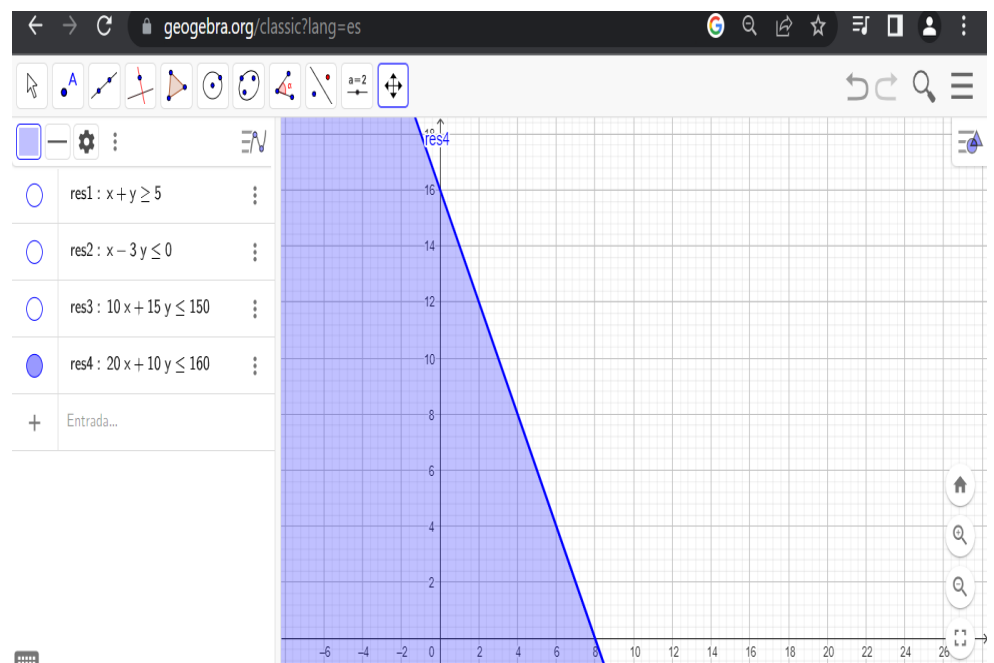
$10M1 + 15M2 \leq 150$ Restricción de Capacidad del galpón A



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 15.

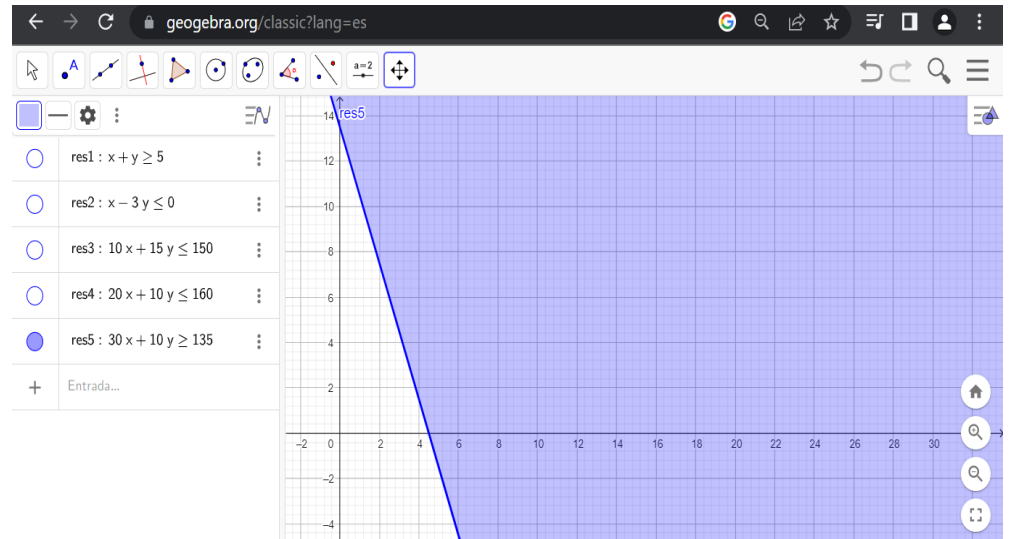
$20M1 + 10M2 \leq 160$ Restricción de Capacidad del galpón B



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 16.

$30M1 + 10M2 \geq 135$ Restricción mínima cantidad de horas para pruebas



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Tercer Paso:

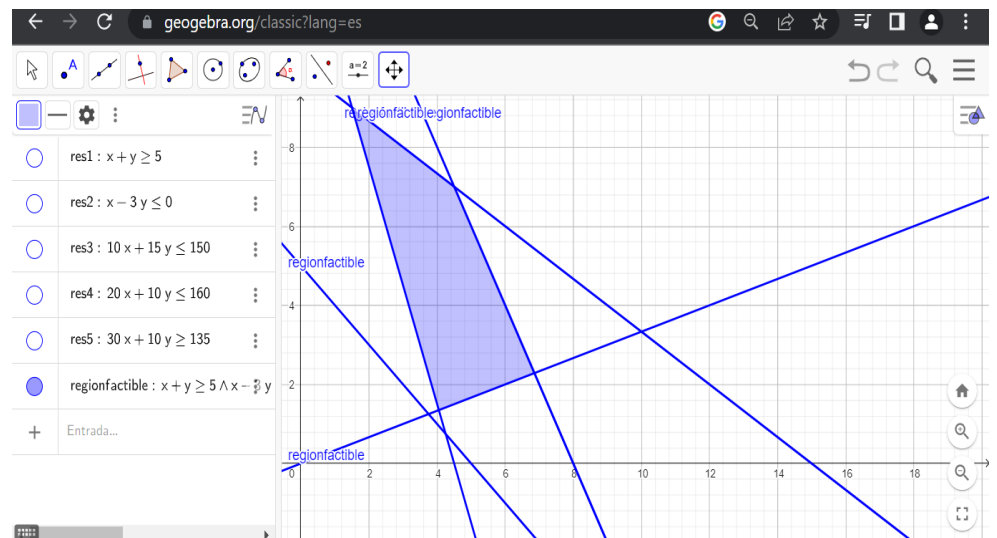
Representamos en el plano

$P(M_1, M_2)$, región factible (grafico 17)

Gráfico 17.

Región Factible

Polígono de solución factible:
 Área delimitada por las restricciones en el plano cartesiano, donde se encuentran las soluciones posibles.



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Cuarto Paso:

Hallar los vértices desconocidos (gráficos 18,19,20,21).

UTILIDAD VÉRTICE 1

$$Z(\text{Max}) = 5000M_1 + 4000M_2 = \text{UTILIDAD}$$

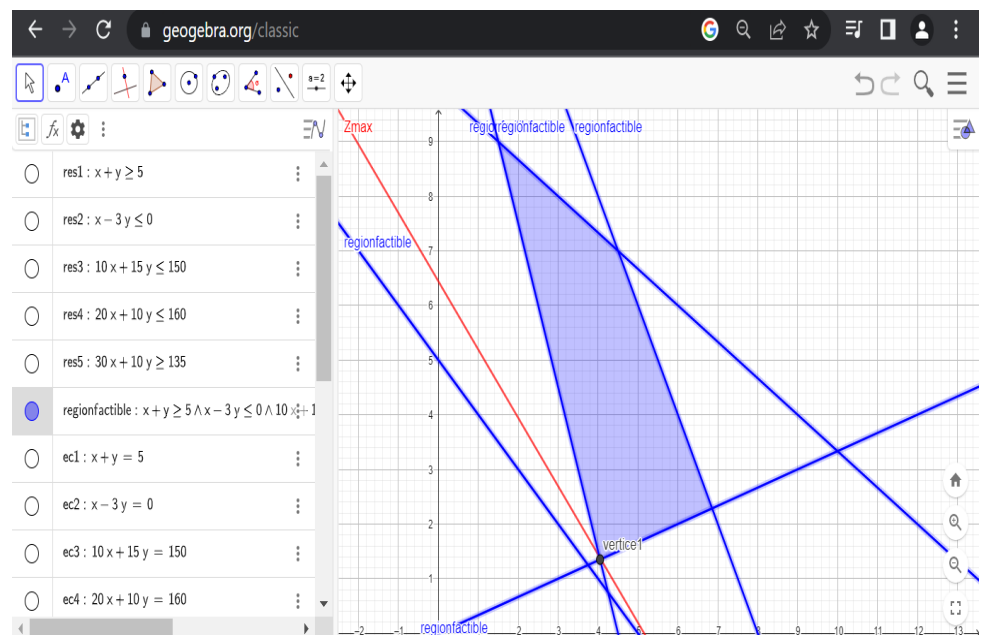
Tabla 24. Utilidad vértice 1

M_1	M_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Z (Max)=UTILIDAD
4.00	1.35	0	0	0	0	0	25400

Fuente: elaboración propia

Gráfico 18.

Utilidad vértice 1



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 2

$$Z(\text{Max}) = 5000M_1 + 4000M_2 = \text{UTILIDAD}$$

Tabla 25. Utilidad vértice 2

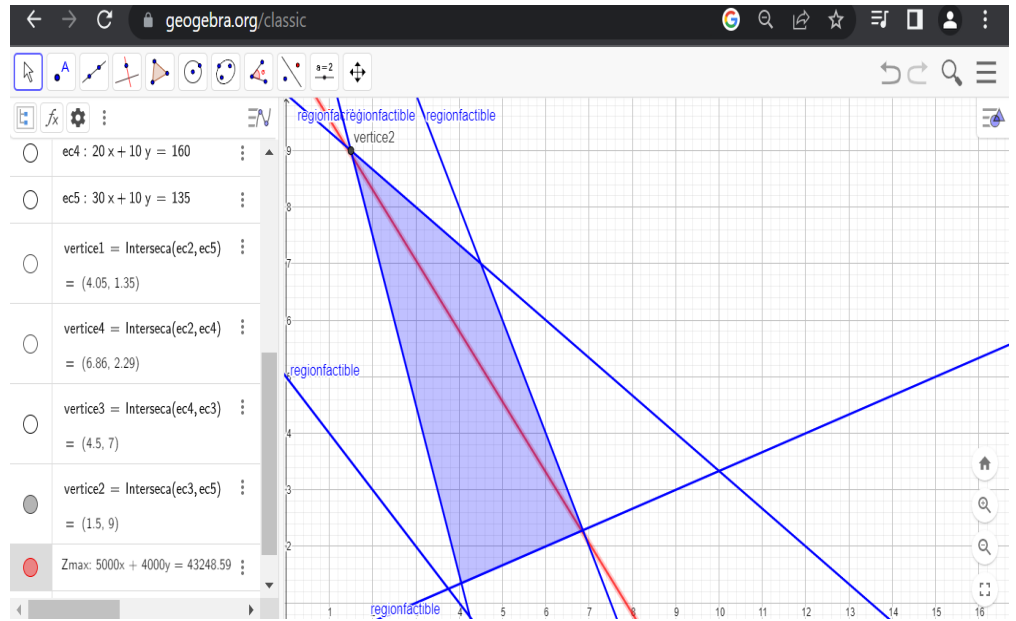
M_1	M_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Z (Max)=UTILIDAD

1.5	9.0	0	0	0	0	0	43500
-----	-----	---	---	---	---	---	-------

Fuente: elaboración propia

Gráfico 19. Utilidad vértice 2

Plano cartesiano:
Sistema de coordenadas bidimensional utilizado para representar gráficamente funciones y restricciones.



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 3

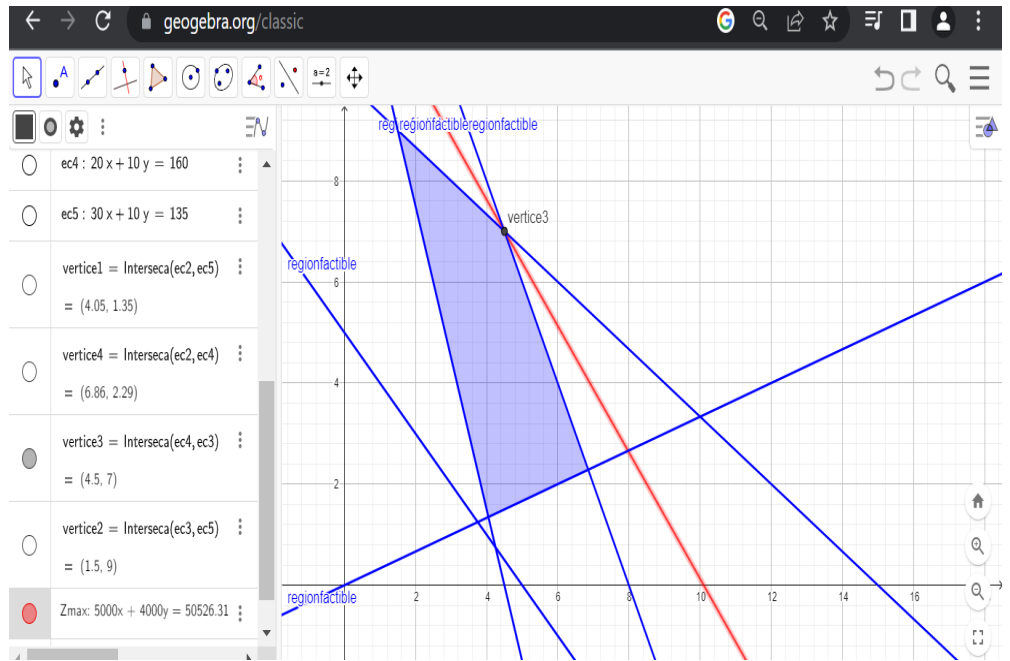
Z(Max) = 5000M₁ + 4000M₂ = UTILIDAD

Tabla 26. Utilidad vértice 3

M ₁	M ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Z (Max)=UTILIDAD
4.5	7.0	0	0	0	0	0	50500

Fuente: elaboración propia

Gráfico 20. Utilidad vértice 3



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

UTILIDAD VÉRTICE 4

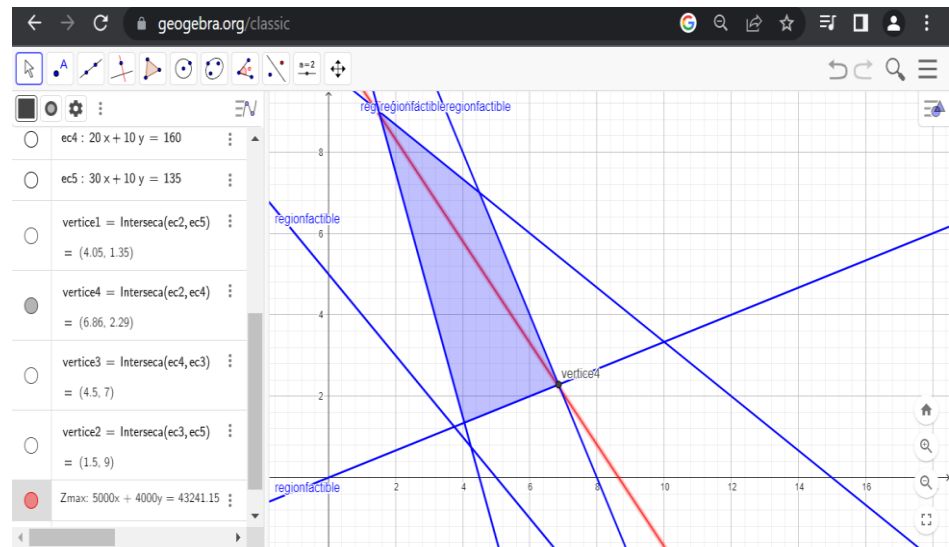
Z(Max) = 5000M₁ + 4000M₂ = UTILIDAD

Tabla 27. Utilidad vértice 4

M ₁	M ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Z (Max)=UTILIDAD
6.26	2.89	0	0	0	0	0	42860

Fuente: elaboración propia

Gráfico 21. Utilidad vértice 4



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Quinto Paso:

Buscamos el vértice óptimo del área de soluciones factible, para ello reemplazamos los valores de cada vértice en la función objetivo (gráficos 18,19,20,21):

Al desplazar la función objetivo **Zmax** por todos los vértices de intersección de las restricciones que conforman la región factible, vemos que el máximo valor lo obtiene en el vertice3, tal y como lo indica la siguiente tabla.

Tabla 28. Utilidad vértices

VERTICE	M1	M2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Z (Max)=UTILIDAD
Vertice1	4.00	1.35	0	0	0	0	0	25400
Vertice2	1.5	9.0	0	0	0	0	0	43500
Vertice3	4.5	7.0	0	0	0	0	0	50500
Vertice4	6.26	2.89	0	0	0	0	0	42860

Fuente: elaboración propia

Por lo que el plan de producción para el siguiente mes para cada modelo de molino quedaría:

4.5 unidades mensuales de molinos chilenos **M1**, y de 7 molinos de bolas **M2**. Con lo que se conseguiría la máxima utilidad de \$50500,00 al mes.

3.5.-CONCLUSIONES

Se indico el papel clave de la geometría plana para esclarecer conceptos esenciales, difíciles de percibir. Específicamente, utilizamos el razonamiento geométrico para dar solución a modelos matemáticos de programación lineal con dos variables de decisión, y aclarar la condicionalidad entre soluciones optimas y los vértices de la región factible.

3.6.-CUESTIONARIO Y EJERCICIOS PROPUESTOS

3.6.1.-VERDADERO-FALSO

1. Si de todas las restricciones cumple por lo menos una, se le llama región factible. **(V) (F)**
2. El cruce de dos restricciones en modelos de dos dimensiones determina un vértice extremo de la región factible. **(V) (F)**
3. Es el método gráfico la forma más sencilla de solucionar un problema de Programación Lineal. **(V) (F)**
4. En el método gráfico como cada coordenada representa una variable, lo máximo que podremos representar son 3 variables. **(V) (F)**
5. La función objetivo alcanza su solución en el vértice óptimo. **(V) (F)**
6. Se puede dar el caso de que en el método gráfico las coordenadas de los cruces de las restricciones no arrojen valores enteros o se tengan dudas. **(V) (F)**
7. La solución óptima es condición básica para toda PL. **(V) (F)**
8. En un punto extremo inevitablemente se da una solución óptima. **(V) (F)**
9. Todos los recursos son usados por la solución óptima. **(V) (F)**
10. Como mínimo tendremos una solución en un vértice, si hay una solución óptima. **(V) (F)**

3.6.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

- a) ¿Para una solución óptima de una PL, ¿cuál de las siguientes declaraciones es verdadera?
- La solución óptima es condición básica para toda PL.
 - En un punto extremo inevitablemente se da una solución óptima.
 - Todos los recursos son usados por la solución.
 - Como mínimo tendremos una solución en un vértice, si hay una solución óptima.
- b) ¿En una región factible, cada punto de cruce se identifica como?
- La intersección de dos restricciones.
 - Un determinado cuerpo de restricciones lineales y posiciones de no negatividad.
 - Ninguna de las anteriores.
- c) El acercamiento gráfico en dos planos permite que:
- Un modelo se resuelva rápidamente.
 - Se pueda predecir lo que sucederá en más dimensiones.
 - Entendamos mejor el álgebra multidimensional.
- (a) (b) (c)**

3.6.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

Use el método gráfico para hallar la región factible y la solución óptima en los siguientes ejercicios.

Use el método gráfico para hallar la región factible y la solución óptima en los siguientes ejercicios.

Considere la siguiente PL:

$$\text{Max } 3A + 4B$$

s.a.

$$-2A + 4B \leq 16$$

$$2A + 4B \leq 24$$

$$-6A - 3B \geq -48$$

$$A, B \geq 0$$

Considere la siguiente PL:

$$\text{Max } 2A + 3B$$

s.a.

$$3A + B \geq 6$$

$$A + 7B \geq 7$$

$$A + B \leq 4$$

$$A, B \geq 0$$

Considere la siguiente PL:

$$\text{Max } 3A + B$$

s.a.

$$6A + 3B \geq 12$$

$$4A + 8B \geq 16$$

$$6A + 5B \leq 30$$

$$6A + 7B \leq 36$$

$$A, B \geq 0$$

3.7.-GLOSARIO

Excedente Cantidad por la cual el lado izquierdo de una restricción \geq , cuando es evaluada en condiciones de optimalidad, excede al lado derecho. El excedente siempre es no negativo.

Función objetivo Expresión matemática que se busca optimizar (maximizar o minimizar) en un problema de programación lineal.

GeoGebra Software gratuito que combina geometría, álgebra y cálculo para resolver problemas matemáticos de manera visual e interactiva.

Holgura Cantidad por la cual el valor del lado izquierdo de una restricción \leq , cuando es evaluado en el punto óptimo, es

menor que el valor del lado derecho. La holgura siempre es no negativa.

Maximización / Minimización Proceso de encontrar el valor máximo o mínimo de la función objetivo dentro de la región factible.

Método de resolución gráfica Análisis geométrico bidimensional de modelos PL con dos variables de decisión.

Modelo simbólico de PL Representación matemática formal del problema de programación lineal con variables, restricciones y función objetivo.

Plano cartesiano Sistema de coordenadas bidimensional utilizado para representar gráficamente funciones y restricciones.

Polígono de solución factible Área delimitada por las restricciones en el plano cartesiano, donde se encuentran las soluciones posibles.

Programación lineal Técnica matemática para optimizar una función objetivo, sujeta a restricciones lineales.

Región factible Conjunto de combinaciones de valores de las variables de decisión que satisfacen las condiciones de no negatividad y todas las restricciones simultáneamente; es decir, las decisiones permisibles.

Restricciones Condiciones o limitaciones expresadas como desigualdades que delimitan la región factible.

Solución factible La que satisface las condiciones de no negatividad y todas las restricciones. Gráficamente, las soluciones factibles están en correspondencia, uno a uno, con los puntos de la región factible.

Solución óptima Punto de la región factible donde la función objetivo se maximiza o minimiza según el caso.

Valor objetivo óptimo (VO) Valor óptimo de la función objetivo; es decir, el valor que asume la función objetivo cuando es evaluada en la solución óptima.

Vértice óptimo Punto extremo de la región factible que maximiza o minimiza la función objetivo.

3.8.-APÉNDICE

ALGUNAS APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL GANADORAS DE PREMIOS

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). Introduction to operations research (10^a ed.). McGraw-Hill, p.(69,70).

Ambs, K., S. Cwilich, M. Deng, D. J. Houck, D. F. Lynch y D. Yan "Optimizing Restoration Capacity in the AT&T Network", en *Interfaces*, 30(1): 26-44, enero-febrero de 2000.

Caixeta-Filho, J. V., J. M. van Swaay-Neto y A. de P Wagemaker "Optimization of the Production Planning and Trade of Lily Flowers at Jan de Wit Company", en *Interfaces*, 32(1): 35-46, enero febrero de 2002.

Chalermkraivuth, K. C., S. Bollapragada, M. C. Clark, J. Deaton, L. Kiaer, J. P. Murdzek, W. Neeves, B. J. Scholz y D. Toledano "GE Asset Managemet, Genworth Financial and GE Insurance Use a Sequential-Linear-Programming Algorithm to Optimize Portfolios", en *Interfaces*, 35(5): 370-380, septiembre-octubre de 2005.

Elimam, A. A., M. Girgis y S. Kotob "A Solution to Post Crash Debt Entanglements in Kuwait's al-Manakh Stock Market", en *Interfaces*, 27(1): 89-106, enero-febrero de 1997.

Epstein, R., R. Morales, J. Serón y A. Weintraub "Use of OR Systems in the Chilean Forest Industries", en *Interfaces*, 29(1): 7-29, enero-febrero de 1997.

Geraghty, M. K. y E. Johnson "Revenue Management Saves National Car Rental", en *Interfaces*, 27(1), 107-127, enero-febrero de 1997.

Leachman, R. C., R. F. Benson, C. Liu y D. J. Raar "IMPreSS: An Automated Production-Planning and Delivery-Quotation System at Harris Corporation-Semiconductor Sector", en *Interfaces*, 26(1): 6-37, enero-febrero de 1996.

Mukuch, W. M., J. L. Dodge, J. G. Ecker, D. C Granfors y G. J. Hahn "Managing Consumer Credit Delinquency in the U. S. Economy: A Multi-Billion Dollar Management Science Application", en *Interfaces*, 22(1): 90-109, enero-febrero de 1992.

Murty, K. G., Y.-w. Wan, J. Liu, M. M. Tseng, E. Leung, K.-K. Lai y H. W. C. Chiu "Hongkong International Terminals Gains Elastic Capacity Using a Data-Intensive Decision-Support System", en *Interfaces*, 35(1): 61-75, enero-febrero de 2005.

Yoshino, T., T. Sasaki y T. Hasegawa "The Traffic-Control System on the Hanshin Expressway", en *Interfaces*, 25(1): 94-108, enero- febrero de 1995.



CAPÍTULO 4. MÉTODO SIMPLEX

TEMA 4. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MÉTODO SIMPLEX

4.1.-OBJETIVOS

- Entender el paso de solución gráfica a solución algebraica.
- Desarrollar la Tabla Simplex de la estandarización del sistema de ecuaciones canónico del modelo matemático de PL.
- Realizar la prueba de Optimalidad y Factibilidad para cada iteración de la tabla simplex.
- Obtener la solución óptima de la tabla simplex.
- Entender el uso de las variables artificiales, obteniendo el valor óptimo por medio de las etapas 1 y 2.
- Usar Operational Research en el teléfono celular.

Método Simplex:

Algoritmo iterativo para resolver problemas de programación lineal con más de dos variables de decisión, basado en transformaciones sucesivas del sistema de ecuaciones.

Vértice:

Punto extremo de la región factible donde se evalúan las posibles soluciones en el método gráfico o simplex.

4.2.-INTRODUCCIÓN

"El **método simplex**, propuesto por George Dantzig en 1947, es un procedimiento algebraico iterativo que busca soluciones óptimas a problemas de programación lineal" (Taha, 2017).

Por la solución gráfica se sabe, que el valor óptimo se halla en uno de los vértices del área circunscrita a la región factible, indicándonos de esta forma que cada vértice es una solución factible básica.

El Método Simplex es un procedimiento algebraico utilizado en programación lineal para resolver problemas de optimización. Consiste en un proceso iterativo que se basa en desplazarse a través de los **vértices** de la región factible, evaluando soluciones factibles básicas en cada paso. Este proceso, conocido como iteración, permite determinar si se cumple la prueba de optimalidad y factibilidad. A través de estas iteraciones sucesivas, se obtiene finalmente la solución óptima del problema planteado.

En el contexto de la programación lineal, es crucial entender el papel de las dos etapas en el método simplex. En la Etapa I, se introduce una región artificial con variables auxiliares también artificiales, para garantizar que el punto inicial esté dentro de una región factible, incluso si inicialmente no lo está. Este

proceso permite iterar hasta encontrar un punto en la región factible del problema original. Una vez logrado esto, en la Etapa II se procede a optimizar directamente sobre la región factible utilizando las variables de decisión originales y buscando el vértice óptimo. Este enfoque asegura que el procedimiento sea robusto y eficiente, incluso cuando el problema planteado no tiene un punto de partida factible evidente.

Para Izquierdo Granja & Ruiz Ruiz: "La aplicación 'Operational Research' facilita el aprendizaje del método simplex mediante la resolución paso a paso de problemas de programación lineal es una herramienta gratuita disponible en la Play Store para dispositivos Android" (2006). Es muy útil para aprender y aplicar métodos algebraicos relacionados con la Programación Lineal, ya que permite analizar paso a paso tablas de manera sencilla y didáctica, facilitando la resolución de problemas básicos en este campo.

4.3.-DESARROLLO

El desarrollo del método simplex se basa en la interpretación de los conceptos dados por la solución gráfica demostrados en el tema 1. del capítulo 2.

En el método gráfico la región factible es la intersección de los semiplanos que se crean con las restricciones, y en el método simplex, la región factible está representado por m ecuaciones lineales y n variables no negativas.

En el gráfico de la región factible vemos que la solución tiene una infinidad de puntos, la misma conclusión la podemos obtener analíticamente, al observar que la cantidad de ecuaciones m siempre es menor que la de variables n , por lo que se obtiene una cantidad infinita de soluciones.

Los puntos de esquina o vértices de la región factible en la solución gráfica corresponden a las soluciones básicas del espacio de soluciones algebraicas, definido por $(m - n = 0)$, que dan solución a las m ecuaciones.

Este método por lo tanto sirve para solucionar problemas de programación lineal sin tener en cuenta el número de restricciones ni el de variables.

Con los puntos de esquina, las soluciones factibles básicas definen por completo a las candidatas para la solución óptima en el espacio de soluciones algebraicas, siempre y cuando la solución resultante sea única.

4.4.-PROCEDIMIENTO

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, basada en los costos reducidos Netos=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

Operational Research:

Aplicación gratuita para dispositivos Android que facilita la resolución de problemas de programación lineal mediante el método simplex.

Estandarización del modelo de PL

Las restricciones en un problema de PL se transforman en igualdades utilizando:

Variables de holgura:

Se suman para justificar un superávit.

Variables de excedente:

Se restan junto con una variable artificial para asegurar el cumplimiento del criterio de no negatividad.

Las restricciones con igualdades requieren la adición de variables

"Algoritmo para encontrar la solución óptima de un Programa Lineal. En el método gráfico se vio que la solución óptima está asociada siempre con un punto extremo del espacio de soluciones. El método Simplex está basado fundamentalmente en este concepto, pues iterativamente comienza en un punto extremo, normalmente el origen, y se desplaza sistemáticamente de un punto extremo a otro hasta encontrar la solución óptima."(Rincón Abril, 2001)

El método simplex consta de tres actividades fundamentales:

-**Prueba de optimalidad** de la solución

- **Prueba de factibilidad** de la solución

-**Análisis de la tabla característica** para desarrollar las iteraciones que nos llevan a una nueva solución.

La idea general de este método se puede describir como el procedimiento iterativo que parte del origen y selecciona aquellas variables que optimizan el valor de la función objetivo.

Para una mejor comprensión de este algoritmo, se describen a continuación los diferentes pasos lógicos que permiten obtener el valor óptimo **Z** para cualquier problema de programación lineal.

Este método puede ser seguido paso a paso en las tablas generadas por la app de android **Operational Research**. Del que haremos un apéndice al final del capítulo mostrando su uso y sus resultados, para el problema prototípico 2.

-Estandarización del modelo de programación lineal (PL)

Este paso tiene que ver con las restricciones aumentadas, es decir, cada restricción en el problema de PL se debe aumentar utilizando variables de holgura s_j y/o variables artificiales k_j .

Una desigualdad \leq se puede convertir en una igualdad, agregando la **variable de holgura** s_j para que justifique el superávit.

Una desigualdad \geq se puede convertir en una igualdad, restando una **variable** de holgura **Excedente** s_j y sumando una variable artificial k_j . El agregar una **variable artificial** permite dar cumplimiento al criterio de no negatividad; por ejemplo:

$X \geq 6$; $X - S = 6$, pero si se está al comienzo del proceso, **$X = 0$ y $S = -6$** , conllevaría al no cumplimiento del criterio de no negatividad de los problemas de PL.

A las **restricciones** en las que el signo es una igualdad se agrega la variable artificial para que represente la expresión del lado izquierdo en ausencia de **variable de holgura** o de **excedente**.

La generalización del modelo de PL también tiene que ver con la función objetivo, por lo que debe agregarse a esta función todas las variables que aparecen como extras en las restricciones.

Los coeficientes de las variables extras que aparecerán en la **función objetivo** tienen valores de **0, +G o -G**, siempre y cuando se consideren los siguientes aspectos:

Toda variable de holgura o de excedente tiene una contribución de cero, para problemas de **maximización** o de **minimización**.

Las **variables artificiales** tendrán un coeficiente positivo de más de 100 veces el coeficiente más grande de la función objetivo cuando el problema sea de minimización, con esto se evita que aparezcan en la solución final. Si el problema es de maximización, el coeficiente de la variable artificial debe ser negativo y extremadamente pequeño, con la finalidad de que la variable artificial no permanezca dentro de las variables básicas (**VB**). Este coeficiente se representa por **G**, y la variable artificial por k_j .

Mientras se mantenga esta variable con el coeficiente **G** en las iteraciones, el proceso se mantiene en **Etapa 1**, cuando desaparecen se ingresa en la **Etapa 2**.

-Construir la tabla característica

Según Eppen,Gould y Schmidt: "El desarrollo de la tabla simplex consiste en disponer todos sus elementos en forma tabular" (1993).

$$Z(\text{Max.}) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n$$

$$\text{S.A. } a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq B_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq B_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq B_m$$

$$X_i \geq 0$$

Modelo Matemático

Ecuaciones en forma canónica

Tabla 29. Distribución Estándar Característica del modelo matemático

	C_j	C_1	$C_2 \dots$	$C_j \dots$	C_n		
C_i	VB	X_1	$X_2 \dots$	$X_j \dots$	X_n	B_i	\emptyset_i
C_1	X_1	a_{11}	$a_{12} \dots$	$a_{1j} \dots$	a_{1n}	B_1	\emptyset_1
C_2	X_2	a_{21}	$a_{22} \dots$	$a_{2j} \dots$	a_{2n}	B_2	\emptyset_2
\cdot							
C_i	X_i	a_{i1}	$a_{i2} \dots$	$a_{ij} \dots$	a_{in}	B_i	\emptyset_i
\cdot							
C_m	X_m	a_{m1}	$a_{m2} \dots$	$a_{mj} \dots$	a_{mn}	B_m	\emptyset_m
	Z_j	Z_1	$Z_2 \dots$	$Z_j \dots$	Z_n	B_\emptyset	
	$C_j - Z_j$	$C_1 - Z_1$	$C_2 - Z_2 \dots$	$C_j - Z_j \dots$	$C_n - Z_n$		

Fuente: Tabla Según Eppen,Gould y Schmidt, 1993, p. 232.

C_i = Contribución de las variables básicas-coeficiente de la función

objetivo

X_i = **Variables básicas**

C_j = Contribución de todas las **variables básicas y no básicas-**

Distribución Estándar Característica del modelo matemático

$$Z(\text{Max.}) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n$$

S.A. $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq B_1$
 $a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq B_2$
 \vdots
 $a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq B_m$
 $X_i \geq 0$

Variables básicas:

Variables que tienen un valor distinto de cero en una solución básica

Coeficiente de la función objetivo

x_j = **Variables básicas y no básicas.**

Variables no básicas:

Variables que tienen un valor igual a cero en una solución básica

B_i = Disponibilidad de recursos al comienzo, y valor de las variables

básicas al final o sobrante de recurso.

B_\emptyset = Valor del Z óptimo.

$Z = \sum_{i=0}^n C_i B_i = B_\emptyset$ = Valor del Z óptimo

$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$ = Reducción Indirecta

$C_j - Z_j = T_j$ = parámetro de optimización = costos de oportunidad

=costos reducidos netos

\emptyset_i = parámetro de factibilidad (valor crítico que marca la pauta para la

variable que sale)

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

Columna pivote:

Columna seleccionada en la tabla simplex que representa la variable que entra al conjunto de variables básicas.

-Identificar la variable que entra y la que sale

Según Eppen, Gould y Schmidt: "Se selecciona la **columna pivote** (variable que entra) a partir del $C_j - Z_j$ (**costo reducido neto**) más distante del cero positivo, para situaciones de maximización, y más distante del cero negativos para situaciones de minimización <Prueba de Optimalidad>" (1993).

Se selecciona la **fila pivote** (variable que sale) a partir del \emptyset_i más próximo a cero, para cualquier criterio de decisión de factibilidad (Prueba de Factibilidad).

En el cruce de la columna y la fila pivote se encuentra la celda pivote.

Fila pivote:

Fila seleccionada en la tabla simplex que representa la variable que sale del conjunto de variables básicas.

Gauss-Jordán:

Método algebraico utilizado para transformar la tabla simplex a su forma estándar después de cada iteración.

-Determinar la nueva solución básica

Introducir al conjunto de variables básicas la variable correspondiente a la columna pivote que tomará el puesto de la variable correspondiente a la fila pivote. Una vez se haga el intercambio se aplica **Gauss- Jordán** para transformar a su forma estándar.

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos
 Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

-Prueba de la optimalidad de la solución (obtención variable que entra)

Para Eppen, Gould y Schmidt: "El proceso simplex se termina cuando todos los $C_j - Z_j$ sean ceros o negativos, en problemas de maximización; y ceros o positivos en problemas de minimización. O si no se continuaran realizando las iteraciones" (1993).

Las iteraciones primeramente consideran la elección de la celda pivote, y luego a la iteración simplex propiamente dicha.

-Elección de la celda pivote

De acuerdo a Eppen, Gould y Schmidt, se elige la celda pivote de acuerdo con dos consideraciones (1993):

Consideración 1: Prueba de optimalidad (el mayor o menor negativo), según el caso, costo reducido dado por $C_j - Z_j$

Este valor, llamado también costo de oportunidad neto, está dado por la suma algebraica de la contribución de la variable que sale y la variable que entra.

Consideración 2: Prueba de factibilidad, Seleccionada la fila pivote, se toma como base los a_{ij} de la columna anterior, para relacionarlos con los recursos disponibles B_i , a fin de obtener el valor de θ_i que permita aplicar la prueba de factibilidad a partir del θ_i más cercano a cero.

La selección del menor θ_i se debe a que explica la relación existente entre la disponibilidad del recurso y la tasa de sustitución, es decir, permite visualizar cuánto es lo máximo que se puede producir. Gráficamente indicaría hasta donde puede crecer la variable que entra sin salir de la región factible

Celda pivote:

Intersección de la columna y fila pivote en la tabla simplex, utilizada para realizar la iteración.

Costos de oportunidad:

$$T_j = C_j - Z_j$$

Valores que representan la ganancia o pérdida al asignar recursos a una actividad en lugar de otra.

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\theta_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

Tasa de sustitución:

$$a_{ij}$$

Relación entre la disponibilidad de recursos y la variable que entra al conjunto básico, utilizada para calcular el parámetro de factibilidad.

Se llama **tasa de sustitución** porque sustituye recurso disponible por recurso terminado, o durante el proceso sustituye lo requerido entre dos variables.

La intersección de la columna pivote con la fila pivote genera la celda pivote.

Hacer iteración simplex

“Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una iteración. Es importante hacer notar que el método simplex se mueve a lo largo de los bordes del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo” (Taha, 2017).

Según Taha: “Para hacer la iteración simplex debe elaborarse un nuevo cuadro (Tabla estándar transformada) donde en la base debe aparecer la variable que entra con su respectiva contribución, y a partir de esta fila aplicar Gauss-Jordán, a fin de obtener el nuevo valor de la función objetivo debido al cambio de variables” (2017).

La solución óptima se encuentra en aquel cuadro en el que los costos reducidos netos $C_j - Z_j$ sean ceros, o negativos o positivos, según el caso. La existencia de valores positivos como costos reducidos netos significa que hay motivación para hacer una nueva combinación que optimiza el valor de **Z(Max/Min)**, en el caso de maximización, y negativos en caso de minimización.

En todos los procesos simplex donde haya costos reducidos netos iguales, se debe decidirse al azar.

Resultados especiales

-Si en la solución óptima la tabla estandarizada arroja una variable no básica con un valor igual a $C_j - Z_j = 0$, el problema tiene soluciones múltiples.

-Si en la forma estándar arroja una variable básica con un valor \emptyset_i igual a cero, el problema se ha degenerado.

-Si las iteraciones no se detienen, el problema tiene solución ilimitada.

-Si en la solución óptima la tabla estandarizada arroja una variable artificial, significa que el problema no tiene solución.

Iteración:

Proceso repetitivo en el método simplex para desplazarse entre los vértices de la región factible hasta encontrar la solución óptima.

Costo reducido neto

$$C_j - Z_j = T_j$$

Diferencia entre el coeficiente de la función objetivo y la contribución de las variables básicas, utilizada para determinar la variable que entra al conjunto básico.

4.5.-EJERCICIO PROTOTÍPICO 1

4.5.1.-CAMIONETAS CABINA SENCILLA Y DOBLE

Una compañía ensambladora de camionetas produce dos modelos, uno de cabina sencilla y el otro de doble cabina.

Hay dos líneas de producción, una para cada modelo, e intervienen dos departamentos en la producción de cada modelo. La capacidad de la línea de producción de cabina sencilla es de 70 camionetas por día. La capacidad de la línea de doble cabina es de 50 camionetas doble cabina diarios. En el departamento A se arman los chasis. En este departamento, se requiere una hora de trabajo para cada modelo Cabina sencilla y dos horas de trabajo para cada Doble cabina. En la actualidad, puede asignarse un máximo de 120 horas de trabajo diarias para la producción de ambos tipos de camionetas en el departamento A. En el departamento B se construye la carrocería. Aquí se requiere una hora de trabajo para cada Cabina sencilla y también una hora para cada modelo Doble cabina. Actualmente se pueden asignar 90 horas de trabajo al departamento B para la producción de ambos modelos. La contribución a las ganancias es de 20000 y 10000 dólares, respectivamente, por cada modelo Cabina doble y Cabina sencilla. Esta información se presenta resumida en la tabla 2. Si la compañía sabe que podrá vender todos los Camionetas dobles y sencillas que sean capaz de fabricar, ¿cuál deberá ser el plan de producción por día (es decir, la producción diaria) para cada modelo?

Intente formular la situación descrita de Cabina doble y Cabina sencilla como un modelo de programación lineal. Escriba el modelo simbólico de PL, luego desarrolle el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo después con SOLVER.

TABLA 30. Información Cabina sencilla y doble.

	Capacidad diaria	Depto A	Depto B	Ganancia por Modelo
Cabina sencilla	70	1	1	20000
Cabina doble	50	2	1	10000
Disponibilidad total		120	90	

Fuente: elaboración propia

MODELO MATEMÁTICO

DATOS

VARIABLES DE DECISIÓN

C1 =Cabina sencilla

C2 =Cabina doble

$a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ = VARIABLES TÉCNICAS

b_1, b_2, b_3, b_4 = RECURSOS

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

Modelo Matemático
Ecuaciones en forma canónica

$Z(\text{Max}) = 20000 C1 + 10000 C2 = \text{Utilidad}$

Sujeto A:

$C1 + 2 C2 \leq 120$ Restricción de trabajo departamento A

$C1 + C2 \leq 90$ Restricción de trabajo departamento B

$C1 \leq 70$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina sencilla

$C2 \leq 50$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina doble

$C1 \geq 0; C2 \geq 0$ Restricciones de no negatividad

Tabla 31. Estructura básica con valores

RESTRICCIÓN	C1	C2		RECURSOS
1	1	2	\leq	120
2	1	3	\leq	90
3	10	15	\leq	70
4	20	10	\leq	50

Fuente: elaboración propia

Primer Paso:

Transformar las restricciones en igualdades como sigue:

MODELO ESTRUCTURA ESTANDAR

Agregamos variables de holgura s_j para convertir las inecuaciones en ecuaciones.

FUNCIÓN OBJETIVO

$$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2$$

Sujeto a:

$$C_1 + 2 C_2 + S_1 = 120 \text{ (Departamento A)}$$

$$C_1 + C_2 + S_2 = 90 \text{ (Departamento B)}$$

$$C_1 + S_3 = 70 \text{ (Capacidad Cabina Sencilla)}$$

$$C_2 + S_4 = 50 \text{ (Capacidad Doble Cabina)}$$

$$\text{Variables} = C_1, C_2, S_1, S_2, S_3, S_4$$

Ecuaciones= restricción 1, restricción 2, restricción 3, restricción 4.

6 variables y 4 ecuaciones(restricciones). Por lo que no hay solución.

En el vértice1, la producción de cabinas sencillas y dobles cabinas es cero, la utilidad es cero, y todos los recursos están completos.

Tomando en el vértice1. $C_1=0$, $C_2=0$, tenemos a $S_1=60$, $S_2=90$, $S_3=70$, $S_4=50$; por lo que tendremos cuatro variables básicas y 4 ecuaciones, existiendo una solución básica inicial, en el vértice1, superando la situación inicial de desigualdad entre el número de variables y el número de ecuaciones (grafico1).

Gráficamente es evidente el observar que la solución se halla en uno de los vértices de la región factible. Sin ningún problema nos desplazamos de un vértice al vértice adyacente, hallando el valor de la función objetivo en cada uno de ellos. Este movimiento se puede realizar en sentido de las manecillas del reloj o en contra de ellas (gráfico1). Gráficamente nos

Modelo Matemático

Ecuaciones en forma estandarizada

podemos mover sin salir de la región factible. Estos desplazamientos son importantes y reciben el nombre de pruebas de optimalidad y factibilidad respectivamente. La dificultad surge por la incapacidad gráfica de poder ver más allá de tres variables de decisión.

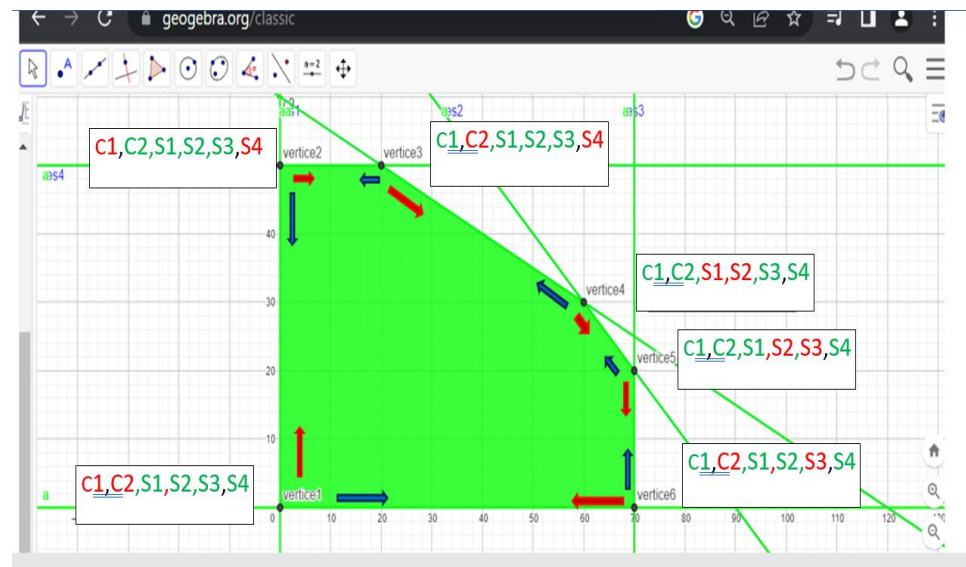
En nuestro problema tenemos solo dos variables de decisión C_1 y C_2 , por lo que será de gran ayuda su solución, pues nos permitirá el entender este salto de lo gráfico a lo analítico. El Ing. Dantzig lo soluciono desarrollando el Algoritmo de la Tabla Simplex.

La primera prueba, la de Optimalidad (grafico1) nos permite detectar si podemos continuar obteniendo una mayor utilidad al desplazarnos al siguiente vértice, lo mismo sucedería si estamos verificando si disminuye el costo, en tal caso la función objetivo tiene como propósito minimizar costos.

Gráfico 22. Prueba de Optimalidad

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, basada en los costos reducidos Netos=

$$C_j - Z_j = T_j$$


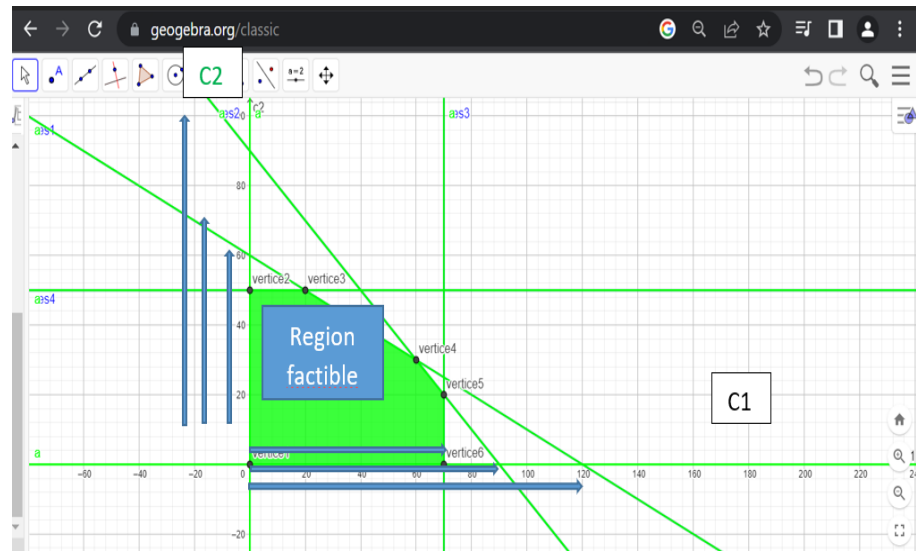
Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

Gráfico 23. Prueba factibilidad

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$\emptyset_i = B_i / a_{ij}$ para $a_{ij} > 0$



Fuente: gráfico obtenido usando GEOGEBRA

La segunda prueba que es la de Factibilidad (gráfico 2), nos permite mantenernos dentro de la región factible. Gráficamente observamos que cuando nos desplazamos hacia el próximo vértice, hay una serie de puntos dentro de la misma recta de desplazamiento que corresponden a los cortes de las restricciones con otras restricciones del sistema de ecuaciones. Gráficamente no nos vamos a desplazar fuera del área de la región factible, pero analíticamente sabemos que este corte es el que tiene el menor valor entre todos ellos. Este principio lo aplicaremos analíticamente para no salirnos de la región factible. Esto lo observamos en el gráfico 2.

Gráficamente (gráfico1), se observa que al ir de un vértice al que está a continuación, las variables que tomamos en un inicio como de valor cero, y las llamamos variables no básicas (letras color rojo gráfico1), tan solo una de ellas saldrá de su condición de cero y pasará a tomar un valor, mientras que otra de las que llamamos básicas (letras color verde gráfico1) comenzará a disminuir su valor, hasta llegar a cero en este siguiente vértice. Convirtiéndose de esta manera en no básica. Manteniéndose la condición de no degeneración del sistema de ecuaciones, esto es: Número de variables de decisión igual al número de ecuaciones de restricción. La idea es que nuestro sistema original de ecuaciones se transforme al ir de vértice en vértice, y no cambie a otro sistema de ecuaciones. Que es el principio

del método de solución de gauss para un sistema de ecuaciones. Este sistema de ecuaciones transformable lo llamaremos Tabla de estructura estándar (Gráfico 2.a).

Gráfico 2.a

Estructura estándar

RESTRICCIÓN	c_1	c_2	s_1	s_2	s_3	s_4		RECURSOS
1	c_1	$2c_2$	1				=	120
2	c_1	c_2		1			=	90
3	c_1				1		=	70
4		c_2				1	=	50

Fuente: gráfico elaboración propia

En la prueba de optimalidad (gráfico 1), gráficamente podemos ver que, en el desplazamiento de vértice en vértice, aumenta el valor de la función óptima, hasta un punto en el que comienza a disminuir, este es el momento en que paramos de buscar y nos quedamos en el vértice que tuvo el valor antes de comenzar a disminuir. Este es el denominado valor óptimo. En nuestro caso es el vértice 5.

Todo esto lo resumió el ing. Dantzig en el algoritmo de la Tabla Simplex.

Comenzaremos utilizando el Gráfico 2.a, de tal manera que a partir de ella construiremos la **Tabla Simplex** (Gráfico 2.b).

Gráfico 2.b

Tabla Simplex

Tabla Simplex:
Representación tabular utilizada en el método simplex para realizar iteraciones y evaluar soluciones factibles básicas.

Coeficiente Básico C_i	Variables Básicas	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2	1	0	0	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
			0	0						
	Variables Básicas y No Básicas		C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1		1	2	1				120	θ_1
0	S_2		1	1		1			90	θ_2
0	S_3		1				1		70	θ_3
0	S_4			1				1	50	θ_4
	Z_j		Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	B_i	
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6		

Fuente: Gráfico según (Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 232)

s_1 =holgura de trabajo en el departamento A

s_2 = holgura de trabajo en el departamento B

s_3 =holgura en la capacidad de producción de cabinas sencillas

s_4 =holgura en la capacidad de producción de cabinas dobles

z_j =Reducción Indirecta

C_j =Coeficiente de la función objetivo

$C_j - z_j = T_j$ =Parámetros de Optimización= costos de oportunidad

$\theta_i = B_i / a_{ij}$ =Prueba de Factibilidad

Prueba de optimalidad:
Evaluación que determina si la solución actual es óptima, basada en los costos reducidos Netos=
 $C_j - Z_j = T_j$

La tabla Simplex, debe desarrollar el mismo proceso que se hace al hallar la solución gráficamente. Esto incluye en primer

lugar las dos pruebas básicas, La de optimalidad y la de factibilidad.

La **prueba de optimalidad** debe indicar hasta donde es posible seguir maximizando la utilidad de la función objetivo. Esto se logra al preguntarnos ¿qué pasaría sí? Al tener en este caso dos variables no básicas **c1** y **c2**, nos podemos preguntar qué pasaría si variando en una sola unidad, una de estas variables no básicas, aumentaría o disminuiría la utilidad, esto se responde primero al hallar el valor de **z_j**, que es el que nos entrega la reducción indirecta, la misma que significa, cuanto se reduce la capacidad de los recursos **B_i** de seguir brindando capacidad de producción. Su fórmula es:

$z_j =$ (coeficientes básicos) (**J esima** columna de datos) =

$$z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij} ; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Y luego haciendo la prueba de optimalidad para cada variable no básica, al restar la ganancia **c_j** por unidad, de los costos indirectos.

Precios sombra / Precios duales/ Costo de oportunidad/Costos marginales:

Valores que indican cuánto aumentaría la utilidad al incrementar en una unidad la disponibilidad de un recurso.

Esta prueba de optimalidad la llamaremos también obtención de los; **Precios sombra, Precios duales, Costo de oportunidad, Costos Marginales**, el mismo nos permitirá conocer cuanto sería la ganancia al producir una sola camioneta. Esto se realiza para cada una de las variables, y nos deja saber si se continúa obteniendo ganancia al desplazarnos hacia el siguiente vértice o no.

Gráfico 2.c

Valores en el vértice 1

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2	1	0	0	0	0	Recursos b_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1		1	2	1				120	60
0	S_2		1	1		1			90	90
0	S_3		1				1		70	Ind
0	S_4			1				1	50	50
Z_j			0	0	0	0	0	0		
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			2	1	0	0	0	0	Z_{max}	
			0	0						

Fuente: Gráfico adaptado de Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 232.

Obtención de los costos indirectos. Nos da la disminución del recurso, cuando se produce una sola camioneta cabina sencilla o doble.

$$Z_1 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_2 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [2 \ 1 \ 0 \ 1] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_3 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_4 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_5 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_6 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

costos indirectos

reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, basada en los costos reducidos Netos=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 20 - 0 = 20$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 10 - 0 = 10$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

Este resultado indica que, si producimos una cabina sencilla, tenemos una ganancia de \$20000, y si producimos una doble cabina \$10000 que son dos valores positivos, escogemos el de \$20000 por que nos arroja una mayor ganancia (gráfico 1). Pero por motivos didácticos escogeremos el de \$10000. De esta forma la variable no básica c_2 , se desplaza hacia el vértice 2, manteniendo la otra variable no básica c_1 , con un valor de cero.

Ahora con la prueba de factibilidad descubrimos hasta donde podemos incrementar nuestra producción de doble cabinas sin violar las otras restricciones. Esto lo podemos ver en el sistema de ecuaciones:

$$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2$$

Sujeto a:

$$C_1 + 2 C_2 + S_1 = 120 \text{ (Departamento A)}$$

$$C_1 + C_2 + S_2 = 90 \text{ (Departamento B)}$$

$$C_1 + S_3 = 70 \text{ (Capacidad Cabina Sencilla)}$$

$$C_2 + S_4 = 50 \text{ (Capacidad Doble Cabina)}$$

Al reescribirlas:

$$S_1 = 120 - (C_1 + 2C_2)$$

$$S_2 = 90 - (C_1 + C_2)$$

$$s_3 = 70 - c_1$$

$$r_1 = 50 - c_2$$

Si mantenemos c_1 igual a cero tenemos:

$$s_1 = 120 - 2c_2$$

$$s_2 = 90 - c_2$$

$$s_3 = 70$$

$$r_1 = 50 - c_2$$

Observamos que al aumentar la producción de c_2 . La restricción r_1 será la primera en agotarse, llegando a 50, por lo que c_2 , lo mínimo a lo que puede llegar es a este valor, si aumenta una unidad más, deberemos incrementar recursos que están limitados por la restricción.

Sabiendo que nos desplazamos hacia el vértice 2, realizaremos la Prueba de Factibilidad con la finalidad de saber hasta dónde podríamos llegar, sin pasarnos del vértice 2. Gráficamente es sencillo, pero analíticamente tendremos que apoyarnos en los valores arrojados, por la división del recurso B_i , para el valor de a_{ij} , en su ascenso.

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{12} = 120 / 2 = 60$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{22} = 90 / 1 = 90$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{32} = 70 / 0 = \text{indeterminado}$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{42} = 50 / 1 = 50$$

Escogemos el menor valor que es 50, sabiendo que hasta ahí llegaremos sin salirnos de la región factible (gráfico 2). En el gráfico 2 se observan las flechas, que indican cuales son los valores hasta los que crece sin salir de la región factible, se observa que la flecha de menor valor llega a un tope de 50. Esto es lo mismo que obtuvimos al ver las ecuaciones de restricción anteriores. Traducido esto al concepto analítico, nos indica que la variable que sale de ser no básica es la c_2 , y la básica que se

transforma en no básica es s_4 . Por lo que la holgura que tenía la restricción 4, ha llegado a su valor límite que es 50. Este es el recurso de producción de dobles cabinas, así que, si se quiere producir una doble cabina más, habría que incrementar los recursos de tiempo de trabajo en los departamentos **A y B**.

El sistema de ecuaciones dado por las restricciones es:

$$\text{Restricción 1} \quad c_1 + 2c_2 + s_1 = 120$$

$$\text{Restricción 2} \quad c_1 + c_2 + s_2 = 90$$

$$\text{Restricción 3} \quad c_1 + s_3 = 70$$

$$\text{Restricción 4} \quad c_2 + s_4 = 50$$

Como se puede observar en el vértice 1 (Tabla 1), este sistema se transforma en:

$$s_1 = 120 - c_1 - 2c_2$$

$$s_2 = 90 - c_1 - c_2$$

$$s_3 = 70 - c_1$$

$$s_4 = 50 - c_2$$

Al ubicarnos en el punto **vértice 1** $(c_1, c_2) = \text{vértice 1}(0,0)$ correspondiente a cero producciones de camionetas sencilla y doble. Los valores de s_1, s_2, s_3, s_4 están en sus máximos.

Estos valores se hallan haciendo $c_1=0$ y $c_2=0$, en las ecuaciones.

$$s_1 = 120$$

$$s_2 = 90$$

$$s_3 = 70$$

$$s_4 = 50$$

Revisando la tabla 3. de la estructura canónica.

Vemos que las variables básicas, corresponden a estos valores. Solo aparecen en una sola ecuación, y su coeficiente es +1.

El objetivo al pasar al vértice 2, es mantener esta misma estructura canónica, con las variables básicas apareciendo en una sola ecuación y con coeficiente +1.

En el vértice 2 de acuerdo con el gráfico 1 las variables no básicas son ahora, c_1 y x_2 . Por lo que el sistema de ecuaciones se transforma (sin alterarse):

De:

$$\text{Restricción 1} \quad c_1 + 2c_2 + s_1 = 120$$

$$\text{Restricción 2} \quad c_1 + c_2 + s_2 = 90$$

$$\text{Restricción 3} \quad c_1 + s_3 = 70$$

$$\text{Restricción 4} \quad c_2 + x_2 = 50$$

A:

$$c_1 + s_1 - 2x_2 = 20$$

$$c_1 + s_2 - x_2 = 40$$

$$c_1 + s_3 = 70$$

$$c_2 + x_2 = 50$$

Al hacer las nuevas variables no básicas x_2 y c_1 iguales a cero.

$$s_1 = 20$$

$$s_2 = 40$$

$$s_3 = 70$$

$$c_2 = 50$$

Obtenemos directamente de la matriz standard los valores de las variables básicas. Sin haber alterado nuestro sistema de ecuaciones original.

Esto mismo lo vamos a hacer con la Tabla Simplex, al pasar del vértice 1 al vértice 2.

Para realizar esto, ya hemos hecho la prueba de optimalidad y la de factibilidad, indicándonos que la variable no básica c_2 se convierte en básica, y la variable básica x_2 se convierte en no básica. Esto se hace tomando la columna que corresponde a c_2

y la fila que corresponde a x_2 . de su intersección hallamos la celda, a la que llamaremos Celda Pivote. Esta la transformamos en 1, y arriba y debajo de ella los valores de las celdas los hacemos cero, con el propósito que se convierta en el nuevo valor representativo de la matriz canónica, esto es que las variables básicas, tengan coeficiente +1, y que solo aparezcan en una ecuación, por eso las celdas arriba y debajo de ella se transforman en cero. Para realizar esto utilizamos el método de transformación de Gauss.

Gauss-Jordán:

Método algebraico utilizado para transformar la tabla simplex a su forma estándar después de cada iteración.

El sistema de ecuaciones del vértice 1, se simplifica en la siguiente tabla, para observar cómo transformamos la variable que entra x_2 en variable básica, esto es que tenga coeficiente +1, y las restantes celdas sean cero, y que solo aparezca en una ecuación. Al aplicar Gauss, para hacer el coeficiente +1. Dividimos la fila para el valor de la celda pivote, y luego la fila pivote la multiplicamos por un valor que al ser restado de la fila este valor se haga cero.

Gráfico 2.d

Método Gauss

Fila1	1	2	1				120	Fila1-(Fila4)(2)
Fila2	1	1		1			90	Fila2-(Fila4)(1)
Fila3	1				1		70	
Fila4		1				1	50	Fila4/1

Fuente: elaboración propia

Gráfico 2.e

Resultado Método Gauss

Fila1	1		1			-2	20
Fila2	1			1		-1	40
Fila3	1				1		70
Fila4		1				1	50

Fuente: elaboración propia

Los valores de las celdas son exactamente, las mismas que se dan en las ecuaciones transformadas para el vértice 2 (Gráfico 2.f).

Gráfico 2.f

Valores en el vértice 2

costos indirectos

reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima. Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos

Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Prueba de factibilidad:

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2	1	0	0	0	0	Recursos B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1		1		1			-2	20	20
0	S_2		1			1		-1	40	90
0	S_3		1				1		70	70
10	C_2			1				1	50	= indet
Z_j			0	1	0	0	0	1	500	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			2	0	0	0	0	-		
			0					1		
								0		

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 232.

$$Z_1 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41}] = [0 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 0] = 0+0+0+0=0$$

$$Z_2 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42}] = [0 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] = 0+0+0+10=10$$

$$Z_3 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43}] = [0 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0] = 0+0+0+0=0$$

$$Z_4 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44}] = [0 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0+0+0+0=0$$

$$Z_5 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45}] = [0 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0] = 0+0+0+0=0$$

$$Z_6 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46}] = [0 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [-2 \ -1 \ 0 \ 1] = 0+0+0+10=10$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 20 - 0 = 20$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 10 - 10 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 10 = -10$$

El mayor valor positivo es 20, por lo que la variable que entra es la C_1 .

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{11} = 20 / 1 = 20$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{21} = 40 / 1 = 40$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{31} = 70 / 1 = 70$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{41} = 50 / 0 = \text{indeterminado}$$

El menor valor es 20, por lo que la variable que sale es la S_1 .

Aplicamos el método de Gauss, tal y como lo hicimos anteriormente, transformándolo dentro de la forma canónica sin alterarlo y obteniendo los valores del vértice 3 (Gráfico 2.f).

Gráfico 2.f

Valores en el vértice 3

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2	1	0	0	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
			C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
20	C_1		1	0	1	0	0	-2	20	-10
0	S_2		0	0	-1	1	0	1	20	20
0	S_3		0	0	-1	0	1	2	50	25
10	C_2		0	1	0	0	0	1	50	50
Z_j			2	1	20	0	0	-	900	
			0	0			30			
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			0	0	-	0	0	3		
					2			0		
					0					

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 232.

costos indirectos
 reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad
 $Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij} ; j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$Z_1 = [C_1 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0] = 20 + 0 + 0 + 0 = 20$$

$$Z_2 = [C_1 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] = 40 + 0 + 0 + 10 = 10$$

$$Z_3 = [C_1 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ -1 \ -1 \ 0] = 20 + 0 + 0 + 0 = 20$$

$$Z_4 = [C_1 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_5 = [C_1 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_6 = [C_1 \ C_4 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [-2 \ 1 \ 2 \ 1] = -40 + 0 + 0 + 10 = -30$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos
 Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 20 - 20 = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 10 - 10 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - 20 = -20$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - (-30) = 30$$

El mayor valor es el de 30, por lo que la variable que entra es s_6 .

Prueba de Factibilidad

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{16} = 20 / -2 = -10$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{26} = 20 / 1 = 20$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{36} = 50 / 2 = 25$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{46} = 50 / 1 = 50$$

El menor es 20, la variable que sale es s_2 .

Aplicamos el método de Gauss, tal y como lo hicimos anteriormente, transformándolo dentro de la forma canónica sin alterarlo y obteniendo los valores del vértice 4 (Gráfico 2.g).

Gráfico 2.g

Valores en el vértice 4.

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficientes Básicos y No Básicos C_j	2	1	0	0	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
20	C_1		1	0	-1	2	0	0	60	-60
0	S_4		0	0	-1	1	0	1	20	-20
0	S_3		0	0	1	-2	1	0	10	10
10	C_2		0	1	1	-1	0	0	30	30
Z_j			2	1	-	3	0	0	1500	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			0	0	1	-	0	0		

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 232.

$$Z_1 = [C_1 \ C_6 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0] = 20 + 0 + 0 + 0 = 20$$

$$Z_2 = [C_1 \ C_6 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] = 0 + 0 + 0 + 10 = 10$$

$$Z_3 = [C_1 \ C_6 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [-1 \ -1 \ 1 \ 1] = -20 + 0 + 0 + 10 = -10$$

$$Z_4 = [C_1 \ C_6 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [2 \ 1 \ -2 \ -1] = 40 + 0 + 0 - 10 = 30$$

$$Z_5 = [C_1 \ C_6 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_6 = [C_1 \ C_6 \ C_5 \ C_2] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 10 = 0$$

costos indirectos

reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos
 Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 20 - 20 = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 10 - 10 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - (-10) = 10$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - (30) = -30$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

El mayor valor es el de 10, por lo que la variable que entra es s_1 .

Prueba de Factibilidad

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{13} = 60 / -1 = -60$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{23} = 20 / -1 = -20$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{33} = 10 / 1 = 10$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{43} = 30 / 1 = 30$$

El menor es 10, la variable que sale es s_3 .

Aplicamos el método de Gauss, tal y como lo hicimos anteriormente, transformándolo dentro de la forma canónica sin alterarlo y obteniendo los valores del vértice 5 (Gráfico 2.h).

Gráfico 2.h

Valores en el vértice 5.

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficientes Básicos y No Básicos C_j	2	1	0	0	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad \emptyset_i
		Variables Básicas y No Básicas	C_1	C_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
20	C_1		1	0	0	0	1	0	70	
0	S_4		0	0	0	-1	1	1	30	
0	S_1		0	0	1	-2	1	0	10	
10	C_2		0	1	0	1	-1	0	20	
Z_j			2	1	0	1	1	0	1600	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			0	0	0	-	-	0		
						1	1			
						0	0			

costos indirectos
 reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad
 $Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$

Prueba de optimalidad:
 Evaluación que determina si la solución actual es óptima, Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos
 Netos=Costos reducidos de oportunidad=
 $C_j - Z_j = T_j$

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 232.

$$Z_1 = [C_1 \ C_6 \ C_3 \ C_2] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0] = 20 + 0 + 0 + 0 = 20$$

$$Z_2 = [C_1 \ C_6 \ C_3 \ C_2] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] = 0 + 0 + 0 + 10 = 10$$

$$Z_3 = [C_1 \ C_6 \ C_3 \ C_2] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0] = -0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_4 = [C_1 \ C_6 \ C_3 \ C_2] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ -1 \ -2 \ 1] = 0 + 0 + 0 + 10 = 10$$

$$Z_5 = [C_1 \ C_6 \ C_3 \ C_2] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [1 \ 1 \ 1 \ -1] = 20 + 0 + 0 - 10 = 10$$

$$Z_6 = [C_1 \ C_6 \ C_3 \ C_2] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46}] = [20 \ 0 \ 0 \ 10] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 20 - 20 = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 10 - 10 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - 10 = -10$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 10 = -10$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

Los costos de oportunidad son negativos, por lo que el proceso se detiene en este vértice 5. Ya no se puede obtener una mayor ganancia.

Z óptimo:

Valor óptimo de la función objetivo alcanzado al finalizar el método simplex.

La máxima utilidad (Z óptimo) será de \$1600000 con una producción

diaria de:

$C_1 = 70$ camionetas cabina sencilla y

$C_2 = 20$ camionetas doble cabina

4.5.2.-EJERCICIO PROTOTÍPICO 2

INDUSTRIAS JARAMILLO

INDUSTRIAS JARAMILLO (IJ), produce dos líneas de molinos para minería. Una de sus líneas de productos, llamada Molinos Chilenos, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de trituración líquida. La otra línea, denominada molinos de bolas, está destinada a la trituración de material en seco. Las M1 y M2 son hechas en los mismos galpones y con las mismas herramientas. Las predicciones económicas indican que se podrían vender normalmente todas las M1 y M2 que se fabriquen. Se desea pronosticar cuantas M1 y M2 se deben fabricar para obtener máximas ganancias. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo.

Los datos de IJ

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de IJ es de \$5000 por cada **M1** vendido y de \$4000 por cada **M2**.
2. En cada galpón pasan por mecanizado cualquier M1 o M2.

3. El galpón A dispondrá el próximo mes de 150 horas y el galpón B de 160 horas. En el galpón A, cada M1 necesita 10 horas de mecanizado y cada M2, 15 horas. En el galpón B, cada M1 necesitará de 20 horas de mecanizado, y cada M2, 10 horas. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 4.

4. Las pruebas de los M1 y M2, serán realizadas en un galpón independiente, manejado por el sindicato de trabajadores, quien exige no menos de 135 horas, para sus trabajadores, los cuales gastan 30 horas en cada M1 y 10 horas por cada M2. Esta información se resume en la tabla 5.

5. El directorio como una medida de posicionamiento en el mercado deberá fabricar por lo menos una M1 por cada tres M2.

6. Un distribuidor importante ha pedido para el siguiente mes 5 equipos sin importar cuantos son M1 y cuantos son M2.

Se desea determinar la producción de M1 y M2 que maximizaría las ganancias

Tabla 32. Datos de mecanizado de IJ

GALPON	HORAS		
	POR M1	POR M2	TOTAL, DISPONIBLE
A	10	15	150
B	20	10	160

Fuente: elaboración propia

Tabla 33. Datos de prueba de IJ

	1 M1	1 M2	Horas totales requeridas
Horas de prueba	30	10	135

Fuente: elaboración propia

SOLUCIÓN ANALÍTICA

MODELO MATEMÁTICO

Tabla 34. Datos ejercicio molinos

VARIABLES DE DECISION	DE	VARIABLES TECNICAS	RECURSOS
M1(Molino Chileno)		a_{12}	b_1
M2(Molino de Bolas)	de	a_{22}	b_2
		a_{21}	b_3
		a_{22}	b_4
		a_{51}	b_5
		a_{52}	

Fuente: elaboración propia

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

Modelo matemático

$Z(\text{Max}) = 5000M1 + 4000M2 = \text{UTILIDAD}$

Sujeto A:

$M1 + M2 \geq 5$ Restricción de producción mínima

$M1 - 3M2 \leq 0$ Restricción de balance de posición en el mercado

$10M1 + 15M2 \leq 150$ Restricción de Capacidad del Galpón A

$20M1 + 10M2 \leq 160$ Restricción de Capacidad del Galpón B

$30M1 + 10M2 \geq 135$ Restricción mínima cantidad de horas para pruebas

$M1 \geq 0 ; M2 \geq 0$ Restricciones de no negatividad

Tabla 35. Restricciones

RESTRICCION	M1	M2		RECURSOS
1	$a_{11}M1$	$a_{12}M2$	\geq	b_1
2	$a_{21}M1$	$a_{22}M2$	\leq	b_2
3	$a_{31}M1$	$a_{32}M2$	\leq	b_3
4	$a_{41}M1$	$a_{42}M2$	\leq	b_4
5	$a_{51}M1$	$a_{52}M2$	\geq	b_5

Fuente: elaboración propia

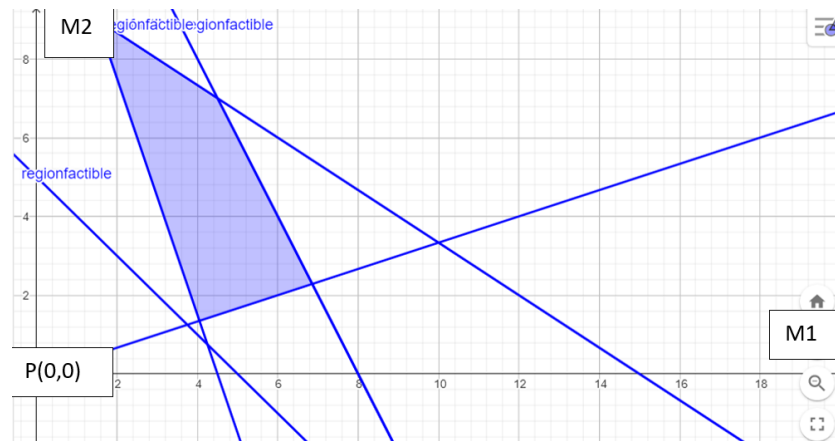
Tabla 36. Estructura con valores

RESTRICCION	M1	M2		RECURSOS
1	1	1	\geq	5
2	1	-3	\leq	0
3	10	15	\leq	150
4	20	10	\leq	160
5	30	10	\geq	135

Fuente: elaboración propia

El gráfico 3 muestra la región factible dada por las restricciones. La solución gráfica se encuentra igual que en el ejemplo anterior, desplazando la función objetivo de vértice en vértice, hasta obtener el máximo valor. La solución grafica se mantiene igual. La situación cambia cuando queremos aplicar el método analítico a través del Método Simplex, pues necesitamos hallar una solución factible básica inicial que nos sitúe dentro de la región factible. En el ejemplo de la producción de camionetas sencillas y dobles, al iniciar la producción en $c1=0$ y $c2=0$, nos situábamos inmediatamente en un vértice de la región factible, al realizar lo mismo en nuestro actual problema $M1=0$ y $M2=0$, nos damos cuenta de que gráficamente no nos ubicamos dentro de la región factible (Gráfico 24).

Gráfico 24. Región Factible



Fuente: Gráfico obtenido usando GEOGEBRA

A Las inecuaciones con $>$, se les agrega una variable de holgura

$$-S_1 \cdot M1 + M2 - S_1 = 5$$

$$M1 - 3M2 + S_2 = 0$$

$$10M1 + 15M2 + S_3 = 150$$

$$20M1 + 10M2 + S_4 = 160$$

$$30M1 + 10M2 - S_5 = 135$$

La estructura estándar queda (Gráfico 3.a.)

Gráfico 3.a.

Estructura Estándar

RESTRICCION	M1	M2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅		RECURSOS
1	1	1	-1					=	5
2	1	-3		1				=	0
3	10	15			1			=	150
4	20	10				1		=	160
5	30	10					-1	=	135

Modelo Matemático
Ecuaciones en forma estandarizada

Fuente: elaboración propia

Para Eppen, Gould y Schmidt: "Esta estructura estándar, indica que la condición de que las variables básicas estén en una sola ecuación se cumple, pero la de que su coeficiente sea positivo no, para cumplir con esto agregamos las variables artificiales K_j " (1993).

A Las inecuaciones con \geq , se les agrega una variable de holgura $-S_j$

Variables básicas:
Variables que tienen un valor distinto de cero en una solución básica

$$M1 + M2 - S_1 + K_1 = 5$$

$$M1 - 3M2 + S_2 = 0$$

$$10M1 + 15M2 + S_3 = 150$$

$$20M1 + 10M2 + S_4 = 160$$

$$30M1 + 10M2 - S_5 + K_2 = 135$$

Variables no básicas:
Variables que tienen un valor igual a cero en una solución básica

Gráfico 3.b.

Estructura Estándar con las variables artificiales.

Variables artificiales:
Variables introducidas en la Etapa I del método simplex para garantizar un punto inicial dentro de la región factible.

RESTRICCIÓN	M1	M2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	K ₁	K ₂		RECURSO
N											S
1	1	1	-					1		=	5
			1								
2	1	-3		1						=	0
3	10	15			1					=	150
4	20	10				1				=	160
5	30	10					-		1	=	135
							1				

Fuente: elaboración propia

En este caso K_1 y K_2 , pasan a ser las nuevas variables básicas, pues cumplen con la condición de ser de coeficiente +1, y solo repetirse en una ecuación.

Las variables básicas serán entonces, $K_1, S_2, S_3, _, K_2$. Y las no básicas $M1, M2, S_1, S_5$.

Penalización:

Proceso de asignar un coeficiente muy grande [G] a las variables artificiales en la función objetivo para garantizar que sean eliminadas del sistema en las iteraciones.

El siguiente paso es convertir las variables k_1 y k_2 en no básicas, con lo que conseguiremos que se hagan cero. Y de esta manera podemos tener los valores de M_1 y M_2 , dentro de la región factible. Para realizar esto analíticamente necesitamos agregarles un coeficiente exageradamente grande $-G$ de tal manera que, en el proceso de hallar los costos marginales, sean los primeros en convertirse en no básicos. La penalización la hacemos con un valor $-G$ como coeficiente de las variables artificiales k_j en la función Objetivo, que indica una cifra muy grande. Este proceso según Eppen, Gould y Schmidt: "Lo podemos dividir en dos fases: la Etapa I se desarrolla mientras mantenemos las variables artificiales como variables básicas. En el momento en que dejan de serlo pasamos a la Etapa II. Esta Etapa II al encontrarse ya dentro de la región factible se desarrolla como un proceso simplex normal" (1993).

La función objetivo es:

$$Z(\text{Max}) = 5000M_1 + 4000M_2 + (0)S_1 + (0)S_2 + (0)S_3 + (0)S_4 + (0)S_5 + (-G)K_1 + (-G)K_2 = \text{UTILIDAD}$$

Etapa I del método simplex:

Fase inicial del método simplex en la que se utiliza una región artificial para encontrar un punto factible.

Etapa I

En esta Etapa I La table Simplex (Gráfico 3.c.) quedara:

Gráfico 3.c.

Tabla Simplex 1

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad \emptyset_i
		VARIABLES BÁSICAS y NO BÁSICAS	M1	M2	S1	S2	S3	S4	S5	K1	K2			
-G	K_1		1	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	5	5
0	S_2		1	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	S_3		10	15	0	0	1	0	0	0	0	0	150	15
0	S_4		20	10	0	0	0	1	0	0	0	0	160	8
-G	K_2		30	10	0	0	0	0	-1	0	1	0	135	4.5
Z_j			-31 G	-11 G	G	0	0	0	G	-G	-G		-140 G	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			5000 +31 G	4000 +11 G	-G	0	0	0	-G	0	0			

Fuente: Grafico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 246.

Tal y como lo hicimos anteriormente, haremos primero la prueba de Optimalidad.

costos indirectos

reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$Z_1 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41} \ a_{51}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [1 \ 1 \ 10 \ 20 \ 30] = -G + 0 + 0 + 0 + 0 - 30G = -31G$$

$$Z_2 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42} \ a_{52}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [1 \ -3 \ 15 \ 10 \ 10] = G + 0 + 0 + 0 + 0 - 10G = -11G$$

$$Z_3 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43} \ a_{53}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = G + 0 + 0 + 0 + 0 = G$$

$$Z_4 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44} \ a_{54}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_5 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45} \ a_{55}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_6 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46} \ a_{56}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] = -G + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_7 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{17} \ a_{27} \ a_{37} \ a_{47} \ a_{57}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0+0+0+0+G = G$$

$$Z_8 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{18} \ a_{28} \ a_{38} \ a_{48} \ a_{58}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0+0+0+0-G = -G$$

$$Z_9 = [C_8 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{19} \ a_{29} \ a_{39} \ a_{49} \ a_{59}] = [-G \ 0 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] = -G+0+0+0+0 = -G$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 5000 - (-31 G) = 5000 + 31 G$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 4000 - (-11 G) = 4000 + 11 G$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - G = -G$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

$$T_7 = C_7 - Z_7 = 0 - (M) = -M$$

$$T_8 = C_8 - Z_8 = -G - (-G) = 0$$

$$T_9 = C_9 - Z_9 = -G - (-G) = 0$$

El mayor valor positivo es $5000 + 31 G$ por lo que la variable que entra es la **M1**.

Ahora realizaremos la Prueba de Factibilidad

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{13} = 5 / 1 = 5$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{23} = 0 / 1 = 0$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{33} = 150 / 10 = 15$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{43} = 160 / 20 = 8$$

$$\emptyset_5 = b_5 / a_{53} = 135 / 30 = 4.5$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima. Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos
 Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = b_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

El menor valor es 0, por lo que la variable que sale es la s_2 . Y es la nueva variable no básica.

De esta manera completamos la Gráfico 3.c. (Tabla Simplex 1).

Para realizar esto, ya hemos hecho la prueba de optimalidad y la de factibilidad, indicándonos que la variable no básica $M1$ se convierte en básica, y la variable básica s_2 se convierte en no básica. Esto se hace tomando la columna que corresponde a $M1$ y la fila que corresponde a s_2 . Y de su intersección hallamos la celda, a la que llamaremos Celda Pivote. Esta la transformamos en 1, y arriba y debajo de ella los valores de las celdas los hacemos cero, con el propósito que se convierta en el nuevo valor representativo de la matriz canónica, esto es que las variables básicas, tengan coeficiente +1, y que solo aparezcan en una ecuación, por eso las celdas arriba y debajo de ella se transforman en cero. Para realizar esto utilizamos el método de transformación de Gauss.

El sistema de ecuaciones de la Tabla Simplex 1, se simplifica en la siguiente Gráfico 3.d., para observar cómo transformamos la variable que entra $M1$ en variable básica, esto es que tenga coeficiente +1, y las restantes celdas sean cero, y que solo aparezca en una ecuación. Al aplicar Gauss, para hacer el coeficiente +1. Dividimos la fila para el valor de la celda pivote, y luego la fila pivote la multiplicamos por un valor que al ser restado de la fila este valor se haga cero.

Gráfico 3.d.

Método Gauss

Gauss-Jordán:
Método algebraico utilizado para transformar la tabla simplex a su forma estándar después de cada iteración.

Fila1	1	1	-1	0	0	0	0	1	0	Fila1- (Fila2)(1)
Fila2	1	-3	0	1	0	0	0	0	0	Fila2/1
Fila3	10	15	0	0	1	0	0	0	0	Fila3- (Fila2)(10)
Fila4	20	10	0	0	0	1	0	0	0	Fila4- (Fila2)(20)
Fila5	30	10	0	0	0	0	-1	0	1	Fila5- (Fila2)(30)

Fuente: elaboración propia

Gráfico 3.e.

Resultado Método Gauss

Fila1	0	4	-1	-1	0		0	0	1	0	Fila1- (Fila2)(1)
Fila2	1	-3	0	1	0		0	0	0	0	Fila2/1
Fila3	0	45	0	-10	1		0	0	0	0	Fila3- (Fila2)(10)
Fila4	0	70	0	-20	0		1	0	0	0	Fila4- (Fila2)(20)
Fila5	0	100	0	-30	0		0	-1	0	1	Fila5- (Fila2)(30)

Fuente: elaboración propia

Realizamos la transformación hacia la nueva Tabla Simplex 2 (Gráfico 3.f.)

Gráfico 3.f.

Tabla Simplex 2

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básico C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
-G	K_1		0	4	-1	-1	0	0	0	1	0	5	5	
5000	M_1		1	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
0	S_3		0	45	0	-10	1	0	0	0	0	150	15	
0	S_4		0	70	0	-20	0	1	0	0	0	160	8	
-G	K_2		0	100	0	-30	0	0	-1	0	1	135	4.5	
Z_j			5000	-15000-104G	G	5000+31M	0	0	G	-G	-G			
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			0	19000+104G	-G	-5000-31M	0	0	-G	0	0	-140G		

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 246.

En la Tabla simplex 1 (Gráfico 3.c), vemos que los valores del costo de oportunidad T_1 y T_2 , son positivos, por lo que podemos todavía encontrar una mayor utilidad.

Comenzamos a desarrollar la Gráfico 3.f. (Tabla Simplex 2)

$$Z_1 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41} \ a_{51}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = -0 + 5000 + 0 + 0 + 0 = 5000$$

$$Z_2 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42} \ a_{52}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [4 \ -3 \ 45 \ 70 \ 100] = -4G - 15000 + 0 + 0 + 0 - 100G = -15000 - 104G$$

$$Z_3 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43} \ a_{53}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = G + 0 + 0 + 0 + 0 = G$$

$$Z_4 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44} \ a_{54}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [-1 \ 1 \ -10 \ -20 \ -30] = G + 5000 + 0 + 0 + 30G = 5000 + 31G$$

$$Z_5 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45} \ a_{55}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_6 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46} \ a_{56}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_7 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{17} \ a_{27} \ a_{37} \ a_{47} \ a_{57}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0 + 0 + 0 + 0 + G = G$$

$$Z_8 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{18} \ a_{28} \ a_{38} \ a_{48} \ a_{58}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 - G = -G$$

$$Z_9 = [C_8 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{19} \ a_{29} \ a_{39} \ a_{49} \ a_{59}] = [-G \ 50000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] = -G + 0 + 0 + 0 + 0 = -G$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 5000 - (5000) = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 4000 - (-15000 - 104G) = 19000 + 104G$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - (5000 + 31G) = -5000 - 31G$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

costos indirectos

reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

$$T_7 = C_7 - Z_7 = 0 - (-G) = -G$$

$$T_8 = C_8 - Z_8 = -G - (-G) = 0$$

$$T_9 = C_9 - Z_9 = -G - (-G) = 0$$

El mayor valor positivo es $19000 + 104G$ por lo que la variable que entra es la M_2 . Ahora realizaremos la Prueba de Factibilidad

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{11} = 5/4 = 1.25$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{21} = 0/-3 = \text{Negativo}$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{31} = 150/45 = 3.333$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{41} = 160/70 = 2.28$$

$$\emptyset_5 = b_5 / a_{51} = 135/100 = 1.35$$

El menor valor es 1.35, por lo que la variable que sale es K_1 . Es la nueva variable no básica.

Aplicamos el método de Gauss a la Gráfico 3.f. (Tabla Simplex 2), tal y como lo hicimos anteriormente, obteniendo la Gráfico 3.g. (tabla simplex 3).

Gráfico 3.g.

Tabla Simplex 3

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básico y No Básicos C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variab. Básico y No Básico	M1	M2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	K_1	K_2		
4000	M2		0	1	-1/4	-	0	0	0	1/4	0	5/4	negativo
5000	M1		1	0	-3/4	1/4	0	0	0	3/4	0	15/4	negativo
0	S_3		0	0	45/4	5/4	1	0	0	-45/4	0	375/4	8.33
0	S_4		0	0	70/4	-	0	1	0	-70/4	0	290/4	4.14
-G	K_2		0	0	25	-5	0	0	-1	-25	1	10	0.4
	Z_j		5000	4000	-	250	0	0	G	4750	-		
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		0	0	4750	-	0	0	-	4750	0	9500	

Fuente: Grafico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 246.

En la Tabla simplex2 (Gráfico 3.f.), vemos que el valor de T_2 , es positivo, por lo que podemos todavía encontrar una mayor utilidad.

Comenzamos a desarrollar las pruebas de Optimalidad y Factibilidad a la Gráfico 3.g. (Tabla simplex 3).

$$Z_1 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41} \ a_{51}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = -0 + 5000 + 0 + 0 + 0 = 5000$$

$$Z_2 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42} \ a_{52}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [M2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = -4G - 15000 + 0 + 0 + 0 - 100G = -15000 - 104G$$

$$Z_3 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43} \ a_{53}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [-1/4 \ -3/4 \ 45/4 \ 70/4 \ 25] = G + 0 + 0 + 0 + 0 = G$$

$$Z_4 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44} \ a_{54}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [-1/4 \ 1/4 \ 5/4 \ -10/4 \ -5] = G + 5000 + 0 + 0 + 30G = 5000 + 31G$$

reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$Z_5 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45} \ a_{55}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$= 0+0+0+0+0 = 0$$

$$Z_6 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46} \ a_{56}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$= 0+0+0+0+0 = 0$$

$$Z_7 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{17} \ a_{27} \ a_{37} \ a_{47} \ a_{57}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]$$

$$= 0+0+0+0+G = G$$

$$Z_8 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{18} \ a_{28} \ a_{38} \ a_{48} \ a_{58}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [1/4 \ 3/4 \ -45/4 \ -70/4 \ -25]$$

$$= 0+0+0+0-G = -G$$

$$Z_9 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_9] \cdot [a_{19} \ a_{29} \ a_{39} \ a_{49} \ a_{59}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ -G] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$= -G + 0+0+0+0 = -G$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 5000 - (5000) = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 4000 - 4000 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - (-4750 - 25G) = 4750 + 25G$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - (250 + 5G) = -250 - 5G$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

$$T_7 = C_7 - Z_7 = 0 - (G) = -G$$

$$T_8 = C_8 - Z_8 = -G - (4750 + 25G) = -4750 - 26G$$

$$T_9 = C_9 - Z_9 = G - (G) = 0$$

El mayor valor positivo es $4750 + 25G$ por lo que la variable que entra es la s_1 . Ahora realizaremos la Prueba de Factibilidad

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{13} = \text{negativo}$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{23} = \text{negativo}$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima. Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos
 Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$\theta_3 = b_3/a_{33} = 375/45 = 8.33$$

$$\theta_4 = b_4/a_{43} = 290/70 = 4.14$$

$$\theta_5 = b_5/a_{53} = 10/25 = 0.4$$

El menor valor es 0.4, por lo que la variable que sale es x_2 . Es la nueva variable no básica.

Aplicamos el método de Gauss a la Gráfico 3.g. (Tabla Simplex 3), tal y como lo hicimos anteriormente, obteniendo la Gráfica 3.h. (Tabla simplex 4).

Gráfico 3.h.

Tabla Simplex 4

Coficiente Básico C_i	Variable Básica	Coficiente Básicos y No Básicos C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	M1	M2	S_1	S_2	S_3	s_4	S_5	K_1	K_2		
4000	M2		0	1	0	0.30	0	0	0	0.01	0	1.35	negativo
5000	M1		1	0	0	0.10	0	0	0	0.03	0	4.05	40.5
0	S_3		0	0	0	3.5	1	0	0	0.45	0	89.25	25.5
0	S_4		0	0	0	1	0	1	0	0.07	0	65.50	65.25
0	S_1		0	0	1	1/5	0	0	0	1/25	-1	0.40	negativo
Z_j			5000	4000	0	700	0	0	0	190	0	190	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			0	0	0	700	0	0	0	190	-G	-190	25650

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 246.

En la Tabla simplex 3 (Gráfica 3.g), vemos que el valor de T3, es positivo, por lo que podemos todavía encontrar una mayor utilidad.

Comenzamos a desarrollar las pruebas de Optimalidad y Factibilidad a la Gráfica 3.h. (Tabla simplex 4).

$$Z_1 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41} \ a_{51}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = 0 + 5000 + 0 + 0 + 0 = 5000$$

$$Z_2 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42} \ a_{52}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = 4000 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4000$$

$$Z_3 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43} \ a_{53}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_4 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44} \ a_{54}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [-0.30 \ 0.10 \ 3.5 \ 1 \ -1/5] = -1200 + 500 + 0 + 0 + 0 = -700$$

$$Z_5 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45} \ a_{55}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_6 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46} \ a_{56}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_7 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{17} \ a_{27} \ a_{37} \ a_{47} \ a_{57}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [-0.01 \ -0.03 \ 0.45 \ 0.7 \ -1/25] = -40 - 150 + 0 + 0 + 0 = -190$$

$$Z_8 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{18} \ a_{28} \ a_{38} \ a_{48} \ a_{58}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_9 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{19} \ a_{29} \ a_{39} \ a_{49} \ a_{59}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0.30 \ 0.10 \ 3.5 \ 1 \ -1/5] = -1200 + 500 + 0 + 0 + 0 = -700$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 5000 - (5000) = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 4000 - 4000 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - (-700) = 700$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima. Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos de Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

$$T_7 = C_7 - Z_7 = 0 - (-190) = 190$$

$$T_8 = C_8 - Z_8 = -G - 0 = -G$$

$$T_9 = C_9 - Z_9 = -G - 700 = -G - 700$$

El mayor valor positivo es 700 por lo que la variable que entra es la s_2 .

Ahora realizaremos la Prueba de Factibilidad

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{14} = \text{negativo}$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{24} = 4.05 / .1 = 40.5$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{34} = 89.25 / 3.5 = 25.5$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{44} = 65.5 / 1 = 65.25$$

$$\emptyset_5 = b_5 / a_{54} = \text{negativo}$$

El menor valor es 25.5, por lo que la variable que sale es s_3 . Es la nueva variable no básica.

En la tabla 12 (Tabla Simplex 4), hemos obtenido el propósito inicial que era el de convertir las variables artificiales K_1 y K_2 , en no básicas. Y cumplimos la primera Etapa I de obtener $M1=4.05$ y $M2=1.35$, ubicadas ya dentro de un vértice de región factible. Ahora continuaremos con el proceso de algoritmo simplex normalmente, hasta hallar el vértice con la máxima utilidad.

Etapa II

"En la Etapa I, se introducen variables artificiales para garantizar un

punto inicial factible, mientras que en la Etapa II se optimiza directamente sobre la región factible" (Bazaraa, Jarvis & Sherali, 2011).

Según Eppen, Gould y Schmidt: "Iniciamos por lo tanto la Etapa II y aplicamos el método de Gauss a la Gráfico 3.h. (Tabla

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = b_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

Etapa II:

Fase posterior del método simplex donde se optimiza la función objetivo una vez que las variables artificiales han sido eliminadas.

Simplex 4)" (1993). Tal y como lo hicimos anteriormente, obteniendo la Gráfico 3.i.(Tabla simplex 5).

Gráfico 3.i.

Tabla Simplex 5

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos		5000	4000	0	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		C_j	C_j												
		MI	M2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	K_1	K_2					
4000	M2	0	1	0	0	0.3/3.5	0	0.2/7	0	-	0.2/7	9	315		
5000	MI	1	0	0	0	0.1/3.5	0	0.3/7	0	0.3/7	1.5	35			
0	S_2	0	0	0	1	1/3.5	0	-0.9/7	0	0.9/7	25.5	negativo			
0	S_4	0	0	0	0	1/3.5	1	4/7	0	4/7	40	8.51			
0	S_1	0	0	1	0	1/7.5	0	12.5/875	-1	12.5/875	5.5	315			
Z_j		5000	4000	0	0	200	0	-100	0	-200					
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		0	0	0	0	-200	0	100	-G	-G+200	43500				

costos indirectos
 reflejan cuánto se reduce la capacidad de los recursos disponibles al intentar producir más de una variable no básica. Este valor es parte del cálculo de los costos de oportunidad
 $Z_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij}; j = 1, 2, 3, \dots, n$

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 246.

Comenzamos a desarrollar las pruebas de Optimalidad y Factibilidad a la Gráfica 3.i.(Tabla simplex5).

$$Z_1 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41} \ a_{51}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = -0 + 5000 + 0 + 0 + 0 = 5000$$

$$Z_2 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{42} \ a_{52}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = 4000 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4000$$

$$Z_3 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{13} \ a_{23} \ a_{33} \ a_{43} \ a_{53}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_4 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44} \ a_{54}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = 0$$

$$Z_5 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{15} \ a_{25} \ a_{35} \ a_{45} \ a_{55}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0.3/3.5 \ -0.1/3.5 \ 1/3.5 \ -1/3.5 \ 1/17.5] = 200$$

$$Z_6 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{16} \ a_{26} \ a_{36} \ a_{46} \ a_{56}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$Z_7 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{17} \ a_{27} \ a_{37} \ a_{47} \ a_{57}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0.2/7 \ 0.3/7 \ -0.9/7 \ -4/7 \ 12.5/875 \ -1] = 100$$

$$Z_8 = [C_2 \ C_1 \ C_4 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{18} \ a_{28} \ a_{38} \ a_{48} \ a_{58}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] = 0$$

$$Z_9 = [C_2 \ C_1 \ C_6 \ C_3] \cdot [a_{19} \ a_{29} \ a_{39} \ a_{49} \ a_{59}] = [4000 \ 5000 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot [-0.2/7 \ 0.3/7 \ 0.9/7 \ 4/7 \ -12.5/875] = -200$$

Ahora desarrollamos el Costo de oportunidad T_j .

$$T_1 = C_1 - Z_1 = 5000 - (5000) = 0$$

$$T_2 = C_2 - Z_2 = 4000 - 4000 = 0$$

$$T_3 = C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$T_4 = C_4 - Z_4 = 0 - (-G) = -G$$

$$T_5 = C_5 - Z_5 = 0 - 200 = -200$$

$$T_6 = C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$$

Prueba de optimalidad:

Evaluación que determina si la solución actual es óptima, Se calculan al restar la "ganancia por unidad" de los costos indirectos (o reducción indirecta). Esto permite evaluar si es beneficioso o no incluir una variable no básica en la solución actual. basada en los costos reducidos Netos=Costos de oportunidad=

$$C_j - Z_j = T_j$$

$$T_7 = C_7 - Z_7 = 0 - (-100) = 100$$

$$T_8 = C_8 - Z_8 = -G + 0 = -G$$

$$T_9 = C_9 - Z_9 = -G - (-200) = -G + 200$$

El mayor valor positivo es 100 por lo que la variable que entra es la s_5 .

Ahora realizaremos la Prueba de Factibilidad

Prueba de factibilidad:

Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

$$\emptyset_i = B_i / a_{ij} \text{ para } a_{ij} > 0$$

$$\emptyset_1 = b_1 / a_{17} = 9 / (0.2/7) = 315$$

$$\emptyset_2 = b_2 / a_{27} = 1.5 / (0.3/7) = 35$$

$$\emptyset_3 = b_3 / a_{37} = \text{negativo}$$

$$\emptyset_4 = b_4 / a_{47} = 40 / 4.7 = 8.51$$

$$\emptyset_5 = b_5 / a_{57} = 4.5 / (12.5/875) = 315$$

El menor valor es $40/4.7$, por lo que la variable que sale es s_5 . Es la nueva variable no básica.

Aplicamos el método de Gauss a la Gráfico 3.i. (Tabla Simplex 5), tal y como lo hicimos anteriormente, obteniendo la Gráfico 3.j. (Tabla simplex 6).

Gráfico 3.j.

Tabla Simplex 6

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		VARIABLES BÁSICAS Y NO BÁSICAS	M1	M2	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	K ₁	K ₂		
4000	M2		0	1	0	0	0.1	-0.05	0	0	0	7	
5000	M1		1	0	0	0	-0.05	0.75	0	0	0	4.5	
0	S ₂		0	0	0	1	0.35	-0.25	0	0	0	16.5	
0	S ₅		0	0	0	0	-0.5	1.75	1	0	-1	70	
0	S ₁		0	0	1	0	0.05	0.25	0	-1	0	6.5	
Z_j			5000	4000	0	0	150	175	0	0	0	50500	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			0	0	0	0	-150	-175	0	-G	-G		

Fuente: Gráfico según Eppen, Gould y Schmidt. 1993, p. 246.

Al no tener un costo positivo. Indica que ya no podremos tener una mayor ganancia. Por lo que este es el valor óptimo. Y aquí paramos el algoritmo simplex.

El resultado nos da una utilidad óptima de \$50500, con una producción de: 7 molinos de bola M2 y de 4.5 Molinos Chilenos M1, mensualmente.

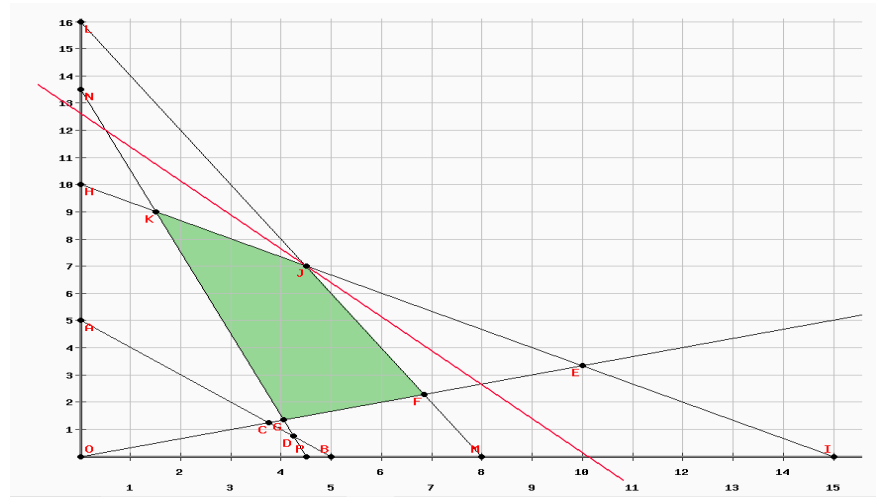
Es el mismo resultado que obtuvimos en la Solución Gráfica desarrollada en el tema 2.

En esta solución gráfica, se detalla las dos Etapas para hallar la solución óptima con variables artificiales. En la Etapa I se desarrolla un proceso en el que el uso de una penalización por un valor G, garantiza que mientras nos movamos fuera de la región factible, el resultado de la función objetivo siempre estará marcado por este valor de G. Se observa que cuando termina esta Etapa I y pasa a la Etapa II, ingresamos a un vértice

de la región factible y desaparecen los valores penalizados con G. Enseguida procedemos normalmente en esta región factible a recorrer vértice tras vértice, hasta encontrar el valor óptimo. Tal y como se indica en el Gráfico 3.k.

Gráfico 3.k.

Solución optima



Fuente: *Gráfico elaborado usando GEOGEBRA*

Los valores obtenidos en la región no factible son dados por la Etapa I. Como se observa en la tabla 36.

Tabla 36. Valor del recorrido Etapa I y Etapa II.

PUNTO	Coordenada x(M1)	Coordenada y(M1)	Valor de la función obj(Z)
O	0	0	0-140G
C	3,75	1,25	23750-10G
G	4,05	1,35	25650
K	1,5	9,0	43500
J	4,5	7,0	50500

Fuente: *Tabla elaboración propia*

De acuerdo con (Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz, 2006) las siguientes soluciones se pueden dar:

Solución óptima: cuando se cumple la condición de parada y no hay variables artificiales en la base con valor

positivo (los valores se indican en la columna Coeficiente Básico C_i), se ha conseguido la optimización. El valor B_{\emptyset} actual es la solución óptima del problema, cumpliéndose para las variables que se encuentran en la base. Si se trata de un problema de minimización, el valor óptimo obtenido se multiplicará por "1".

Infinitas soluciones: cumplida la condición de parada, si alguna variable de decisión no básica tiene un valor 0 en la fila T_j , significa que existe otra solución que aporta el mismo valor óptimo para la función objetivo. En este caso el problema admite infinitas soluciones, estando todas ellas comprendidas dentro del segmento (o porción del plano, región del espacio, etc. dependiendo del número de variables del problema) definido por $A \cdot X_1 + B \cdot X_2 = B_{\emptyset}$. Mediante una nueva iteración y haciendo que la variable de decisión B_{\emptyset} entre en la base obteniendo otra solución diferente para el mismo valor óptimo.

Solución ilimitada (no acotada): si toda la columna de la variable que entra a base tiene todos sus elementos negativos o nulos se trata de problema no acotado, es decir, que tiene solución ilimitada. No hay valor óptimo concreto para la función objetivo, sino que a medida que se aumenta el valor de las variables también se incrementa el valor T_j sin violar ninguna restricción.

No existe solución: cuando ningún punto satisface todas las restricciones del problema se produce la infactibilidad no existiendo ninguna solución posible para él. En este caso, una vez terminadas todas las iteraciones del algoritmo, existen en la base variables artificiales cuyo valor es superior a cero.

Empate de variable entrante: cuando se produce un empate en la condición de decisión de la variable entrante se puede optar por cualquiera de ellas sin que esto afecte a la solución final. Por contra si influye en el número de iteraciones necesarias para obtener dicha solución. Se aconseja optar a favor de las variables básicas ya que ellas son las que formarán parte de la solución óptima.

Empate de variable saliente: se puede nuevamente optar por cualquiera de ellas. Sin embargo, a fin de no alargar

el problema y evitar la entrada en un bucle infinito (caso degenerado), se discrimina a favor de las variables de decisión haciendo que permanezcan en la base. En el caso de estar en la primera Etapa del método de las Dos Etapas, se optará por sacar de la base las variables artificiales.

Curiosidad en la Etapa 1: al finalizar la Etapa 1, si el problema original tiene solución, todas las variables artificiales en la fila indicadora deben tener el valor "1".

¿El elemento pivote puede ser nulo?: Para Daniel Izquierdo Granja & Juan José Ruiz Ruiz: "No, el elemento pivote siempre será estrictamente positivo ya que únicamente se realizan los cocientes entre valores no negativos y mayores que cero (ante un problema de maximización" (2006).

4.6.-CONCLUSIONES

El análisis realizado demuestra que se han cumplido los objetivos planteados en relación con el método Simplex y su aplicación en programación lineal. Se comprendió el paso de la solución gráfica a la solución algebraica, destacando cómo el método Simplex permite evaluar soluciones factibles básicas en los vértices de la región factible mediante un procedimiento algebraico iterativo. Asimismo, se logró desarrollar la Tabla Simplex del sistema canónico de ecuaciones, organizando de manera estructurada las restricciones y variables del modelo matemático para facilitar el proceso de optimización.

Durante cada iteración, se realizó la prueba de optimalidad y factibilidad, avanzando hacia la solución óptima del problema. Además, se entendió el papel de las variables artificiales en la Etapa I, las cuales garantizan un punto inicial dentro de una región factible, y cómo en la Etapa II se optimiza directamente sobre la región factible original, asegurando la obtención del valor óptimo. Este enfoque iterativo y estructurado confirma la robustez y eficacia del método Simplex para resolver problemas de optimización.

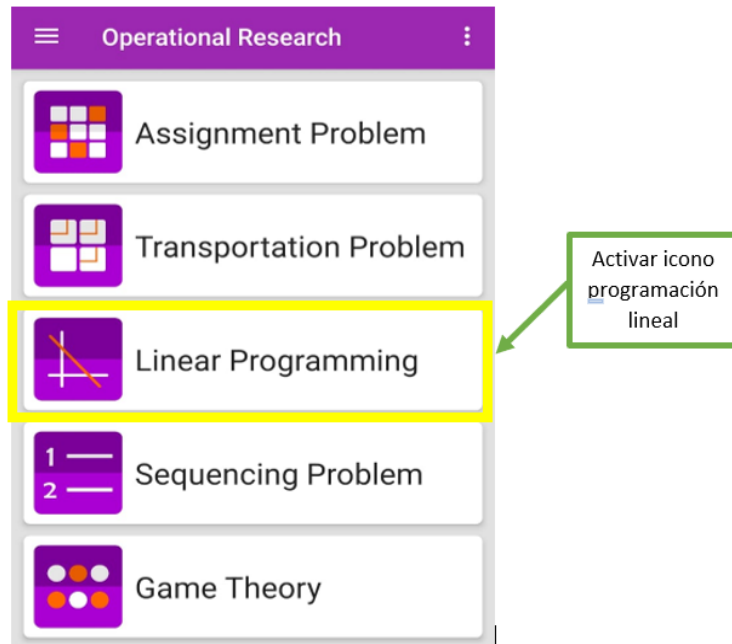
Por último, se destacó la utilidad de herramientas tecnológicas como "Operational Research", una aplicación gratuita disponible para dispositivos Android, que facilita el aprendizaje y la aplicación del método Simplex de forma didáctica y accesible. En conclusión, se logró cumplir con todos los

objetivos propuestos, proporcionando un entendimiento integral del método y su aplicación práctica.

4.7.-APÉNDICE Operational Research

El siguiente es el procedimiento del uso de Operational Research:

1.-Activar el ícono correspondiente a Programación Lineal.



2.-Ingresar el modelo matemático a ser resuelto.

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

M1y M2: 2 variables

5 ecuaciones de restricción

Z(Max) = 5000M1 + 4000M2 = UTILIDAD

- M1 + M2 ≥ 5**
- M1 - 3M2 ≤ 0**
- 10M1 + 15M2 ≤ 150**
- 20M1 + 10M2 ≤ 160**
- 30M1 + 10M2 ≥ 135**

	5000	4000	= Z
1	1	1	≥ 5
2	1	-3	≤ 0
3	10	15	≤ 150
4	20	10	≤ 160
5	30	10	≥ 135

(Click on <= to change constrain type)

CALCULATE

VIEW ALL STEPS

3. Activar solución paso por paso

Linear Program...

Type: Maximize Minimize

Variables: 2

Constrains: 5

	5000	4000	= Z
1	1	1	≥ 5
2	1	-3	≤ 0
3	10	15	≤ 150
4	20	10	≤ 160
5	30	10	≥ 135

(Click on <= to change constrain type)

CALCULATE

VIEW ALL STEPS

Activar icono Solución paso por paso

4.-Revisar la solución paso a paso. Primero la Fase 1-con sus variables artificiales A1 y A5. Se describen las variables de holgura S1 S2 S3 S4 S5, se calculan los costos indirectos z, y los

costos de oportunidad $c-z$, con el cual se hace el análisis de la prueba de optimalidad, y la columna donde se realiza la prueba de factibilidad, la cual arroja la celda pivote, marcada como una celda en color magenta. Y la celda marcada con Z, dando el valor de la función objetivo en ese vértice.

C	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-M	-M		
Var	X1	X2	S1	S2	S3	S4	S5	A1	A5			
M	A1	1	1	-1	0	0	0	0	1	0	5	5
0	S2	1	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	S3	10	15	0	0	1	0	0	0	0	150	15
0	S4	20	10	0	0	0	1	0	0	0	160	8
-M	A5	30	10	0	0	0	0	-1	0	1	135	9/2
Z	-31M	-11M	M	0	0	0	M	-M	-M		Z =	-140M
-Z	5000+31M	4000+11M	M	0	0	0	M	0	0			

key column :- 3
key row :- 4
key element :- 1

5.- Siguiete interacción, como se está maximizando, en la prueba de optimalidad. Todavía hay variables básicas artificiales, por lo tanto, permanece en la Etapa 1.

C	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-M	-M		
Var	X1	X2	S1	S2	S3	S4	S5	A1	A5			
-M	A1	0	4	-1	-1	0	0	0	1	0	5	5/4
5000	X1	1	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	S3	0	45	0	-10	1	0	0	0	0	150	10/3
0	S4	0	70	0	-20	0	1	0	0	0	160	16/7
-M	A5	0	100	0	-30	0	0	-1	0	1	135	27/20
Z	5000	15000-1/4M	M	5000+31M	M	0	0	M	-M	-M	Z =	-140M
C-Z	0	19000+1/4M	-M	5000-31M	M	0	0	-M	0	0		

key column :- 4
key row :- 3
key element :- 4

6.- Siguiete iteración, todavía la variable artificial es básica.

Linear Programming

Iteration:

C	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-M	-M		
Var	X1	X2	S1	S2	S3	S4	S5	A1	A5			
4000	X2	0	1	-1/4	-1/4	0	0	0	1/4	0	5/4	-5
5000	X1	1	0	-3/4	1/4	0	0	0	3/4	0	15/4	-5
0	S3	0	0	45/4	5/4	1	0	0	-45/4	0	375/4	25/3
0	S4	0	0	35/2	-5/2	0	1	0	-35/2	0	145/2	29/7
-M	A5	0	0	25	-5	0	0	-1	-25	1	10	2/5
Z	5000	4000	$\frac{4750+25}{M}$	$\frac{250+5M}{M}$	0	0	0	M	$\frac{4750+25}{M}$	-M	Z =	$\frac{23750+10M}{M}$
C-Z	0	0	$\frac{4750+25}{M}$	$\frac{250+5M}{M}$	0	0	-M	$\frac{4750+25}{M}$	0	0		

key column :- 5
 key row :- 7
 key element :- 25

Iteration:

7.-La Etapa 1 terminó, ya no hay variables artificiales básicas, se comienza con la fase 2, en la que se halla la solución normalmente, hasta que la prueba de factibilidad de solo valores negativos. Ahí terminan todas las iteraciones.

Linear Programming

Iteration:

C	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-M	-M		
Var	X1	X2	S1	S2	S3	S4	S5	A1	A5			
4000	X2	0	1	0	-3/10	0	0	-1/100	0	1/100	27/20	-9/2
5000	X1	1	0	0	1/10	0	0	-3/100	0	3/100	81/20	81/2
0	S3	0	0	0	7/2	1	0	9/20	0	-9/20	357/4	51/2
0	S4	0	0	0	1	0	1	7/10	0	-7/10	131/2	131/2
0	S1	0	0	1	-1/5	0	0	-1/25	-1	1/25	2/5	-2
Z	5000	4000	0	-700	0	0	0	-190	0	190	Z =	25650
C-Z	0	0	0	700	0	0	0	190	-M	-190-M		

key column :- 6
 key row :- 5
 key element :- 7/2

Iteration:

8.-La prueba termina con todos los valores de los costos de oportunidad c-z, negativos, o cero.

Linear Programming

key element :- 7/2

Iteration:

	C	5000	4000	0	0	0	0	0	-M	-M		
Var	X1	X2	S1	S2	S3	S4	S5	A1	A5			
4000	X2	0	1	0	0	3/35	0	1/35	0	-1/35	9	315
5000	X1	1	0	0	0	-1/35	0	-3/70	0	3/70	3/2	-35
0	S2	0	0	0	1	2/7	0	9/70	0	-9/70	51/2	595/3
0	S4	0	0	0	0	-2/7	1	4/7	0	-4/7	40	70
0	S1	0	0	1	0	2/35	0	-1/70	-1	1/70	11/2	-385
Z	5000	4000	0	0	200	0	-100	0	100			Z = 43500
C-Z	0	0	0	0	-200	0	100	-M	-M			

key column :- 9
key row :- 6
key element :- 4/7

Iteration:

	C	5000	4000	0	0	0	0	0	-M	-M		
Var	X1	X2	S1	S2	S3	S4	S5	A1	A5			
4000	X2	0	1	0	0	1/10	-1/20	0	0	0	7	0
5000	X1	1	0	0	0	-1/20	3/40	0	0	0	9/2	0
0	S2	0	0	0	1	7/20	-9/40	0	0	0	33/2	0
0	S5	0	0	0	0	-1/2	7/4	1	0	-1	70	0
0	S1	0	0	1	0	1/20	1/40	0	-1	0	13/2	0
Z	5000	4000	0	0	150	175	0	0	0	0		Z = 50500
C-Z	0	0	0	0	-150	-175	0	-M	-M			

Solution:
X1 = 9/2 (4.5)
X2 = 7 (7.0)
Z = 50500.0

Variable básica artificial

9.- El algoritmo simplex es una herramienta fundamental en la programación lineal para optimizar funciones objetivo-sujetas a restricciones. En este caso, el seguimiento detallado de las tablas y su comparación con los valores obtenidos previamente permite comprender mejor cómo funciona el método. Sin embargo, cabe destacar que el proceso de Gauss-Jordan, necesario para realizar el cambio de vértice, no está incluido en este proceso.

4.8.-CUESTIONARIO

4.8.1-VERDADERO-FALSO

1. Cualquier vértice de la región factible, corresponde a una solución básica. **(V) (F)**
2. Habrá más de un grupo de variables básicas en un vértice de una región factible. **(V) (F)**
3. En la tabla Simplex cada fila representa una restricción. **(V) (F)**
4. En la tabla simplex, en un modelo de maximización el renglón Z_j da la pérdida de utilidad. **(V) (F)**
5. Una de las diferencias entre un problema de maximización y uno de minimización es la aplicación del criterio de factibilidad. **(V) (F)**
6. Tendremos una degeneración en el sistema de ecuaciones de PL si se dan resultados iguales en los índices de la regla de entrada. **(V) (F)**
7. El transformar las desigualdades en igualdades agregando variables de holgura corresponde al primer paso del método simplex. **(V) (F)**
8. Al escoger la variable que da el mayor valor al dividir el B_i entre los coeficientes A_{ij} de la columna que ingresa encontramos la variable que sale. **(V) (F)**
9. La celda que resulta del cruce de la columna que entra y la fila que sale corresponde al elemento pivote. **(V) (F)**
10. Si el modelo involucra restricciones de \leq se utilizarán variables artificiales K_j . **(V) (F)**
11. Si el modelo son mecanismos de cálculo o artilugio matemático las variables de holgura. **(V) (F)**
12. Hallar la solución de un conjunto de ecuaciones no es otra cosa que el método simplex. **(V) (F)**

4.7.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

1. De las ecuaciones iniciales se observa una solución.
 - a. Se señala un vértice extremo de la región factible.
 - b. Se indica un grupo de ecuaciones transformadas.
 - c. Se muestra una solución básica del sistema de ecuaciones en la estructura estándar.
 - d. Todo lo anterior.
2. El costo de oportunidad se halla como el resultado de hallar:
 - a. El valor del Z óptimo.
 - b. Costos de oportunidad.
 - c. (Vacío).
 - d. Todo lo anterior.
3. La prueba de factibilidad corresponde a hallar:
 - a. El máximo valor que puede tener la variable que entra sin salir de la región factible.
 - b. Un vértice extremo de la región factible.
 - c. Un grupo de ecuaciones transformadas.
 - d. Una solución básica del sistema de ecuaciones en la estructura estándar.
 - e. Todo lo anterior.

4.7.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplicando el método simplex

17.- Un trapiche produce melaza y panela en unidades de 50 kilos. La producción de melaza más 8 unidades es mayor o igual que el doble de la producción de panela. También se da que la producción de 36 unidades es igual o mayor que el triple de la producción de panela mas el doble de producción de melaza. Al salir al mercado cada unidad de melaza se comercializa en \$16 dólares y cada unidad de panela en \$4 dólares. Si se

quiere maximizar ganancia se debe hallar el número de unidades a producir de panela y de melaza respectivamente.

18.- Un Taller de ropa produce ternos y vestidos de dama, para producir un terno se requieren 2 m² de tela de paño, y 1 m² de tela de algodón, y para sacar un vestido se necesitan 2m² de paño y 2 m² de algodón, El taller cuenta con 160 ms de tela de paño y 240 m² de tela de algodón, Si los ternos se venden en \$100 dólares y los vestidos en \$200 dólares, ¿Cual debe ser la producción de ternos y vestidos para maximizar el beneficio?

19.- Se desea mezclar dos productos X1 y X2, para desarrollar una dieta para pollos, cuyo contenido mínimo de vitaminas debe ser de 4 mg de vitamina B1, 6 mg de vitamina B2, 60 mg de vitamina B3, y 4 mg de vitamina B5. El precio por kilo de X1 es de \$0.20 dólares y el de X2 es de \$0.30 dólares. El valor vitamínico de X1 y X2 se da en la siguiente tabla:

	B1	B2	B3	B5
X1	2	2	40	4
X2	2	6	15	1

Como se debería realizar esta mezcla, para minimizar costos.

20.- FERTIAGRO produce dos fertilizantes usando como bases dos mezclas con la composición de N, P, Ca, Ceniza indicada en la siguiente tabla:

	N(%)	P(%)	Ca(%)	CENIZA(%)
MEZCLA 1	5	5	10	80
MEZCLA 2	5	10	5	80

FERTIAGRO dispone de las siguientes cantidades de N, P, Ca y Ceniza a los siguientes precios:

	N(%)	P(%)	Ca(%)	CENIZA(%)
Cantidad (Ton)	1100	1800	2000	ilimitada
Precio(\$/Ton)	\$2000	\$800	\$1600	\$100

FERTIAGRO, saca al mercado la Mezcla 1 a un precio de \$715 la tonelada, y la mezcla 2 a \$690 la tonelada, ¿Cómo debe realizar las mezclas FERTIAGRO, para obtener la máxima ganancia?

21.- Productos DELAURY necesita un préstamo de \$1000000 de dólares para modernizar maquinaria, en el mercado de capitales a encontrado dos fuentes de préstamo, con las siguientes condiciones:

	PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
FUENTE 1(\$)	700000	200000	4800000
FUENTE 2(\$)	250000	250000	1250000

El interés de oportunidad de DELAURY es de 0.22.

Los socios de DELAURY imponen las siguientes condiciones de pago:

	PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
DELAURY(Máximo pago)	400000	2000000	900000

Buscar la manera de optimizar el préstamo a las dos fuentes sin exceder las restricciones.

22.- Jorge Castro tiene para invertir \$1000000. Quiere realizar inversiones en dos tipos de bonos B1 y B2. Los B1 tienen más riesgo, pero dan 15% de beneficio, y las B2 son menos arriesgadas, pero solo dan el 8%. Jorge decide entonces invertir máximo \$600000 en B1, y como mínimo \$400000 en B2, también desea que lo realizado en B1 sea por lo menos lo mismo que la inversión en B2? Cómo debería invertir para que su ganancia se maximice.

4.9.-GLOSARIO

Aquí tienes el glosario extendido con el formato solicitado: sin numeración, sin negritas en las descripciones y resaltando únicamente los términos principales.

GLOSARIO DE TÉRMINOS - MÉTODO SIMPLEX Y OPTIMIZACIÓN

Celda pivote Intersección de la columna y fila pivote en la tabla simplex, utilizada para realizar la iteración.

Coefficiente de la función objetivo Valor asociado a cada variable en la función objetivo que indica su contribución a la utilidad o costo total.

Columna pivote Columna seleccionada en la tabla simplex que representa la variable que entra al conjunto de variables básicas.

Condición de no degeneración Requisito de que el número de variables de decisión sea igual al número de ecuaciones de restricción para garantizar que el sistema de ecuaciones sea resoluble.

Condición de parada Situación en la que se detiene el algoritmo simplex porque se ha alcanzado la solución óptima o se ha determinado que no existe solución.

Costo reducido neto ($[C_j - Z_j]$) Diferencia entre el coeficiente de la función objetivo y la contribución de las variables básicas, utilizada para determinar la variable que entra al conjunto básico.

Costos de oportunidad Valores que representan la ganancia o pérdida al asignar recursos a una actividad en lugar de otra.

Costos marginales Incremento en el costo total asociado con la producción de una unidad adicional de un producto.

Cuadrante no negativo Sector noreste del sistema coordinado bidimensional en el que ambas variables tienen valores no negativos.

Decisión factible Decisión que satisface todas las restricciones de un modelo, incluyendo las condiciones de no negatividad. Factible significa válida o permisible.

Decisión óptima Conjunto de valores factibles para una decisión que optimizan la función objetivo en un modelo de optimización.

Degeneración Situación en la que una variable básica toma el valor cero en la solución óptima.

Elemento pivote Valor de la tabla simplex que se utiliza para realizar las operaciones de eliminación gaussiana y transformar el sistema de ecuaciones.

Empate de variable entrante Situación en la que varias variables cumplen con la condición para entrar a la base; se recomienda seleccionar las variables básicas para evitar iteraciones adicionales.

Empate de variable saliente Situación en la que varias variables cumplen con la condición para salir de la base; se recomienda priorizar las variables de decisión para evitar ciclos infinitos.

Etapas I Fase inicial del método de las dos etapas donde se busca eliminar las variables artificiales y encontrar una solución inicial dentro de la región factible.

Etapas II Fase posterior del método simplex donde se optimiza la función objetivo una vez que las variables artificiales han sido eliminadas.

Excedente Cantidad por la cual el lado izquierdo de una restricción \geq , cuando es evaluada en condiciones de optimalidad, excede al lado derecho. El excedente siempre es no negativo.

Factibilidad Prueba que asegura que las soluciones propuestas se encuentren dentro de la región factible, es decir, que cumplan con todas las restricciones del problema.

Fila pivote Fila seleccionada en la tabla simplex que representa la variable que sale del conjunto de variables básicas.

Función lineal Función en la cual cada una de las variables aparece en un término individual. No hay potencias que no sean 1 y no existen expresiones logarítmicas, exponenciales o trigonométricas.

Función objetivo Expresión matemática que se busca maximizar o minimizar en un problema de programación lineal.

Gauss-Jordán Método algebraico utilizado para transformar la tabla simplex a su forma estándar después de cada iteración.

Holgura Cantidad por la cual el valor del lado izquierdo de una restricción \leq , cuando es evaluado en el punto óptimo, es menor que el valor del lado derecho. La holgura siempre es no negativa.

Infinitas soluciones Caso en el que existen múltiples soluciones óptimas para el problema, todas ellas equivalentes en términos de valor de la función objetivo.

Iteración Proceso repetitivo en el método simplex para desplazarse entre los vértices de la región factible hasta encontrar la solución óptima.

Medida de desempeño (función objetivo) Variable endógena que permite determinar hasta qué punto ha alcanzado sus metas un modelo.

Método de resolución gráfica Análisis geométrico bidimensional de modelos PL con dos variables de decisión.

Método gráfico Procedimiento visual para resolver problemas de programación lineal con dos variables de decisión, evaluando los vértices de la región factible.

Método simplex Algoritmo iterativo para resolver problemas de programación lineal con más de dos variables de decisión, basado en transformaciones sucesivas del sistema de ecuaciones.

Modelo analítico de PL Representación algebraica de un problema de PL.

Modelo de optimización con restricciones Modelo cuyo objetivo es encontrar valores para las variables de decisión que optimicen una función objetivo sujeta a restricciones.

No existe solución Caso en el que no es posible satisfacer todas las restricciones del problema, resultando en un sistema infactible.

Optimalidad Prueba que permite determinar si es posible continuar maximizando la utilidad o minimizando los costos al desplazarse al siguiente vértice en el espacio de soluciones factibles.

Optimizar Maximizar o minimizar una función objetivo.

Parámetros de optimización Valores que determinan las condiciones bajo las cuales se optimiza la función objetivo, como los costos de oportunidad y las restricciones.

Penalización Proceso de asignar un coeficiente muy grande (M) a las variables artificiales en la función objetivo para garantizar que sean eliminadas del sistema en las iteraciones.

Precios sombra / Precios duales Valores que indican cuánto aumentaría la utilidad al incrementar en una unidad la disponibilidad de un recurso.

Prueba de factibilidad Verificación de que las soluciones cumplen con las restricciones del problema, asegurando que sean factibles.

Prueba de optimalidad Evaluación que determina si la solución actual es óptima, basada en los costos reducidos netos $[C_j - Z_j]$.

Problema sin solución Caso en el que una variable artificial permanece en la solución óptima, indicando que el problema no tiene solución factible.

Reducción indirecta Representa la disminución en la capacidad de los recursos al seguir produciendo.

Región factible Conjunto de combinaciones de valores de las variables de decisión que satisfacen las condiciones de no negatividad y todas las restricciones simultáneamente.

Restricción Desigualdad matemática o igualdad que deberá ser satisfecha por las variables del modelo.

Restricción activa u obligatoria Restricción para la cual la evaluación de la función de restricción es igual al valor de su correspondiente lado derecho.

Restricción de desigualdad Restricción por la cual se requiere que alguna función de las variables de decisión de un modelo sea \geq (mayor o igual) o \leq (menor o igual) que una constante.

Restricción de igualdad Restricción que requiere que alguna función de las variables de decisión de un modelo sea igual a una constante.

Sistema de ecuaciones transformable Sistema de ecuaciones que cambia progresivamente en cada iteración del método simplex sin alterar su estructura.

Solución algebraica Procedimiento analítico, como el método simplex, que permite resolver problemas de programación lineal con más de dos variables.

Solución factible La que satisface las condiciones de no negatividad y todas las restricciones. Gráficamente, están en correspondencia con los puntos de la región factible.

Solución gráfica Método utilizado para resolver problemas de programación lineal con dos variables, identificando la solución óptima en uno de los vértices de la región factible.

Solución ilimitada Situación en la que las iteraciones no se detienen, indicando que el problema tiene soluciones infinitas.

Soluciones múltiples Caso en el que la tabla simplex presenta una variable no básica con $[C_j - Z_j = 0]$, indicando la existencia de más de una solución óptima.

Solver y LINGO Programas computacionales utilizados para resolver problemas de optimización mediante el algoritmo simplex.

Tabla de datos Tabulación sistemática de los valores correspondientes a una medida de desempeño y/o variable de consecuencias.

Tabla Simplex Representación tabular utilizada en el método simplex para realizar iteraciones y evaluar soluciones factibles básicas.

Tasa de sustitución Relación entre la disponibilidad de recursos y la variable que entra al conjunto básico, utilizada para calcular el parámetro de factibilidad.

Valor objetivo óptimo (VO) Valor óptimo de la función objetivo; es decir, el valor que asume la función objetivo cuando es evaluada en la solución óptima.

Variable de decisión Variable exógena cuyo valor está bajo el control de la persona a cargo de tomar las decisiones y es determinado por ella.

Variable de excedente Variable restada a una restricción para convertir una desigualdad en una igualdad, representando recursos excedentes.

Variable de holgura Variable añadida a una restricción para convertir una desigualdad en una igualdad, representando recursos sobrantes.

Variabes artificiales Variables introducidas en la Etapa I del método simplex para garantizar un punto inicial dentro de la región factible.

Variabes básicas Variables que tienen un valor distinto de cero en una solución básica.

Variabes no básicas Variables que tienen un valor igual a cero en una solución básica.

Vértice Punto extremo de la región factible donde se evalúan las posibles soluciones en el método gráfico o simplex.

Z óptimo Valor óptimo de la función objetivo alcanzado al finalizar el método simplex.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., y Orlin, J. B. (2009). Network flows: Theory, algorithms, and applications. Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., y Sherali, H. D. (2011). Linear programming and network flows (4a ed.). Wiley.

Bertsimas, D., y Tsitsiklis, J. N. (2004). Introduction to linear optimization. Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). Programas de computación para formular alimentos. Avicultura Profesional.

- Cohen, M. A., y Murdock, J. (2012). *Operations research: A practical introduction*. Wiley.
- Daniel Izquierdo Granja y Juan José Ruiz Ruiz. (2006). PHPSIMPLEX (Versión 0.81) [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm
- Dantzig, G. B., y Thapa, M. (2003). *Linear programming: Foundations and extensions (2a ed.)*. Springer.
- Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. P. (1993). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. Prentice Hall.
- Gallagher, H., y Watson, J. (1990). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración*. McGraw-Hill Interamericana.
- Gass, S. I. (1990). *An illustrated guide to linear programming*. Dover Publications.
- González Ariza, Á. L., y García Llinás, G. A. (2015). *Manual práctico de investigación de operaciones I (4a ed.)*. Editorial Universidad del Norte.
- Hillier, F. S., y Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research (10a ed.)*. McGraw-Hill.
- Kall, P., y Mayer, S. (2005). *Stochastic optimization: Methods and applications*. Springer.
- Luenberger, D. G., y Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming (3a ed.)*. Springer.
- Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa (5a ed.)*. Prentice Hall.

- Murty, K. G., y Katta, S. (1983). Linear programming. Wiley.
- Peñafiel, L. (1976). Programación lineal. Trillas.
- Prawda Witenberg, J. (1977). Métodos y modelos de investigación de operaciones: Vol. 1. Limusa.
- Rardin, R. L. (2016). Optimization in operations research (2a ed.). Pearson.
- Rincón Abril, L. A. (2001). Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas. Universidad Nacional de Colombia.
- Sasieni, M. W., y Cohen, R. (2007). Operations research: A practical guide to the use of OR techniques. Wiley.
- Shamblin, J., y Stevens, G. T. (1988). Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental. McGraw-Hill Interamericana.
- Taha, H. A. (2017). Operations research: An introduction (10a ed.). Pearson.
- Varela, J. E. (1991). Introducción a la investigación de operaciones. Fondo Editorial Interamericana.
- Winston, W. L. (2004). Operations research: Applications and algorithms (4a ed.). Brooks/Cole.



CAPITULO 5. SOFTWARE PROGRAMACIÓN LINEAL

TEMA 5. SOLUCION PROGRAMACIÓN LINEAL CON SOFTWARE SOLVER- LINGO



OPTIMIZACIÓN DE RUTAS Y LOGÍSTICA

Problema: Planificación de rutas de transporte para minimizar costos de envío, tiempos de entrega o distancias recorridas.

COMPAÑÍAS:

Amazon: Utiliza programación lineal para optimizar la entrega de paquetes en su red de transporte global, maximizando la eficiencia de sus centros de distribución.

DHL: Aplica modelos de programación lineal para planificar rutas de transporte aéreo y terrestre, reduciendo costos operativos y emisiones de carbono.

SOFTWARE UTILIZADO

IBM ILOG CPLEX Optimization Studio

Sitio **web:**
<https://www.ibm.com>

Descripción: Es uno de los softwares más populares para resolver problemas de programación lineal, programación entera mixta (MILP), programación cuadrática y otros problemas de optimización.

5.1.-OBJETIVOS

-Ingresar información de los modelos de programación lineal, a los paquetes informáticos, SOLVER y LINGO.

-Interpretar las soluciones entregadas por los paquetes informáticos SOLVER y LINGO.

5.2.-INTRODUCCIÓN

El modelo matemático, desarrollado para el problema de programación lineal, ha sido solucionado gráficamente, y después se ha dado el salto hacia la solución algebraica, que permitió la creación del algoritmo simplex, este proceso gracias a los avances de los sistemas computacionales ha promovido la creación de un mercado muy grande, de paquetes informáticos. La solución dada con Operational Research, tiene características didácticas, lo máximo que puede resolver son sistemas de 10 variables de decisión y 10 ecuaciones de restricción. La solución con SOLVER de Excel puede manejar 200 variables de decisión y 200 ecuaciones de restricción. Pero para soluciones que manejen bases de datos nacionales e internacionales de cientos de miles de variables, el mercado es disputado fuertemente por desarrolladores privados y con sistemas pagados a la orden del cliente.

Dos de los paquetes a los cuales tienen acceso los docentes y alumnos con mayor facilidad y economía, son SOLVER de Excel y LINGO. Los dos pueden ser descargados fácilmente por los que poseen Microsoft Office, y LINGO se puede descargar una versión estudiantil en la página web de LINGO.ORG.

Se aprenderá a ingresar la información a cada uno de los paquetes referenciados, y se verificaran los resultados con los otros procedimientos ya realizados con los ejercicios prototípicos.

5.3.-DESARROLLO

5.3.1.- SOLVER-EXCEL

REGLAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE PL EN HOJAS DE CÁLCULO

De acuerdo con J.H. Moore & L.R. Weatherford: "Un resultado importante del desarrollo de un modelo en hojas de cálculo de Excel es que todos los coeficientes fundamentales del modelo están contenidos en celdas que pueden reubicarse de forma sencilla sin tener que editar ninguna de las fórmulas" (2000).

La fórmula de la función objetivo aparece en una celda de la misma fila. También, la asociación de las variables de decisión y las restricciones nos deja usar el comando copiar para repetir fórmulas a través de las celdas, como en el caso de los totales de las funciones de restricción del Lado Izquierdo (LI). Cada variable de decisión se destina a una columna por separado y cada restricción a una fila individual de la hoja de cálculo.

En las filas de las restricciones, las celdas del lado derecho (LD) deben ser constantes o fórmulas en las que no estén las variables de decisión.

La distribución resultante de la aplicación de estas reglas se ilustra en la figura 1.



GESTIÓN DE INVENTARIOS

Problema: Determinar la cantidad óptima de productos que deben mantenerse en inventario para satisfacer la demanda mientras se minimizan los costos de almacenamiento.

Compañías:

Walmart: Utiliza programación lineal para gestionar inventarios en sus tiendas y centros de distribución, asegurando que los productos estén disponibles cuando se necesitan sin incurrir en costos excesivos.

Procter & Gamble: Implementa modelos de PL para optimizar la producción y el inventario de bienes de consumo en función de la demanda proyectada.

SOFTWARE UTILIZADO

LINDO, Excel Solver, Python (PuLP, Pyomo)

Descripción: Herramienta accesible y ampliamente disponible que incluye un complemento llamado "Solver", útil para resolver problemas básicos de programación lineal y entera.

Usos:

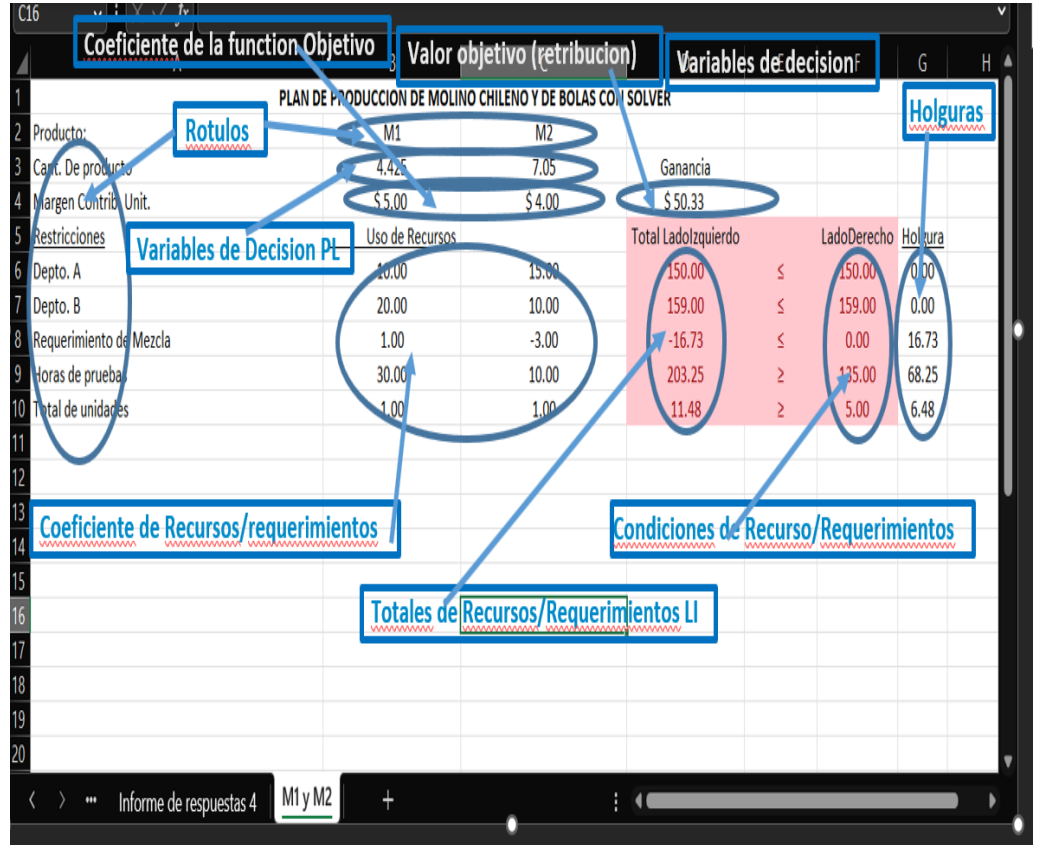
Pequeñas y medianas empresas lo usan para problemas simples de inventario, asignación de recursos y planificación.

Empresas grandes también lo usan para análisis preliminares o problemas de menor escala.

Grafico 25.

Distribución en hoja de calculo EXCEL recomendada del modelo en

PL de MOLINO DE BOLAS



Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Según J.H. Moore & L.R. Weatherford: procederemos a explicar el significado de cada uno de los textos de la figura 25 (2000).

Rótulos: Se usan como en una tabla de datos para facilitar la lectura.

Aclarando lo ingresado en otras entradas de la hoja de cálculo electrónica.

Coeficientes y variables de decisión. Estos números en las celdas

representan los valores numéricos de los coeficientes que son datos,

denominados también valores de decisión.

En el apéndice:

se adjunta un manual para la instalación de SOLVER.

**PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN**

Problema: Determinar qué productos fabricar, en qué cantidades y en qué plantas, maximizando las ganancias y respetando restricciones de capacidad y recursos.

Compañías:

Toyota: Utiliza programación lineal para planificar la producción de vehículos en sus plantas globales, maximizando la utilización de recursos y minimizando desperdicios.

Nestlé: Aplica modelos de PL para optimizar la producción de alimentos y bebidas, teniendo en cuenta restricciones de materias primas y demandas estacionales.

SOFTWARE UTILIZADO**AMPL, MATLAB, Gurobi**

Producto principal: AMPL (A Mathematical Programming Language).

Servicios:

Lenguaje de modelado para problemas de optimización.

Compatibilidad con solucionadores como CPLEX y Gurobi.

Sitio web: <https://ampl.com>

Fórmulas. Otras celdas contienen fórmulas. Un modelo de PL en hojas

de cálculo electrónicas, utilizará fórmulas para expresar la función

objetivo y las funciones de restricción. Expresando de esta manera el

valor numérico de varios coeficientes del modelo.

Por ejemplo, en el ejercicio prototípico 2. La celda debajo del rótulo ganancia se usará la fórmula (=SUMAPRODUCTO(B3:C3; B6:C6)), en cada celda de la columna Coeficientes debajo del rotulo lado izquierdo.

Holgura. La celda de holgura es la diferencia entre la función de

restricción y el lado derecho, expresado de modo que no sea negativa.

(=SUMAPRODUCTO(B3:C3;B6:C6))

Después de tener desarrollada la hoja de cálculo electrónico de Excel. Procedemos a ejecutar el paquete SOLVER. eligiendo el comando "Solver..." del menú Herramientas de Excel.

CÓMO SE USA SOLVER El paquete suplementario Solver consiste esencialmente en dos programas. El primero es un programa de Visual Basic para Excel que traduce el modelo de la hoja de cálculo en una representación interna utilizada por el segundo programa. El segundo programa, que reside en la memoria como módulo de software independiente, fuera de Excel, realiza la optimización y devuelve la solución al primero, para que actualice la hoja de cálculo. Ambos se comunican mediante la interfaz de programación para aplicaciones de Microsoft, cuyos detalles no nos interesan aquí. Para J.H. Moore & L.R. Weatherford,2000; Erica Canizo & Paola Lucero: "Cuando selecciona el comando "Solver..." del menú Herramientas de Excel, usted ejecuta el primero de esos programas de Solver, el cual prepara la hoja de cálculo para optimizarla y llama al segundo programa, que efectúa la optimización" (2002).

SOLVER es un paquete adicional para Excel que emplea un algoritmo Matemático de Programación llamada "método



ASIGNACIÓN DE PERSONAL Y RECURSOS

Problema: Asignar empleados o recursos a diferentes tareas o proyectos de manera óptima, minimizando costos o maximizando la productividad.

Compañías:

Delta Airlines: Utiliza programación lineal para planificar los horarios de pilotos y tripulación, respetando regulaciones laborales y minimizando costos operativos.

Google: Aplica modelos de PL para asignar recursos computacionales en sus centros de datos, maximizando la eficiencia energética.

SOFTWARE UTILIZADO

SAS Optimization, Gurobi, IBM CPLEX Producto principal:

Gurobi Optimizer

Descripción: Software de optimización de alto rendimiento que resuelve problemas de PL, MILP y programación no lineal (NLP).

Usos:

Empresas como Uber y Airbnb lo utilizan para optimizar precios dinámicos y asignación de recursos.

Tesla lo ha aplicado en la gestión de recursos energéticos y almacenamiento de baterías.

simplex” usado para optimizar numéricamente los modelos sujetos a restricciones, como es el caso de los modelos de Programación Lineal con los que se logra hallar una solución óptima.

Para que SOLVER pueda optimizar un modelo, debe prepararse éste en una hoja de cálculo de la manera ya indicada. Además, debe apegarse a ciertas restricciones técnicas que este paquete impone a los modelos; y, lo más importante, si se quiere interpretar adecuadamente los resultados de SOLVER, deben entenderse las limitaciones de los modelos de optimización.

Terminada la carga, SOLVER mostrará un cuadro de diálogo solicitando información para el desarrollo del algoritmo de optimización.

Cargadas la celda que contienen la Fórmula de la función objetivo por optimizar y las celdas con las variables de decisión, hacemos clic en el botón “Resolver” del cuadro de diálogo.

Asumiendo una creación correcta del modelo de PL en la hoja de cálculo electrónico, SOLVER le mostrará un cuadro de diálogo de Resultados en el que podremos solicitar informes y pedir que SOLVER actualice las celdas de decisión de su modelo original con los valores óptimos. SOLVER presentará cada uno de los informes solicitados en una nueva hoja electrónica de Cálculo. Podremos entonces solicitar diversos análisis de sensibilidad en la región adyacente a los resultados óptimos.

Procederemos a ejecutar los ejemplos prototípicos con SOLVER, veremos todas las etapas descritas anteriormente paso a paso.

5.3.1.1.-Ejercicio PROTOTÍPICO 1.

CAMIONETAS CABINA SENCILLA Y DOBLE

Una compañía ensambladora de camionetas produce dos modelos, uno de cabina sencilla y el otro de doble cabina.

Hay dos líneas de producción, una para cada modelo, e intervienen dos departamentos en la producción de cada modelo. La capacidad de la línea de producción de cabina sencilla es de 70 camionetas por día. La capacidad de la línea de doble cabina es de 50 camionetas doble cabina diarios. En



Optimización de precios y estrategias de mercado

el departamento A se arman los chasis. En este departamento, se requiere una hora de trabajo para cada modelo Cabina sencilla y dos horas de trabajo para cada Doble cabina. En la actualidad, puede asignarse un máximo de 120 horas de trabajo diarias para la producción de ambos tipos de camionetas en el departamento A. En el departamento B se construye la carrocería. Aquí se requiere una hora de trabajo para cada Cabina sencilla y también una hora para cada modelo Doble cabina. Actualmente se pueden asignar 90 horas de trabajo al departamento B para la producción de ambos modelos. La contribución a las ganancias es de 20000 y 10000 dólares, respectivamente, por cada modelo Cabina doble y Cabina sencilla. Esta información se presenta resumida en la tabla 1. Si la compañía sabe que podrá vender todos los Camionetas dobles y sencillas que sean capaz de fabricar, ¿cuál deberá ser el plan de producción por día? (es decir, la producción diaria) para cada modelo

Intente formular la situación descrita de Cabina doble y Cabina sencilla como un modelo de programación lineal. Escriba el modelo simbólico de PL, luego desarrolle el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo después con SOLVER.

TABLA 37. Información Cabina sencilla y doble.

	Capacidad diaria	Depto A	Depto B	Ganancia por Modelo
Cabina sencilla	70	1	1	20000
Cabina doble	50	2	1	10000
Disponibilidad total		120	90	

Fuente: elaboración propia

SOLUCIÓN CON EXCEL-SOLVER

-MODELO MATEMÁTICO

-DATOS

-VARIABLES DE DECISION

c1=Cabina sencilla

C_2 = Cabina doble

$a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ = VARIABLES TECNICAS

b_1, b_2, b_3, b_4 = RECURSOS

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2 = \text{Utilidad}$$

Sujeto A:

$C_1 + 2 C_2 \leq 120$ Restricción de trabajo departamento A

$C_1 + C_2 \leq 90$ Restricción de trabajo departamento B

$C_1 \leq 70$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina sencilla

$C_2 \leq 50$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina doble

$C_1 \geq 0; C_2 \geq 0$ Restricciones de no negatividad

Establecido el modelo matemático, para poder solucionar con SOLVER, tenemos que crear la página en Excel, ya que esta es la forma en que SOLVER interpreta los datos de ingreso.

FUNCIÓN	OBJETIVO
MAXIMIZAR	
$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2$	
= Utilidad	
Sujeto A:	
$C_1 + 2 C_2 \leq 120$	
$C_1 \leq 70$	
$C_2 \leq 50$	
$C_1 \geq 0; C_2 \geq 0$	



TESLA

OPTIMIZACIÓN DEL USO DE RECURSOS ENERGÉTICOS

Problema: Minimizar los costos de generación de energía mientras se satisface la demanda y se cumplen las restricciones ambientales.

Compañías:

General Electric (GE): Utiliza programación lineal para optimizar la operación de plantas de energía, maximizando la eficiencia y reduciendo las emisiones.

Tesla: Aplica modelos de PL para optimizar el uso de baterías en sus sistemas de almacenamiento de energía y para gestionar la carga de vehículos eléctricos.

SOFTWARE UTILIZADO SAS Institute

Producto principal: SAS Optimization..

Industrias atendidas: Marketing, finanzas, retail, manufactura.

Clientes destacados: General Electric (GE);, empresas minoristas globales.

Sitio web: <https://www.sas.com>

Gráfico 25. Tabla ingreso de datos con EXCEL

PLAN DE PRODUCCION DE CABINA SENCILLA Y DOBLE CABINA						
Producto:	CS	CD				
Cant. De producto	70	20	Ganancia			
Margen Contrib. Unit.	\$ 20.00	\$ 10.00	\$ 1,600.00			
Restricciones	Uso de Recursos		Total LI		LD	Holgura
Depto. A	1.00	2.00	110.00	≤	120.00	10.00
Depto. B	1.00	1.00	90.00	≤	90.00	0.00
Requerimiento de Mezcla	1.00	0.00	70.00	≤	70.00	0.00
Horas de pruebas	0.00	1.00	20.00	≤	50.00	-30.00

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Ejecutamos SOLVER, e ingresamos los datos.

Gráfico 26. Página ingreso datos SOLVER

Fuente: Gráfico obtenido de Excel



Diseño de cadenas de suministro

Problema: Diseñar una red de suministro eficiente que minimice costos de transporte, almacenamiento y producción.

Compañías:

Apple: Utiliza programación lineal para optimizar su cadena de suministro global, asegurando que sus productos lleguen a tiempo a los mercados.

Unilever: Aplica modelos de PL para diseñar redes de suministro sostenibles, reduciendo costos y emisiones de carbono.

SOFTWARE UTILIZADO

AMPL, IBM CPLEX, LINDO

AMPL (A Mathematical Programming Language)

Descripción: Lenguaje de modelado para problemas de optimización que se combina con solucionadores como CPLEX, Gurobi o GLPK.

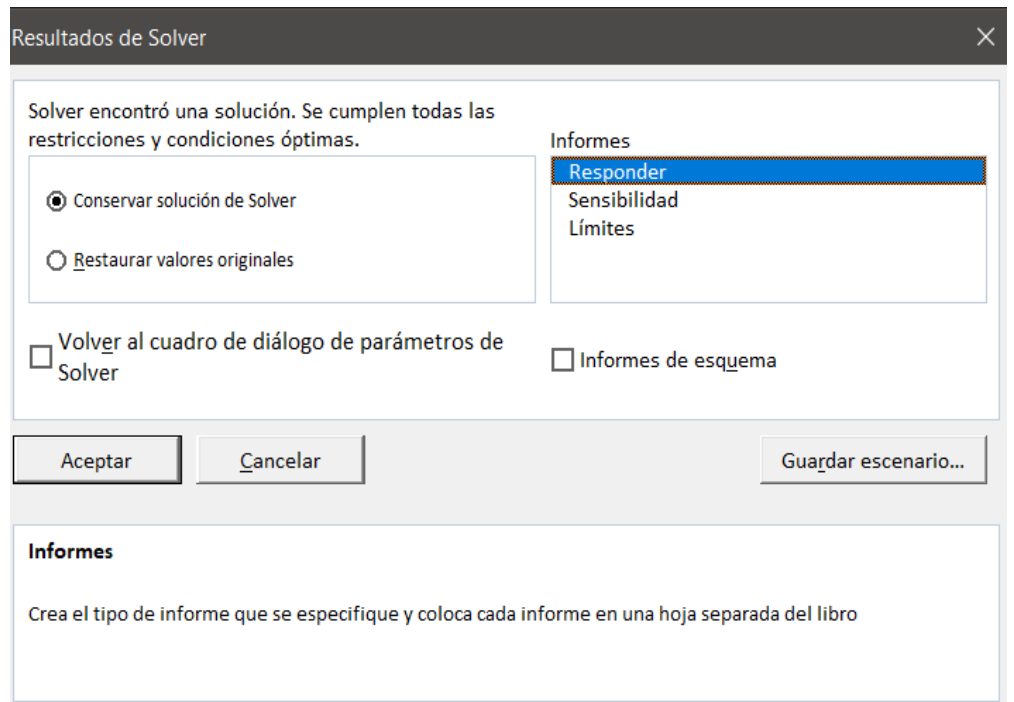
Usos:

Empresas como Nestlé y Unilever lo usan para diseñar cadenas de suministro y optimizar producción.

Ideal para modelar problemas complejos de múltiples etapas.

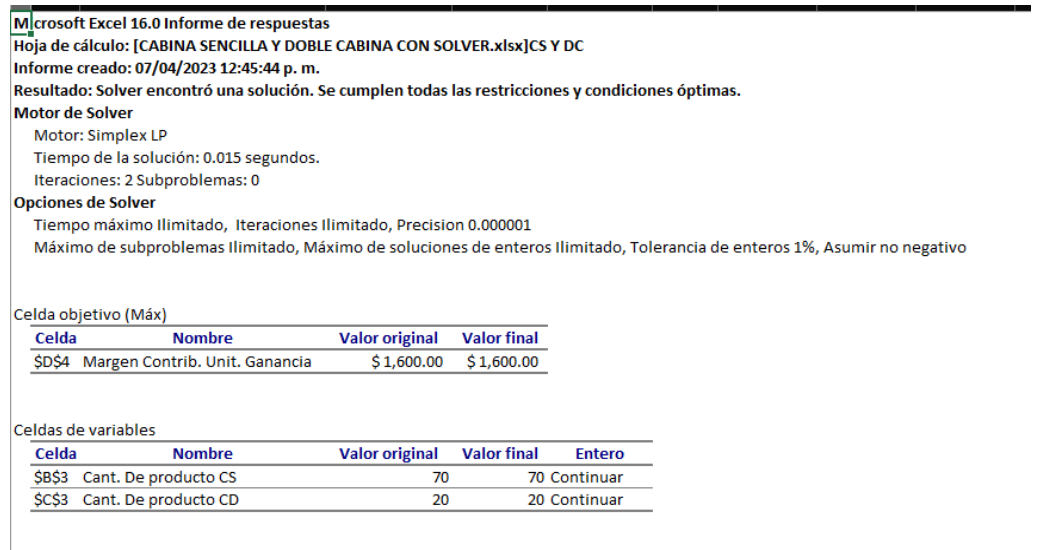
Ventajas: Flexible y fácil de usar para modelar problemas grandes.

Gráfico 27. Ejecución con SOLVER



Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 28. Reporte de solución con SOLVER



Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 29. Reporte de solución con SOLVER

Microsoft Excel 16.0 Informe de respuestas
 Hoja de cálculo: [CABINA SENCILLA Y DOBLE CABINA CON SOLVER.xlsx]CS Y DC
 Informe creado: 07/04/2023 12:45:44 p. m.
 Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Motor de Solver
 Motor: Simplex LP
 Tiempo de la solución: 0.015 segundos.
 Iteraciones: 2 Subproblemas: 0

Opciones de Solver
 Tiempo máximo Ilimitado, Iteraciones Ilimitado, Precisión 0.000001
 Máximo de subproblemas Ilimitado, Máximo de soluciones de enteros Ilimitado, Tolerancia de enteros 1%, Asumir no negativo

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$D\$4	Margen Contrib. Unit. Ganancia	\$ 1,600.00	\$ 1,600.00

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
\$B\$3	Cant. De producto CS	70	70	Continuar
\$C\$3	Cant. De producto CD	20	20	Continuar

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

En el gráfico 29 obtenemos el valor de la función objetivo que es de \$1600000,00 dólares diarios.

Gráfico 30. Reporte de solución con SOLVER

Microsoft Excel 16.0 Informe de respuestas
 Hoja de cálculo: [CABINA SENCILLA Y DOBLE CABINA CON SOLVER.xlsx]CS Y DC
 Informe creado: 07/04/2023 12:45:44 p. m.
 Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Motor de Solver
 Motor: Simplex LP
 Tiempo de la solución: 0.015 segundos.
 Iteraciones: 2 Subproblemas: 0

Opciones de Solver
 Tiempo máximo Ilimitado, Iteraciones Ilimitado, Precisión 0.000001
 Máximo de subproblemas Ilimitado, Máximo de soluciones de enteros Ilimitado, Tolerancia de enteros 1%, Asumir no negativo

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$D\$4	Margen Contrib. Unit. Ganancia	\$ 1,600.00	\$ 1,600.00

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
\$B\$3	Cant. De producto CS	70	70	Continuar
\$C\$3	Cant. De producto CD	20	20	Continuar

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

En el grafico 29 obtenemos el valor de las variables de decisión, Cabinas Sencillas=70 unidades, y Cabinas Dobles=20 unidades

5.3.1.2.-Ejercicio PROTOTÍPICO 2.

INDUSTRIAS JARAMILLO

INDUSTRIAS JARAMILLO (IJ), produce dos líneas de molinos para minería. Una de sus líneas de productos, llamada Molinos Chilenos, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de trituración líquida. La otra línea, denominada molinos de bolas, está destinada a la trituración de material en seco. Las M1 y M2 son hechas en los mismos galpones y con las mismas herramientas. Las predicciones económicas indican que se podrían vender normalmente todas las M1 y M2 que se fabriquen. Se desea pronosticar cuantas M1 y M2 se deben fabricar para obtener máximas ganancias. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo.

Los datos de IJ

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de IJ es de \$5000 por cada **M1** vendido y de \$4000 por cada **M2**.
2. En cada galpón pasan por mecanizado cualquier M1 o M2.
3. El galpón A dispondrá el próximo mes de 150 horas y el galpón B de 160 horas. En el galpón A, cada M1 necesita 10 horas de mecanizado y cada M2, 15 horas. En el galpón B, cada M1 necesitara de 20 horas de mecanizado, y cada M2 ,10 horas. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 12.
4. Las pruebas de los M1 y M2, serán realizadas en un galpón independiente, manejado por el sindicato de trabajadores, quien exige no menos de 135 horas, para sus trabajadores, los cuales gastan 30 horas en cada M1 y 10 horas por cada M2. Esta información se resume en la tabla 13.
5. El directorio como una medida de posicionamiento en el mercado deberá fabricar por lo menos una **M1** por cada tres **M2**.

6. Un distribuidor importante ha pedido para el siguiente mes 5 equipos sin importar cuantos son M1 y cuantos son M2.

Se desea determinar la producción de M1 y M2 que maximizaría las ganancias

Tabla 37. Datos de maquinado de IJ

DEPARTAMENTO	HORAS		
	POR M1	POR M2	TOTAL, DISPONIBLE
A	10	15	150
B	20	10	160

Fuente: elaboración propia

Tabla 38. Datos de prueba de IJ

	1 M1	1 M2	Horas totales requeridas
Horas de prueba	30	10	135

Fuente: elaboración propia

FUNCIÓN	OBJETIVO
MAXIMIZAR	
$Z(\text{Max}) = 5000M1 + 4000M2$	
Sujeto A:	
$M1 + M2 \geq 5$	
$M1 - 3M2 \leq 0$	
$10M1 + 15M2 \leq 150$	
$20M1 + 10M2 \leq 160$	
$30M1 + 10M2 \geq 135$	
$M1 \geq 0; M2 \geq 0$	

SOLUCIÓN ANALÍTICA

MODELO MATEMÁTICO

DATOS

VARIABLES DE DECISIÓN

M1=Molino Chileno

M2=Molino de Bolas

VARIABLES TÉCNICAS

RECURSOS

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$Z(\text{Max}) = 5000M1 + 4000M2 = \text{UTILIDAD}$

Sujeto A:

Lado derecho (LD):

Cifra al lado derecho (LD) de una restricción.

Lado izquierdo (LI):

Parte de una restricción en un modelo de programación lineal que contiene las variables de decisión y sus coeficientes. Representa la expresión algebraica que se evalúa y compara con el lado derecho (LD) para determinar si se cumple o no la restricción.

$$M1 + M2 \geq 5 \quad \text{Restricción de producción mínima}$$

$$M1 - 3M2 \leq 0 \quad \text{Restricción de balance de posición en el mercado}$$

$$10M1 + 15M2 \leq 150 \quad \text{Restricción de Capacidad del departamento}$$

A

$$20M1 + 10M2 \leq 160 \quad \text{Restricción de Capacidad del departamento}$$

B

$$30M1 + 10M2 \geq 135 \quad \text{Restricción mínima cantidad de horas para pruebas}$$

$$M1 \geq 0 ; M2 \geq 0 \quad \text{Restricciones de no negatividad}$$

Establecido el modelo matemático, para poder solucionar con SOLVER, tenemos que crear la página en Excel, ya que esta es la forma en que SOLVER interpreta los datos de ingreso.

Gráfico 28.

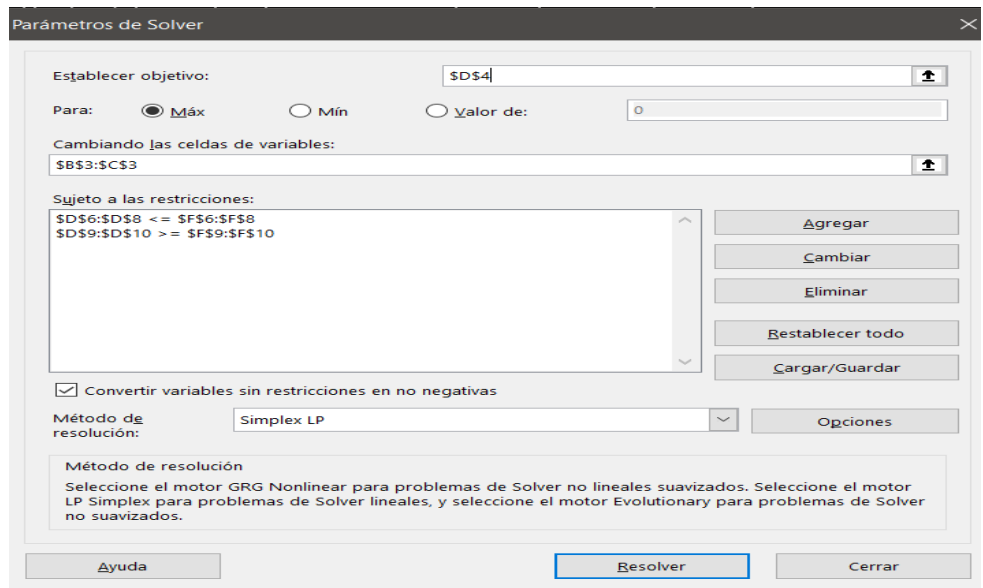
Tabla ingreso de datos con EXCEL

	A	B	C	D
1				
2	Producto:	M1	M2	
3	Cant. De producto	4.5	7	Ganancia
4	Margen Contrib. Unit.	\$ 5.00	\$ 4.00	\$ 50.50
5	Restricciones	Uso de Recursos		Total Lado Izquierdo
6	Depto. A	10.00	15.00	150.00
7	Depto. B	20.00	10.00	160.00
8	Requerimiento de Mezcla	1.00	-3.00	-16.50
9	Horas de pruebas	30.00	10.00	205.00
10	Total de unidades	1.00	1.00	11.50
11				
12				
13	5E+4F=Z MAXIMIZAR	TLI		TLD
14	10E+15F<=150	10(6)+15(5)	<=	150
15	20E+10F<=160	20)		

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

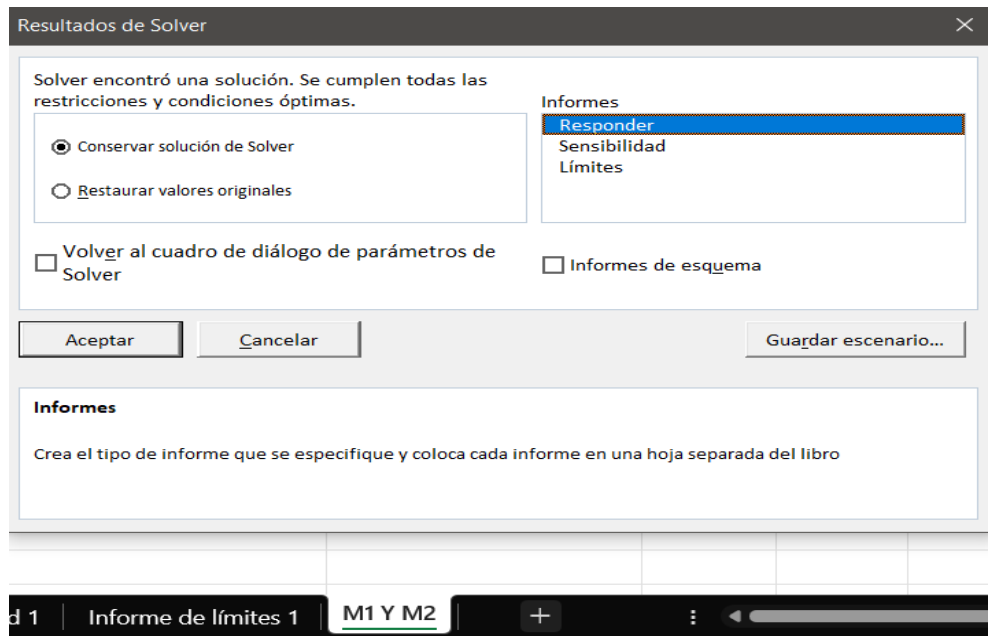
Ejecutamos SOLVER, e ingresamos los datos.

Gráfico 29. Página ingreso datos SOLVER




Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 30. Ejecución con SOLVER



Fuente: Gráfico obtenido de Excel



Optimización en la industria del acero y materiales

Problema: Minimizar el desperdicio de materiales al cortar piezas de diferentes tamaños de una materia prima.

Compañías:

ArcelorMittal: Utiliza programación lineal para optimizar el proceso de corte de acero, reduciendo el desperdicio y los costos.

Tata Steel: Aplica modelos de PL para planificar la producción y distribución de acero en función de la demanda global.

SOFTWARE UTILIZADO

IBM ILOG CPLEX Optimization Studio

Descripción: Es uno de los software más populares para resolver problemas de programación lineal, programación entera mixta (MILP), programación cuadrática y otros problemas de optimización.

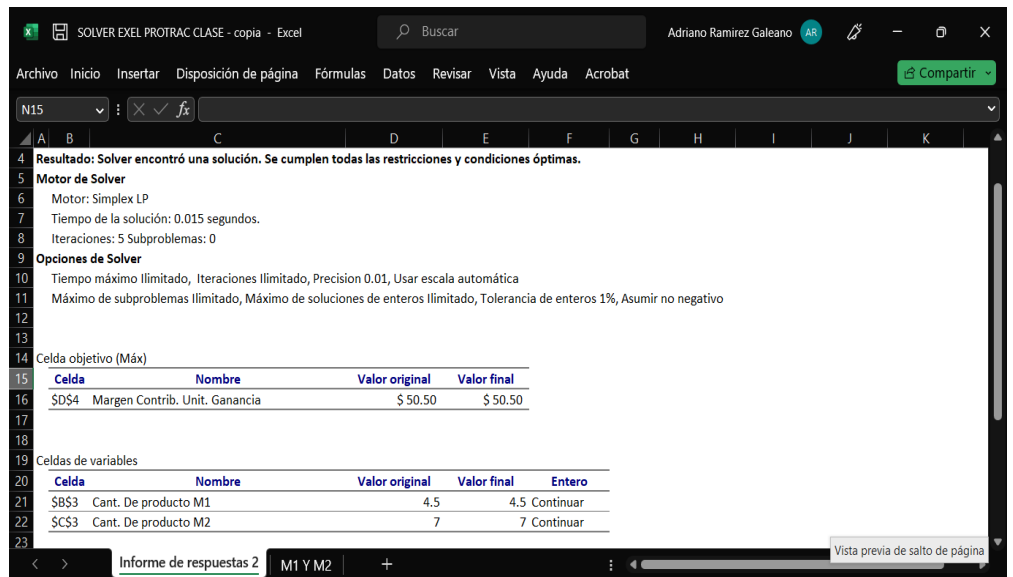
Usos:

Amazon y DHL lo han utilizado para optimizar rutas y logística.

Empresas como Procter & Gamble lo emplean para planificación de la producción.

Ventajas: Altamente escalable, rápido y capaz de manejar problemas de gran tamaño.

Gráfico 31. Reporte de solución con SOLVER



Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 32. Reporte de solución con SOLVER

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$D\$4	Margen Contrib. Unit. Ganancia	\$ 50.50	\$ 50.50

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

En el gráfico 32 obtenemos el valor de la función objetivo que es de \$50500,00 dólares mensuales.

Gráfico 33. Reporte de solución con SOLVER

En el blog indicado a continuación se puede descargar un tutorial detallado de la operación de Lingo-Lindo.(Erica Canizo & Paola Lucero, 2002, [Software], s. f.)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
\$B\$3	Cant. De producto M1	4,5	4,5	Continuar
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	7	Continuar

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

En el gráfico 33 obtenemos el valor de las variables de decisión, Molino Chileno $M1=4.5$ unidades, y Molino de Bolas $M2=7$

5.3.2 LINGO

-REGLAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE PL EN LINGO

LINGO:

(LINear Generalize
Optimizer) es una
herramienta simple para
formular problemas
lineales, resolverlos y
analizar su solución.

LINGO: (LINear Generalize Optimizer) es una herramienta simple para formular problemas lineales, resolverlos y analizar su solución. LINGO nos ayuda a encontrar el resultado óptimo: Máximo o Mínimo. A menudo estos problemas involucran el uso más eficiente de los recursos. Una de las características prominentes de LINGO es su aplicación en el lenguaje de modelo matemático, permitiendo escribir de forma natural la función objetivo y las restricciones. Resultando en modelos que son mucho más fáciles de modificar.

Otra característica de LINGO es el manejo aislado de los datos de la formulación del modelo, que le permite aislar los datos. pudiendo leer datos incluso de una hoja de cálculo separada, igualmente, de base de datos, o archivo de texto. Esta independencia permite hacer cambios, disminuyendo los errores al construir el modelo.

5.3.2.1.-DESARROLLO

Según Hillier, F. S., & Lieberman, G. J: "El lenguaje de modelado de Lingo nos permite expresar los modelos de una manera intuitiva y sencilla utilizando sumas variables con subíndices- al igual que se haría con lápiz y papel. Los modelos son más fáciles de construir, de entender, de mantener" (2015).

LINGO utiliza un editor de textos, en el que se pueden ingresar los modelos matemáticos de programación lineal, tal y como han sido desarrollados.

Sintaxis de LINGO

La sintaxis que se utiliza en este programa es muy sencilla.

El nombre de las variables debe tener 32 caracteres como máximo, Deben comenzar con una letra seguido de letras, dígitos o `_`. El compilador de LINGO no distingue entre mayúsculas y minúsculas.

Las sentencias deben terminar en un punto y coma.



JOHN DEERE

Planificación agrícola

Problema: Determinar qué cultivos plantar, en qué cantidades y en qué terrenos, maximizando las ganancias y respetando restricciones de recursos como agua y fertilizantes.

Compañías:

Monsanto (ahora parte de Bayer): Utiliza programación lineal para optimizar la producción de semillas y maximizar el rendimiento agrícola.

John Deere: Aplica modelos de PL para ayudar a los agricultores a planificar la siembra y el uso de maquinaria de manera eficiente.

SOFTWARE UTILIZADO

LINDO, AMPL, Python

LINDO/LINGO

Descripción: Software de optimización que permite modelar y resolver problemas de programación lineal, entera y no lineal.

Usos:

Empresas agrícolas como Monsanto lo han usado para planificación de cultivos.

Aplicado en la industria manufacturera para optimizar el uso de materiales.

Ventajas: Intuitivo y fácil de usar, ideal para problemas de tamaño medio.

El nombre de la función objetivo o a las restricciones, debe ser colocado entre corchetes.

Para declarar la función objetivo debemos colocar las palabras reservadas MAX o MIN, resaltadas en azul, seguidas del signo =.

¡Los comentarios deben comenzar con un signo !, los cuales son resaltados en verde.

LINGO nombra las restricciones en su modelo, se inserta el nombre entre corchetes, adelante de una línea de código.

Resolveremos a continuación los dos problemas prototípicos con LINGO:

5.3.2.2.-Ejercicio PROTOTÍPICO 1.

CAMIONETAS CABINA SENCILLA Y DOBLE

Una compañía ensambladora de camionetas produce dos modelos, uno de cabina sencilla y el otro de doble cabina.

Hay dos líneas de producción, una para cada modelo, e intervienen dos departamentos en la producción de cada modelo. La capacidad de la línea de producción de cabina sencilla es de 70 camionetas por día. La capacidad de la línea de doble cabina es de 50 camionetas doble cabina diarios. En el departamento A se arman los chasis. En este departamento, se requiere una hora de trabajo para cada modelo Cabina sencilla y dos horas de trabajo para cada Doble cabina. En la actualidad, puede asignarse un máximo de 120 horas de trabajo diarias para la producción de ambos tipos de camionetas en el departamento A. En el departamento B se construye la carrocería. Aquí se requiere una hora de trabajo para cada Cabina sencilla y también una hora para cada modelo Doble cabina. Actualmente se pueden asignar 90 horas de trabajo al departamento B para la producción de ambos modelos. La contribución a las ganancias es de 20000 y 10000 dólares, respectivamente, por cada modelo Cabina doble y Cabina sencilla. Esta información se presenta resumida en la tabla 39. Si la compañía sabe que podrá vender todos los Camionetas dobles y sencillas que sean capaz de fabricar, ¿cuál deberá ser el plan de producción por día (es decir, la producción diaria) para cada modelo?

Intente formular la situación descrita de Cabina doble y Cabina sencilla como un modelo de programación lineal. Escriba el modelo simbólico de PL, luego desarrolle el modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica y optimícelo después con LINGO-LINDO.

TABLA 39. Información Cabina sencilla y doble.

	Capacidad diaria	Depto A	Depto B	Ganancia por Modelo
Cabina sencilla	70	1	1	20000
Cabina doble	50	2	1	10000
Disponibilidad total		120	90	

Fuente: elaboración propia

SOLUCIÓN CON LINGO-LINDO

DATOS

VARIABLES DE DECISIÓN

C_1 = Cabina sencilla

C_2 = Cabina doble

a_{11} , a_{22} , a_{21} , a_{12} = VARIABLES TECNICAS

b_1 , b_2 , b_3 , b_4 = RECURSOS

b_1 , b_2 , b_3 , b_4 = RECURSOS

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$Z(\text{Max}) = 20000 C_1 + 10000 C_2 = \text{Utilidad}$

Sujeto A:

$C_1 + 2 C_2 \leq 120$ Restricción de trabajo departamento A

$C_1 + C_2 \leq 90$ Restricción de trabajo departamento B

$C_1 \leq 70$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina sencilla

$C2 \leq 50$ Restricción de Capacidad de línea de producción cabina doble

$C1 \geq 0$; $C2 \geq 0$ Restricciones de no negatividad

Establecido el modelo matemático, para poder solucionarlo, tenemos que crear la página en el editor de texto de LINGO, ya que esta es la forma en que **LINGO-LINDO** interpreta los datos de ingreso.

Gráfico 34. Ingreso de datos con LINGO-LINDO

```

IVARIABLES DE DECISION
C1=cabina sencilla
C2=cabina doble;
IFUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR;
Max =20*C1 + 10*C2 ;|Restricción de trabajo departamento A;
C1+2*C2<=120; |Restricción de trabajo departamento B;
C1+C2 <=90;|Restricción de Capacidad de línea de producción cabina sencilla;
C1 <= 70;|Restricción de Capacidad de línea de producción cabina doble;
C2 <=50;|restricciones de no negatividad;
  
```

Fuente: *Gráfico obtenido del programa LINGO*

Gráfico 35. Ejecución con LINGO-LINDO

```

Global optimal solution found.
Objective value:                1600.000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
Elapsed runtime seconds:        0.06

Model Class:                    LP

Total variables:                2
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              5
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                 8
Nonlinear nonzeros:             0

Variable      Value      Reduced Cost
C1            70.00000  0.000000
C2            20.00000  0.000000

Row   Slack or Surplus   Dual Price
1     1600.000           1.000000
2     10.00000           0.000000
3     0.000000           10.000000
4     0.000000           10.000000
5     30.00000           0.000000
  
```

Fuente: *Gráfico obtenido del programa LINGO*



Planificación de campañas publicitarias

Problema: Asignar presupuestos publicitarios a diferentes canales (TV, internet, redes sociales, etc.) para maximizar el alcance o las conversiones.

Compañías:

Coca-Cola: Utiliza programación lineal para optimizar la distribución de su presupuesto publicitario en diferentes mercados y plataformas.

Nike: Aplica modelos de PL para planificar campañas globales, maximizando el impacto en su público objetivo.

SOFTWARE UTILIZADO

SAS Optimization, Gurobi

Descripción: Parte de la suite de análisis de datos de SAS, especializada en resolver problemas de optimización y simulación.

Usos:

Empresas como Coca-Cola lo han utilizado para optimizar campañas publicitarias y distribución de recursos.

Utilizado en la industria minorista para gestión de inventarios.

Ventajas: Integración con análisis de datos y capacidades estadísticas avanzadas.

Gráfico 36. Reporte de solución con LINGO-LINDO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                1600.000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
Elapsed runtime seconds:        0.06
```

Fuente: Gráfico obtenido del programa LINGO

En el gráfico 36. Obtenemos el valor de la función objetivo que es de \$1600000,00 dólares diarios.

Gráfico 37. Reporte de solución con LINGO-LINDO

Variable	Value	Reduced Cost
C1	70.00000	0.000000
C2	20.00000	0.000000

Fuente: Gráfico obtenido del programa LINGO

En el gráfico 37. Obtenemos el valor de las variables de decisión, Cabinas Sencillas=70 unidades, y Cabinas Dobles=20 unidades

5.3.2.3.-Ejercicio PROTOTÍPICO 2. INDUSTRIAS JARAMILLO

INDUSTRIAS JARAMILLO (IJ), produce dos líneas de molinos para minería. Una de sus líneas de productos, llamada Molinos Chilenos, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de trituración líquida. La otra línea, denominada molinos de bolas, está destinada a la trituración de material en seco. Las M1 y M2 son hechas en los mismos galpones y con las mismas herramientas. Las predicciones económicas indican que se podrían vender normalmente todas las M1 y M2 que se fabriquen. Se desea pronosticar cuántas M1 y M2 se deben fabricar para obtener máximas ganancias. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo.

Los datos de IJ

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de IJ es de \$5000 por cada **M1** vendido y de \$4000 por cada **M2**.
 2. En cada galpón pasan por mecanizado cualquier M1 o M2.
 3. El galpón A dispondrá el próximo mes de 150 horas y el galpón B de 160 horas. En el galpón A, cada M1 necesita 10 horas de mecanizado y cada M2, 15 horas. En el galpón B, cada M1 necesitara de 20 horas de mecanizado, y cada M2 ,10 horas. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 12.
 4. Las pruebas de los M1 y M2, serán realizadas en un galpón independiente, manejado por el sindicato de trabajadores, quien exige no menos de 135 horas, para sus trabajadores, los cuales gastan 30 horas en cada M1 y 10 horas por cada M2. Esta información se resume en la tabla 13.
 5. El directorio como una medida de posicionamiento en el mercado deberá fabricar por lo menos una **M1** por cada tres **M2**.
 6. Un distribuidor importante ha pedido para el siguiente mes 5 equipos sin importar cuantos son M1 y cuantos son M2.
- Se desea determinar la producción de M1 y M2 que maximizaría las ganancias

Tabla 40. Datos de maquinado de IJ

DEPARTAMENTO	HORAS		
	POR M1	POR M2	TOTAL, DISPONIBLE
A	10	15	150
B	20	10	160

Fuente: elaboración propia

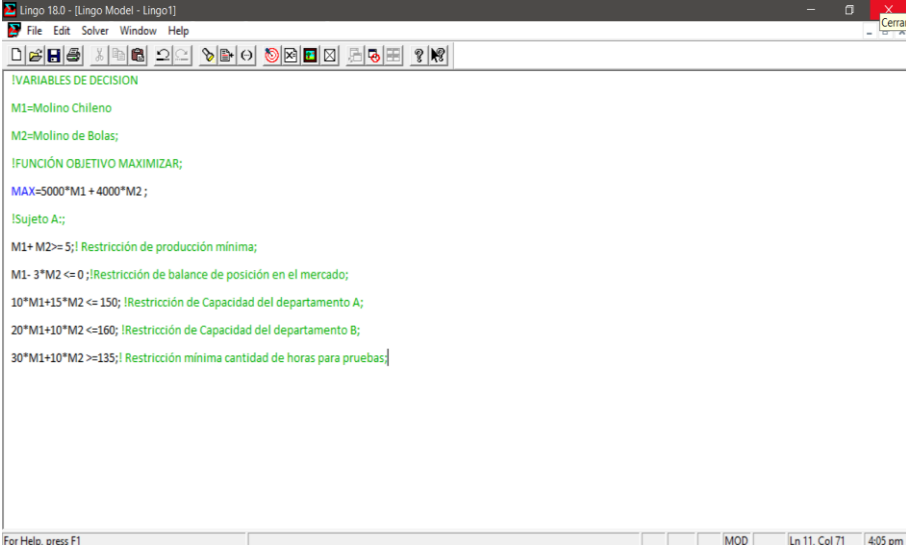
Tabla 41. Datos de prueba de IJ

	1 M1	1 M2	Horas totales requeridas
Horas de prueba	30	10	135

Fuente: elaboración propia

Establecido el modelo matemático, para poder solucionarlo, tenemos que crear la página en el editor de texto de LINGO, ya que esta es la forma en que LINGO-LINDO interpreta los datos de ingreso.

Gráfico 38. Tabla ingreso de datos con LINGO-LINDO

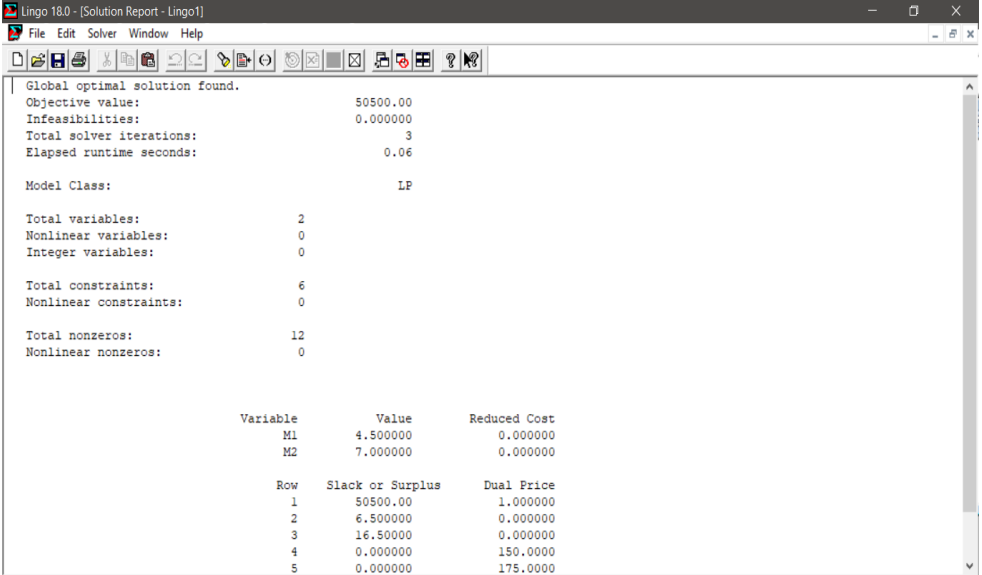


```

Lingo 18.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
!VARIABLES DE DECISION
M1=Molino Chileno
M2=Molino de Bolas;
!FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR;
MAX=5000*M1 + 4000*M2;
!Sujeto A;
M1+ M2<= 5;! Restricción de producción mínima;
M1- 3*M2 <= 0;!Restricción de balance de posición en el mercado;
10*M1+15*M2 <= 150;!Restricción de Capacidad del departamento A;
20*M1+10*M2 <=160;!Restricción de Capacidad del departamento B;
30*M1+10*M2 >=135;! Restricción mínima cantidad de horas para pruebas;
  
```

Fuente: Gráfico obtenido del programa LINGO

Gráfico 39. Ejecución con LINGO-LINDO



```

Lingo 18.0 - [Solution Report - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
Global optimal solution found.
Objective value:                50500.00
Infeasibilities:                 0.000000
Total solver iterations:         3
Elapsed runtime seconds:         0.06

Model Class:                    LP

Total variables:                 2
Nonlinear variables:             0
Integer variables:              0

Total constraints:               6
Nonlinear constraints:           0

Total nonzeros:                 12
Nonlinear nonzeros:             0

Variable      Value      Reduced Cost
M1            4.500000    0.000000
M2            7.000000    0.000000

Row    Slack or Surplus    Dual Price
1      50500.00000          1.000000
2      6.500000000          0.000000
3      16.500000000         0.000000
4      0.000000000          150.0000
5      0.000000000          175.0000
  
```

Fuente: Gráfico obtenido del programa LINGO

Gráfico 40. Reporte de solución con LINGO-LINDO

```

Global optimal solution found.
Objective value:                50500.00
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        3
Elapsed runtime seconds:        0.06

```

Fuente: Gráfico obtenido del programa LINGO

En el gráfico 40 obtenemos el valor de la función objetivo que es de \$50500,00 dólares mensuales.

Gráfico 41. Reporte de solución con LINGO-LINDO

Variable	Value	Reduced Cost
M1	4.500000	0.000000
M2	7.000000	0.000000

Fuente: Gráfico obtenido del programa LINGO

En el gráfico 4. Obtenemos el valor de las variables de decisión, Molino Chileno $M1 = 4.5$ unidades, y Molino de Bolas $M2 = 7$ unidades

5.4.-CONCLUSIONES

Los procedimientos aplicados, para encontrar la solución de los ejercicios de programación lineal, por medio de los paquetes informáticos, SOLVER y LINGO, nos han permitido ver la posibilidad de manejar situaciones con mayores volúmenes de información. También nos permitió observar que los informes de respuestas tienen todo un nuevo campo de información entregada, que serán analizados en los siguientes temas a ser tratados.

5.5.-CUESTIONARIO**5.5.1.-VERDADERO-FALSO**

1. En las hojas de cálculo de Excel, las ecuaciones de las restricciones de una PL son expresadas como fórmulas en las celdas. (V) (F)
2. En las hojas de cálculo de Excel, una restricción se representa como la diferencia del Lado Derecho menos el Lado Izquierdo. (V) (F)

3. En las hojas de cálculo de Excel, una restricción se representa como la diferencia el Lado Derecho menos el Lado Izquierdo. (V) (F)
4. Con SOLVER se realiza el cambio de fórmulas en hojas de Excel a un procedimiento de Optimización. (V) (F)
5. En las hojas de cálculo de Excel, se asigna separadamente una columna a cada variable de decisión. (V) (F)
6. En las hojas de cálculo de Excel, se asigna separadamente una fila a cada restricción. (V) (F)
7. En las hojas de cálculo de Excel, se ejecutaría SOLVER en una hoja de Excel con los datos de un PL, pero sin rótulos. (V) (F)
8. Es SOLVER un complemento de EXCEL. (V) (F)
9. En las hojas de cálculo de Excel, se podría ejecutar SOLVER en una hoja de Excel con los datos de un PL, pero sin rótulos. (V) (F)
10. La inclusión de la no negatividad dadas por las variables de decisión es opcional. (V) (F)

5.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

Es útil una PL en una hoja de EXCEL, cuando:

- a. Se podrían ingresar a la no linealidad los valores de datos en paquete.
- b. Se minimiza la labor de optimizar el modelo.
- c. Las dos afirmaciones anteriores.

En un modelo de PL, la solución tiene como máximo:

- a. m variables positivas, donde m representa la cantidad de restricciones.
- b. n variables básicas.
- c. $(m-n)$ variables no básicas.
- d. Ninguna de las anteriores.

5.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

Usar SOLVER DE EXCEL

13.- Un trapiche produce melaza y panela en unidades de 50 kilos. La producción de melaza más 8 unidades es mayor o igual que el doble de la producción de panela. También se da que la producción de 36 unidades es igual o mayor que el triple de la producción de panela más el doble de producción de melaza. Al salir al mercado cada unidad de melaza se comercializa en \$16 dólares y cada unidad de panela en \$4 dólares. Si se quiere maximizar ganancia se debe hallar el número de unidades a producir de panela y de melaza respectivamente.

14.- Un Taller de ropa produce ternos y vestidos de dama, para producir un terno se requieren 2 m² de tela de paño, y 1 m² de tela de algodón, y para sacar un vestido se necesitan 2m² de paño y 2 m² de algodón. El taller cuenta con 160 ms de tela de paño y 240 m² de tela de algodón, Si los ternos se venden en \$100 dólares y los vestidos en \$200 dólares, Cual debe ser la producción de ternos y vestidos para maximizar el beneficio.

15.- Se desea mezclar dos productos X1 y X2, para desarrollar una dieta para pollos, cuyo contenido mínimo de vitaminas debe ser de 4 mg de vitamina B1, 6 mg de vitamina B2, 60 mg de vitamina B3, y 4 mg de vitamina B5. El precio por kilo de X1 es de \$0.20 dólares y el de X2 es de \$0.30 dólares. El valor vitamínico de X1 y X2 se da en la siguiente tabla:

	B1	B2	B3	B5
X1	2	2	40	4
X2	2	6	15	1

Como se debería realizar esta mezcla, para minimizar costos.

16.- FERTIAGRO produce dos fertilizantes usando como bases dos mezclas con la composición de N, P, Ca, Ceniza indicada en la siguiente tabla:

	N(%)	P(%)	Ca(%)	CENIZA(%)
MEZCLA 1	5	5	10	80
MEZCLA 2	5	10	5	80

FERTIAGRO dispone de las siguientes cantidades de N, P, Ca y Ceniza a los siguientes precios:

	N(%)	P(%)	Ca(%)	CENIZA(%)
Cantidad (Ton)	1100	1800	2000	ilimitada
Precio(\$/Ton)	\$2000	\$800	\$1600	\$100

FERTIAGRO, saca al mercado la Mezcla 1 a un precio de \$715 la tonelada, y la mezcla 2 a \$690 la tonelada, ¿Cómo debe realizar las mezclas FERTIAGRO, para obtener la máxima ganancia?

17.- Productos DELAURY necesita un préstamo de \$1000000 de dólares para modernizar maquinaria, en el mercado de capitales a encontrado dos fuentes de préstamo, con las siguientes condiciones:

	PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
FUENTE 1(\$)	700000	200000	4800000
FUENTE 2(\$)	250000	250000	1250000

El interés de oportunidad de DELAURY es de 0.22.

Los socios de DELAURY imponen las siguientes condiciones de pago:

	PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
DELAURY(Máximo pago)	400000	2000000	900000

Buscar la manera de optimizar el préstamo a las dos fuentes sin exceder las restricciones.

18.- Jorge Castro tiene para invertir \$1000000. Quiere realizar inversiones en dos tipos de bonos B1 y B2. Los B1 tienen mas riesgo, pero dan 15% de beneficio, y las B2 son menos arriesgadas, pero solo dan el 8%. Jorge decide entonces invertir máximo \$600000 en B1, y como mínimo \$400000 en B2, también desea que lo realizado en B1 sea por lo menos lo mismo que la inversión en B2? Como debería invertir para que su ganancia se maximice.

5.6-GLOSARIO

Algoritmo simplex:

Método iterativo utilizado para resolver problemas de programación lineal. Permite encontrar la solución óptima a partir de un conjunto factible.

Análisis de sensibilidad:

Estudio de cómo los cambios en los parámetros del modelo (como los coeficientes de la función objetivo o los valores del lado derecho de las restricciones) afectan la solución óptima.

Decisión óptima:

Decisión factible que optimiza la función objetivo.

Función de restricción:

Lado izquierdo (LI) de una restricción. Depende de las variables de decisión.

Función lineal:

Función en la cual cada una de las variables aparece en un término individual. No hay potencias que no sean 1 y, por ejemplo, no existen ni expresiones logarítmicas o exponenciales, ni declaraciones $\sin()$, ni tampoco términos trigonométricos.

Función objetivo:

Todo programa lineal tiene una función objetivo lineal que representa la medición de desempeño por maximizar o minimizar.

Lado derecho (LD):

Cifra al lado derecho (LD) de una restricción.

Lado izquierdo (LI):

Parte de una restricción en un modelo de programación lineal que contiene las variables de decisión y sus coeficientes. Representa la expresión algebraica que se evalúa y compara con el lado derecho (LD) para determinar si se cumple o no la restricción.

LINGO:

(LINear Generalize Optimizer) es una herramienta simple para formular problemas lineales, resolverlos y analizar su solución.

Modelo de optimización con restricciones:

Modelo cuyo objetivo es encontrar valores para las variables de decisión que optimicen una función objetivo sujeta a restricciones.

Modelo simbólico de PL:

Representación algebraica de un problema de PL.

Optimizar:

Maximizar o minimizar.

Solver:

Programa complementario para hojas de cálculo electrónicas que permite optimizar la representación de un modelo de PL en una hoja de cálculo electrónica.

Valores de decisión:

Conjunto de valores numéricos de las variables de decisión.

Variables de decisión:

Son las variables que están bajo el control de la persona encargada de tomar las decisiones. Las variables que aparecen en los modelos que hemos formulado en este capítulo son de ese tipo.



CAPITULO 6. SOFTWARE PROGRAMACIÓN LINEAL

TEMA 6. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

6.1.-OBJETIVOS

- -Obtener informes de sensibilidad y límites en SOLVER
- -Interpretación de los informes de sensibilidad y límites.
- -Entender el significado de precios marginales.



Exportación de banano y su sensibilidad a los costos logísticos

Contexto: Ecuador es uno de los mayores exportadores de banano en el mundo. Las empresas bananeras han utilizado modelos de programación lineal para optimizar las rutas de transporte y minimizar los costos logísticos.

Hecho anecdótico: Un análisis de sensibilidad mostró que los costos de transporte marítimo tenían un impacto crítico en la rentabilidad de las exportaciones. Durante un período de aumento en los precios del combustible, las empresas ajustaron sus envíos consolidando volúmenes en barcos más grandes y renegociando tarifas con las navieras, lo que permitió mantener la competitividad en mercados europeos.

6.2.-INTRODUCCIÓN

Análisis de sensibilidad también se le denomina análisis de postoptimalidad y análisis paramétrico. Este capítulo aborda el análisis de sensibilidad, también conocido como análisis de postoptimalidad o paramétrico, como una herramienta clave para evaluar el impacto de cambios en los parámetros de un modelo de programación lineal (PL). Según Moore, J. H. & Weatherford, L. R: "Este análisis tiene como propósito determinar cómo modificaciones en variables como la cantidad de recursos disponibles, precios o costos afectan la solución óptima y los valores de la función objetivo" (2000). En este contexto, Solver de Excel se presenta como una herramienta computacional eficiente que permite realizar este tipo de análisis de manera sistemática y detallada.

El análisis de sensibilidad con Solver se centra en identificar los límites permisibles de modificación de los parámetros sin alterar la solución óptima. Además, proporciona información adicional como los precios marginales (también conocidos como precios sombra), que indican el cambio en el valor de la función objetivo por cada unidad adicional de un recurso limitado. Estos resultados son esenciales para la toma de decisiones en escenarios reales, especialmente en contextos empresariales donde los parámetros pueden variar constantemente.

El texto también resalta que, aunque el análisis de sensibilidad tuvo sus orígenes en métodos gráficos, actualmente las herramientas computacionales como Solver de Excel permiten obtener resultados más precisos y detallados, entregando automáticamente informes de sensibilidad y límites. Para fines didácticos, se sugiere aplicar este análisis a problemas prototípicos previamente estudiados, lo que facilita la



Exportación de camarón y fluctuaciones en los precios internacionales

Contexto: Ecuador es uno de los principales exportadores de camarón a nivel mundial. Las empresas camaroneras han utilizado el método simplex para determinar los mercados más rentables, considerando costos de producción, transporte y precios internacionales.

Hecho anecdótico: Durante un análisis de sensibilidad, se descubrió que una variación del 5% en los precios internacionales del camarón podía hacer que ciertos mercados (como Asia) fueran menos rentables que otros (como Estados Unidos). Esto llevó a priorizar envíos a mercados con mayor estabilidad en los precios y menores costos logísticos.

comprensión práctica del impacto de los cambios en los parámetros del modelo.

En resumen, el análisis de sensibilidad con Solver de Excel es un método técnico que permite evaluar de manera clara y eficiente cómo las variaciones en los parámetros de un modelo de programación lineal afectan la solución óptima, proporcionando información clave para la optimización y la toma de decisiones estratégicas.

6.3.-DESARROLLO

De acuerdo con Moore, J. H. & Weatherford, L. R: "El Informe de sensibilidad de SOLVER para la solución del problema del molino de bolas, presentado más adelante, nos indica que el análisis de sensibilidad radica en el hecho de que todos los parámetros, con excepción de uno, se mantienen fijos en el modelo, a la vez que se pedirá información acerca de la manera en que cambiaría la solución óptima por motivo de las modificaciones del único dato que se nos permite modificar, esto es similar al concepto de estudio de marginalidad aplicado en economía" (2000) . La información de nuestro interés podría ser las consecuencias sobre el valor óptimo (máxima ganancia) y las decisiones acerca de los valores de decisión óptimos hallados ($M1$, $W1$). Una de los primeros parámetros que podríamos modificar podrían ser los lados derechos de las restricciones B_i , estos representan la cantidad de recursos de los que disponemos, en el ejemplo prototípico más adelante mostrado, el cambio de una hora de más en el recurso del galpón B, modifica el valor objetivo en un valor de 175 dólares, indicando que hay un valor oculto o marginal, que expresa en cuanto aumenta la ganancia al aumentar en una unidad un recurso, manteniendo todos los otros parámetros fijos. En la columna de precio sombra (grafico 42), del informe de SOLVER, se indican cual sería este precio marginal para cada uno de los recursos.

Gráfico 42. Precios marginales

The screenshot shows the 'Informe de sensibilidad' (Sensitivity Report) in Microsoft Excel. It is divided into two main sections: 'Celdas de variables' (Variable Cells) and 'Restricciones' (Constraints). A red box labeled 'Precio marginal' points to the 'Sombra Precio' column in the constraints table.

Celdas de variables		Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$B\$3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.333333333
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Restricciones		Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$D\$6	Depto. A Total Ladozquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
\$D\$7	Depto. B Total Ladozquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
\$D\$8	Requerimiento de Mezcla Total Ladozquierdo	-16.5	0	0	1E+30	16.5
\$D\$9	Horas de pruebas Total Ladozquierdo	205	0	135	70	1E+30
\$D\$10	Total de unidades Total Ladozquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Por lo tanto, El precio sombra de una restricción se podrá interpretar como la razón de cambio del valor óptimo, a medida que aumenta el Lado Derecho de la restricción, mientras todos los demás parámetros permanecen constantes.

Las otras dos columnas al lado derecho, aumento y disminución permisible (gráfico 2), indican hasta donde se pueden modificar los recursos, sin que el valor de las variables de la función objetivo cambie (M1, ***).

Gráfico 43. Aumento y disminución permisible del recurso

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$B\$3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.33333333
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
SD\$6	Depto. A Total Ladolzquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
SD\$7	Depto. B Total Ladolzquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
SD\$8	Requerimiento de Mezcla Total Ladolzquierdo	-16.5	0	0	1E+30	16.5
SD\$9	Horas de pruebas Total Ladolzquierdo	205	0	135	70	1E+30
SD\$10	Total de unidades Total Ladolzquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30



Optimización de exportaciones de flores a Europa

Contexto: Las flores son uno de los principales productos de exportación de Ecuador, especialmente hacia Europa. Las empresas florícolas han utilizado programación lineal para optimizar la logística y los costos asociados al transporte aéreo.

Hecho anecdótico: En un análisis de sensibilidad, se identificó que los costos del transporte aéreo representaban más del 40% del precio final de las flores. Durante la pandemia de COVID-19, cuando los precios del transporte aéreo se dispararon, las empresas ajustaron sus envíos priorizando variedades de flores con mayor valor agregado, como rosas premium, para garantizar la rentabilidad.

Fuente: *Gráfico obtenido de Excel*

Ahora modificaremos los coeficientes c_j (gráfico 44) de la función objetivo. Estas modificaciones nos permitirán determinar hasta donde podemos estirar el valor de los precios o de los costos, sin dejar de producir la misma cantidad en este caso de **MI** y **MR**.

Es así como los **valores de los coeficientes objetivo** indicaran los niveles dentro de los cuales no ocurrirá ningún cambio en la solución óptima.

Gráfico 44.

Aumento y disminución permisible del coeficiente de la variable de decisión

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$B\$3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.33333333
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
SD\$6	Depto. A Total Ladolzquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
SD\$7	Depto. B Total Ladolzquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
SD\$8	Requerimiento de Mezcla Total Ladolzquierdo	-16.5	0	0	1E+30	16.5
SD\$9	Horas de pruebas Total Ladolzquierdo	205	0	135	70	1E+30
SD\$10	Total de unidades Total Ladolzquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30

Fuente: *Gráfico obtenido de Excel*

6.4.-INDUSTRIAS JARAMILLO

INDUSTRIAS JARAMILLO(IJ), produce dos líneas de molinos para minería. Una de sus líneas de productos, llamada Molinos Chilenos, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de trituración líquida. La otra línea, denominada molinos de bolas, está destinada a la trituración de material en seco. Las M1 y M2 son hechas en los mismos galpones y con las mismas herramientas. Las predicciones económicas indican que se podrían vender normalmente todas las M1 y M2 que se fabriquen. Se desea pronosticar cuantas M1 y M2 se deben fabricar para obtener máximas ganancias. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo.



Impacto de los aranceles en la importación de maquinaria agrícola

Contexto: Muchas empresas ecuatorianas dependen de la importación de maquinaria agrícola para mejorar la producción de cacao, banano y otros productos de exportación.

Hecho anecdótico: Un análisis de sensibilidad realizado por asociaciones agrícolas mostró que un aumento en los aranceles de importación de maquinaria reduciría significativamente la capacidad de inversión de los pequeños productores. Esto llevó a negociaciones con el gobierno para reducir los aranceles en equipos clave, fomentando la modernización del sector agrícola.

Los datos de IJ

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de IJ es de \$5000 por cada M1 vendido y de \$4000 por cada M2.
2. En cada galpón pasan por mecanizado cualquier M1 o M2.
3. El galpón A dispondrá el próximo mes de 150 horas y el galpón B de 160 horas. En el galpón A, cada M1 necesita 10 horas de mecanizado y cada M2, 15 horas. En el galpón B, cada M1 necesitará de 20 horas de mecanizado, y cada M2, 10 horas. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 12.
4. Las pruebas de los M1 y M2, serán realizadas en un galpón independiente, manejado por el sindicato de trabajadores, quien exige no menos de 135 horas, para sus trabajadores, los cuales gastan 30 horas en cada M1 y 10 horas por cada M2. Esta información se resume en la tabla 13.
5. El directorio como una medida de posicionamiento en el mercado deberá fabricar por lo menos una M1 por cada tres M2.
6. Un distribuidor importante ha pedido para el siguiente mes 5 equipos sin importar cuantos son M1 y cuantos son M2.

Se desea determinar la producción de M1 y M2 que maximizaría las ganancias

Tabla 42. Datos de maquinado de IJ

	HORAS		
GALPON	POR M1	POR M2	TOTAL, DISPONIBLE
A	10	15	150
B	20	10	160

Fuente: elaboración propia

Tabla 43. Datos de prueba de IJ

	1 M1	1 M2	Horas totales requeridas
Horas de prueba	30	10	135

Fuente: elaboración propia

SOLUCIÓN

MODELO MATEMÁTICO

DATOS

VARIABLES DE DECISIÓN

M1=Molino Chileno

M2=Molino de Bolas

a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} a_{51} a_{52} **VARIABLES TECNICAS**

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 **RECURSOS**

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$$Z(\text{Max}) = 5000M1 + 4000M2 = \text{UTILIDAD}$$

Sujeto A:

$$M1 + M2 \geq 5 \text{ Restricción de producción mínima}$$

$$M1 - 3M2 \leq 0 \text{ Restricción de balance de posición en el mercado}$$

$10M1 + 15M2 \leq 150$ **Restricción de Capacidad del galpón A**

$20M1 + 10M2 \leq 160$ **Restricción de Capacidad del galpón B**

$30M1 + 10M2 \geq 135$ **Restricción mínima cantidad de horas para pruebas**

$M1 \geq 0 ; M2 \geq 0$ **Restricciones de no negatividad**

Establecido el modelo matemático, para poder solucionar con SOLVER, tenemos que crear la página en Excel, ya que esta es la forma en que SOLVER interpreta los datos de ingreso.

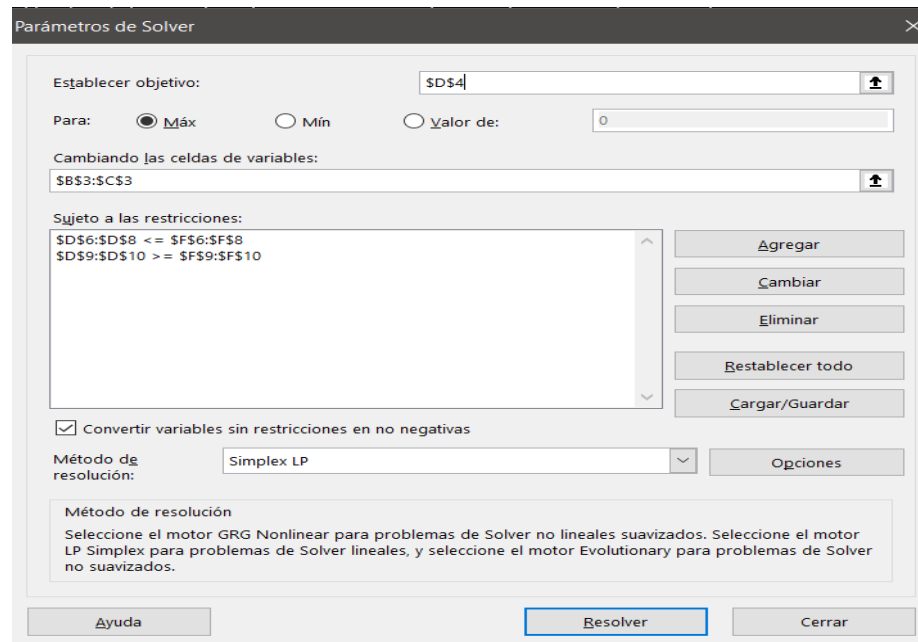
Gráfico 44. Tabla ingreso de datos con EXCEL

	A	B	C	D
1	PLAN DE PRODUCCION DE PROTRAC			
2	Producto:	M1	M2	
3	Cant. De producto	4,5	7	Ganancia
4	Margen Contrib. Unit.	\$ 5.00	\$ 4.00	\$ 50.50
5	Restricciones	Uso de Recursos		Total Ladolzquierdo
6	Depto. A	10.00	15.00	150.00
7	Depto. B	20.00	10.00	160.00
8	Requerimiento de Mezcla	1.00	-3.00	-16.50
9	Horas de pruebas	30.00	10.00	205.00
10	Total de unidades	1.00	1.00	11.50
11				
12				
13	$5E+4F=Z$ MAXIMIZAR	TLI		TLD
14	$10E+15F \leq 150$	$10(6)+15(5)$	\leq	150
15	$20E+10F \leq 160$	$20)$		

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

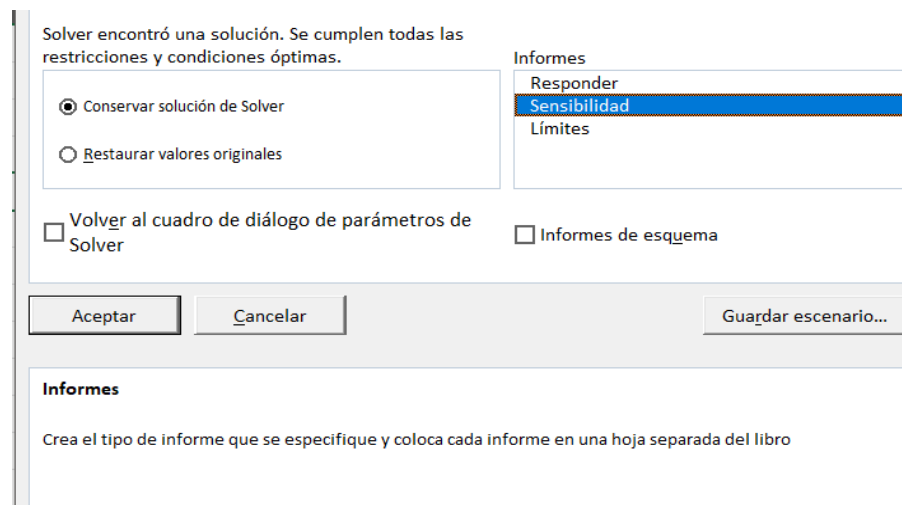
Ejecutamos SOLVER, e ingresamos los datos.

Gráfico 45. Página ingreso datos SOLVER



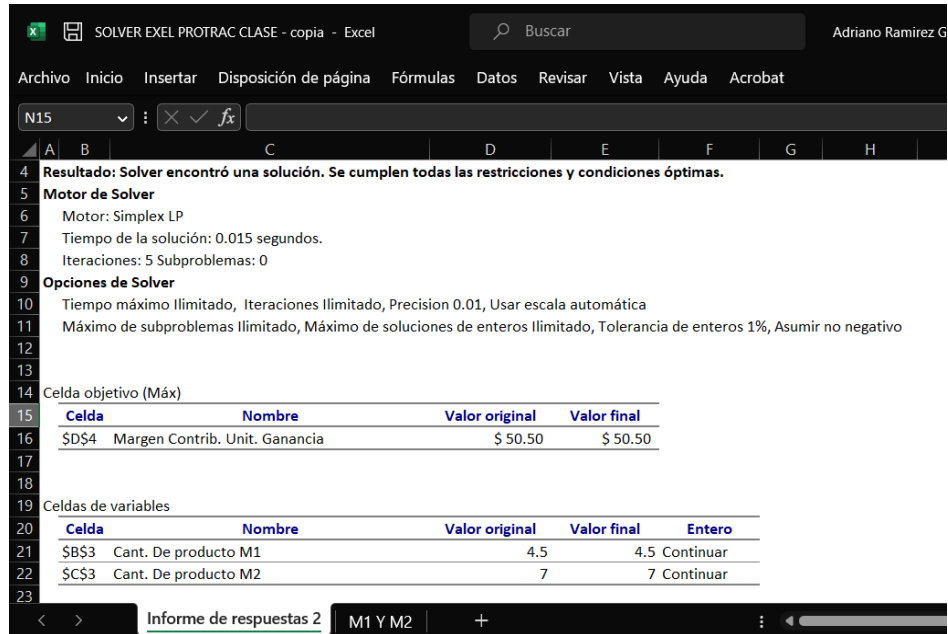
Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 46. Ejecución con SOLVER



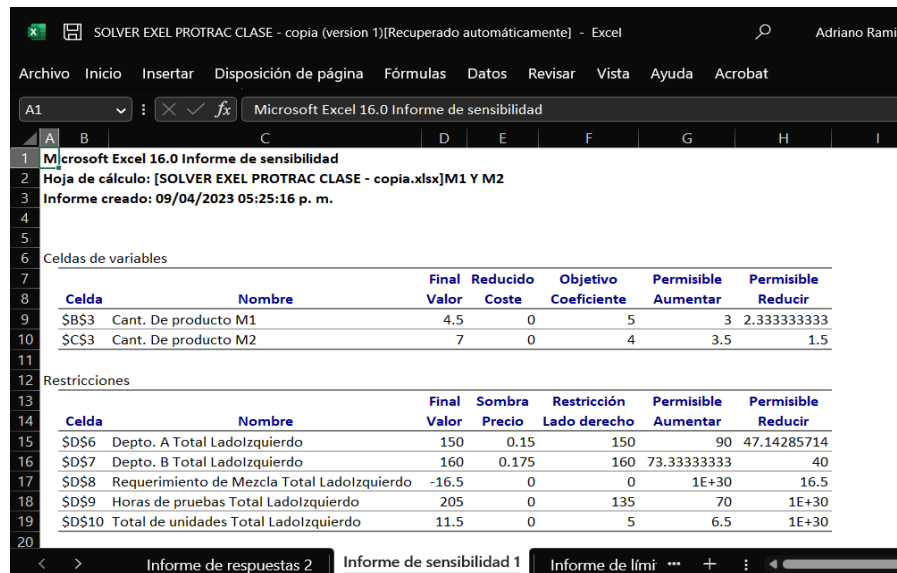
Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 47. Reporte de solución con SOLVER



Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Gráfico 48. Reporte de Análisis de Sensibilidad con SOLVER



Nota: Gráfico obtenido de Excel



Exportación de cacao y su sensibilidad al tipo de cambio

Contexto: Ecuador es uno de los principales exportadores de cacao fino de aroma. Las empresas exportadoras han utilizado modelos de optimización para maximizar las ganancias, considerando costos de producción, transporte y fluctuaciones en el tipo de cambio.

Hecho anecdótico: Un análisis de sensibilidad mostró que la apreciación del dólar frente a otras monedas (como el euro) afectaba negativamente las exportaciones de cacao a Europa. Esto llevó a las empresas a diversificar mercados, aumentando las exportaciones a países asiáticos donde los contratos se negociaban en dólares.

Gráfico 49. Reporte de Análisis de Límites con SOLVER

Microsoft Excel 16.0 Informe de límites
 Hoja de cálculo: [SOLVER EXEL PROTRAC CLASE - copia.xlsx]M1 Y M2
 Informe creado: 09/04/2023 05:29:20 p. m.

Objetivo		
Celda	Nombre	Valor
\$D\$4	Margen Contrib. Unit. Ganancia	\$ 50.50

Variable			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
\$B\$3	Cant. De producto M1	4.5	2.1667	38.83	4.5	50.5
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	1.5	28.5	7	50.5

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

6.5.-Análisis de sensibilidad modificando Parámetros Bi, Cj

¿Qué pasaría sí?

El análisis de sensibilidad se realiza manteniendo todos los parámetros fijos y variando solo uno de ellos, y observar cómo cambia la función objetivo.

La solución óptima del gráfico 49 da como resultado una utilidad máxima de \$50500,00. Con una producción de $M_1=4.5$ y $M_2=7$.

Vamos a tomar la restricción:

$20M_1 + 10M_2 \leq 160$ Restricción de Capacidad del galpon **B**.

En este caso pasamos de $b_4=160$ a $b_4=161$, esto es aumentamos la capacidad del recurso horas de trabajo en el departamento B. en una hora. Y verificamos cómo se comporta la función objetivo.

Tenemos entonces:

$$10M_1 + 15M_2 = 150$$

$$20M_1 + 10M_2 = 161$$

Obteniendo $MI=4.575$ y $M2=6.95$

Con estos nuevos valores la función objetivo será:

$$5000(4.575) + 4000(6.95) = 50675,00$$

La diferencia de la utilidad incrementando una hora más de producción en el galpón B,

será:

$$50675-50500=175$$

Si observamos el grafico5, vemos que, en este informe de sensibilidad, tenemos una columna denominada Precios Sombra, cuyo valor en la fila correspondiente a la restricción del galpón **B**, tiene un valor de:

$$0.175 \times 10^3 = 175$$

Gráfico 50. Precio sombra Departamento B.

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$B\$3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.333333333
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$D\$6	Depto. A Total Ladozquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
\$D\$7	Depto. B Total Ladozquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
\$D\$8	Requerimiento de mezcla Total Ladozquierdo	16.5	0	0	1E+30	16.5
\$D\$9	Horas de pruebas Total Ladozquierdo	205	0	135	70	1E+30
\$D\$10	Total de unidades Total Ladozquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Que es el valor dado por el aumento de la utilidad de la función objetivo, al aumentar en una hora de producción el galpón **B**. Este es el concepto del Precio Sombra. Para Moore, J. H. & Weatherford, L. R: "En general, el precio sombra de una restricción dada puede interpretarse como la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de dicha restricción, mientras todos los demás datos permanecen iguales" (2000).

Lo mismo significaría el precio sombra del galpón A.



Exportación de atún en conserva y costos de materias primas

Contexto: Ecuador es un actor clave en la exportación de atún en conserva, especialmente hacia Estados Unidos y Europa.

Hecho anecdótico: Un análisis de sensibilidad realizado por empresas atuneras mostró que un aumento en el costo del pescado crudo (materia prima) tenía un impacto significativo en los márgenes de ganancia. Esto llevó a las empresas a invertir en flotas pesqueras propias para reducir la dependencia de proveedores externos y estabilizar los costos de producción.

Gráfico 51. Precio sombra galpón A

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$B\$3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.333333333
\$C\$3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$D\$6	Deppto. A Total Ladolzquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
\$D\$7	Deppto. B Total Ladolzquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
\$D\$8	Requerimiento de Mezcla Total Ladolzquierdo	-16.5	0	0	1E+30	16.5
\$D\$9	Horas de pruebas Total Ladolzquierdo	205	0	135	70	1E+30
\$D\$10	Total de unidades Total Ladolzquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

$0.150 \times 1000 = 150.$

Esto indica que, si aumentamos en una hora la producción del galpón A, obtendríamos una utilidad de \$175 dólares, del análisis de costos de producción dependerá la conveniencia de producir o no producir en el galpón A, una hora más.

En este mismo gráfico 51, observamos dos columnas más, Aumento y disminución permisible. Las mismas indican hasta donde se puede aumentar o disminuir el recurso, sin que varíe el precio sombra.

En el caso del galpón A, el recurso puede variar:

$150 - 47.18 = 102.82$

$150 + 90 = 240$

Indica que el recurso puede variar de 102.82 a 240.00 sin que su utilidad por aumento de unidad de recurso cambie.

Al analizar la sensibilidad del recurso b_2 , observamos que el gráfico 9. Indica que el recurso puede aumentar 73.33 o disminuir 40. Con lo que b_2 puede

Gráfico 52. Precio sombra Departamento A

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
SBS3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.33333333
SCS3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
SDS6	Depto. A Total Ladozquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
SDS7	Depto. B Total Ladozquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
SDS8	Requerimiento de Mezcla Total Ladozquierdo	-16.5	0	0	1E+30	16.5
SDS9	Horas de pruebas Total Ladozquierdo	205	0	135	70	1E+30
SDS10	Total de unidades Total Ladozquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30

Nota: Gráfico obtenido de Excel

Variar entre 120 y 233.33. sin que su precio sombra de 160 cambie. “El rango de valores de LD dentro de los cuales el precio sombra permanece constante se conoce como rango permisible del LD. El rango apropiado aparece en el Informe de sensibilidad bajo la sección titulada “Restricciones”, en las columnas “Incremento permisible” y “Decremento permisible” (Eppen & Ruiz, 2000)

Gráfico 53. Coeficientes función objetivo c_j

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
SBS3	Cant. De producto M1	4.5	0	5	3	2.33333333
SCS3	Cant. De producto M2	7	0	4	3.5	1.5

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
SDS6	Depto. A Total Ladozquierdo	150	0.15	150	90	47.14285714
SDS7	Depto. B Total Ladozquierdo	160	0.175	160	73.33333333	40
SDS8	Requerimiento de Mezcla Total Ladozquierdo	-16.5	0	0	1E+30	16.5
SDS9	Horas de pruebas Total Ladozquierdo	205	0	135	70	1E+30
SDS10	Total de unidades Total Ladozquierdo	11.5	0	5	6.5	1E+30

Fuente: Gráfico obtenido de Excel

Los valores de los coeficientes c_1 y c_2 , de las variables de decisión M_1 y M_2 pueden variar dentro de los rangos indicados en las columnas; Aumento y Disminución permisible del grafico10, sin que el vértice que corresponde a la solución óptima varíe.

c_1 puede variar entre $(4.5+3)$ y $(4.5-2.33)$ esto es:

c_1 [2.17;7.5] y:

c_2 entre $(7+3.5)$ y $(7-1.5)$ esto es:

c_2 [5.5;10.3].



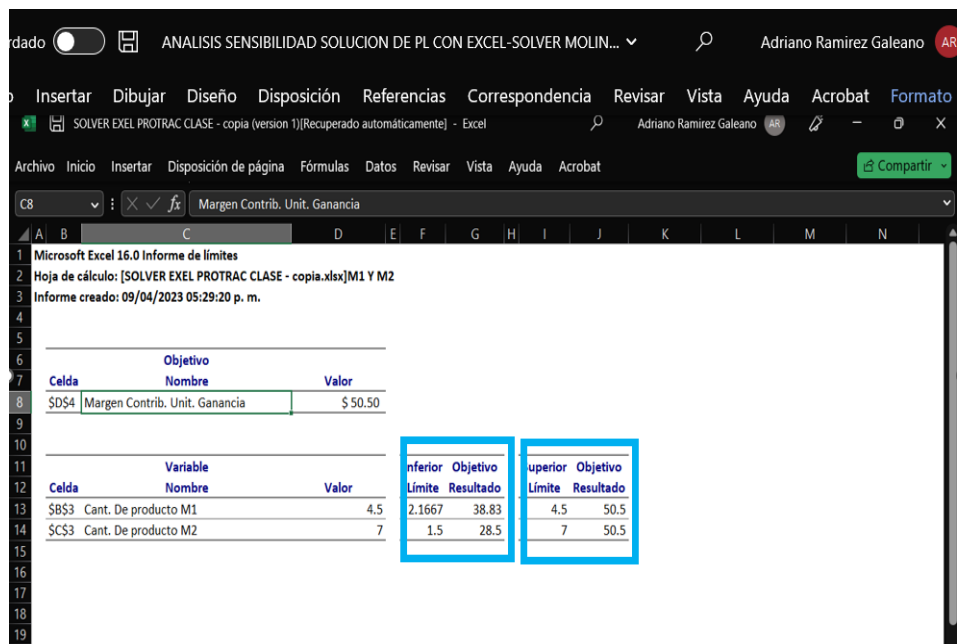
Impacto del costo de los contenedores en las exportaciones durante la pandemia

Contexto: Durante la pandemia de COVID-19, los costos de los contenedores marítimos se dispararon, afectando gravemente las exportaciones ecuatorianas.

Hecho anecdótico: Un análisis de sensibilidad realizado por exportadores de productos agrícolas mostró que un aumento del 300% en los costos de los contenedores hacía inviable la exportación a ciertos mercados, como Asia. Esto llevó a priorizar mercados más cercanos (como América del Norte) y a negociar tarifas preferenciales con navieras.

En el grafico 1. Se observa el resultado de Limites, con SOLVER. Este indica entre que valores varia la utilidad cuando se aplican las cantidades dadas por las columnas aumento y disminuciones máximas de los coeficientes c_1 y c_2 .

Gráfico 54. Coeficientes función objetivo c_j



Fuente: Gráfico obtenido de Excel

6.6.-CONCLUSIONES

Lo principal es haber comprendido el término, ¿Qué pasaría si...?, pues nos ha permitido deducir a través de las tablas de resultados de sensibilidad y de SOLVER, lo mismo que observábamos gráficamente. Esto es si variamos únicamente un parámetro a la vez como el de recursos y precios o costos, cuanto aumentaría o disminuiría nuestro valor óptimo, y hasta cuanto podríamos aumentar o disminuir ese valor, sin salirnos

del vértice óptimo hallado. También observamos que no todo está dicho en el alcance de los resultados de SOLVER, uno de ellos es el de precio sombra, permitiendo que la administración, pueda tomar decisiones más profundas y eficientes.

6.7.-CUESTIONARIO

6.7.1.-VERDADERO-FALSO

1. Es una herramienta exacta el análisis de sensibilidad. (V) (F)
2. Se modifica la pendiente cuando cambia el lado derecho de una restricción. (V) (F)
3. Se aumentan las oportunidades de que un modelo sea beneficioso para la administración al utilizar análisis de sensibilidad. (V) (F)
4. Al incrementar el lado derecho de una restricción \geq esta se torna más inflexible. (V) (F)
5. Se puede mejorar el valor óptimo VO de una PL, sumando restricciones. (V) (F)
6. El valor de holgura será negativo si un punto no cumple con la restricción \leq . (V) (F)
7. El índice de cambio de VO cuando aumenta el lado derecho de una restricción se llama precio sombra. (V) (F)
8. Con la finalidad de facilitar el encontrar la solución de una restricción se puede modificar su lado derecho. (V) (F)

6.7.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

Perfeccionar un modelo de PL, significa:

- a. Incrementar el VO en los modelos de maximización.
- b. Decrementar el VO en los modelos de minimización.
- c. Tanto a como b.

El análisis de sensibilidad en la PL:

- a. Se refiere a los cambios en la función objetivo.

b. Se refiere a los cambios en el lado derecho de las restricciones.

c. Tanto a como b.

(a) (b) (c)

Los cambios en los coeficientes de la función objetivo afectan:

a. La región factible.

b. Las pendientes de las restricciones.

c. La función objetivo.

d. Ninguna de las anteriores.

Los cambios en los recursos disponibles afectan:

a. La región factible.

b. Las pendientes de las restricciones.

c. La función objetivo.

d. Todas las anteriores.

6.7.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

13.- En una empresa de vajillas se realizan dos clases de decorados. El dueño desea saber con qué combinación maximizaría las utilidades.

Con las vajillas de decorado 1 se ganan \$300 dólares, y con las vajillas con el decorado 2 se gana \$210 dólares, la diferencia con la aplicación del tinte para el decorado 2, es que requiere una etapa más de tinturado, de acuerdo con la siguiente tabla.

vajilla	Etapas decorado				
	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5
Decorado 1	2	1	2	2	1

Decorado	2	1	1	0	1
2					

Los tiempos disponibles para cada etapa son:

Etapas decorado	(horas-maquina) disponibles por semana
Etapa 1	280
Etapa 2	190
Etapa 3	50
Etapa 4	50
Etapa 5	500

Plantear el problema como un modelo de programación lineal.

Utilizar los análisis de sensibilidad para estudiar los cambios en la solución que se producirán al pronosticarse las siguientes situaciones:

-Se modernizarán los equipos del estampado 4, con lo cual se incrementará a 100 horas.

-Se prevé el aumento del precio de las pinturas, por lo cual las ganancias percibidas por cada juego de vajillas decorado 1 serán de 2% menos.

14.- Para el siguiente modelo de PL.

$$Z(\text{Max}) = 300X_1 + 100X_2$$

$$20X_1 + 10X_2 \leq 40$$

$$20X_1 + 20X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

-Solucionar gráficamente, hallar la solución óptima.

- ¿Para que la solución óptima cambie en su totalidad, en cuanto se debe incrementar el lado derecho de la segunda restricción?

6.8.-GLOSARIO

Análisis paramétrico.

Sinónimo de *análisis de sensibilidad*

Análisis de postoptimalidad.

Sinónimo de *análisis de sensibilidad*.

Análisis de sensibilidad.

Análisis del efecto de los cambios introducidos en varios parámetros sobre el modelo, en particular su efecto sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo.

Límites permisible de Lado Derecho.

Rango de valores de Lado Derecho sobre el que permanece constante el precio sombra.

Límites de coeficiente objetivo.

Da los rangos de los coeficientes de función objetivo a través de los cuales no sucede cambio alguno en la solución óptima.

Precio sombra.

El precio sombra del Informe de sensibilidad de SOLVER es la razón de cambio del valor óptimo a medida que aumenta el Lado Derecho.

Valor objetivo óptimo (valor óptimo).

Valor óptimo de la función objetivo; es decir, el valor que asume la función objetivo cuando es evaluada en la solución óptima. Se abrevia VO.

Variable de holgura o de excedente.

Se emplea para convertir una restricción de desigualdad en restricción de igualdad.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS CAPITULO 5

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., y Orlin, J. B. (2009). Network flows: Theory, algorithms, and applications. Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., y Sherali, H. D. (2011). Linear programming and network flows (4a ed.). Wiley.

Bertsimas, D., y Tsitsiklis, J. N. (2004). Introduction to linear optimization. Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). Programas de computación para formular alimentos. Avicultura Profesional.

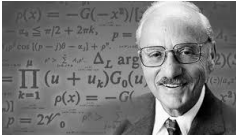
Cohen, M. A., y Murdock, J. (2012). Operations research: A practical introduction. Wiley.

- Daniel Izquierdo Granja y Juan José Ruiz Ruiz. (2006). PHPSIMPLEX (Versión 0.81) [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm
- Dantzig, G. B., y Thapa, M. (2003). Linear programming: Foundations and extensions (2a ed.). Springer.
- Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. P. (1993). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa. Prentice Hall.
- Gallagher, H., y Watson, J. (1990). Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. McGraw-Hill Interamericana.
- Gass, S. I. (1990). An illustrated guide to linear programming. Dover Publications.
- González Ariza, Á. L., y García Llinás, G. A. (2015). Manual práctico de investigación de operaciones I (4a ed.). Editorial Universidad del Norte.
- Hillier, F. S., y Lieberman, G. J. (2015). Introduction to operations research (10a ed.). McGraw-Hill.
- Kall, P., y Mayer, S. (2005). Stochastic optimization: Methods and applications. Springer.
- Luenberger, D. G., y Ye, Y. (2008). Linear and nonlinear programming (3a ed.). Springer.
- Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. (2000). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa (5a ed.). Prentice Hall.
- Murty, K. G., y Katta, S. (1983). Linear programming. Wiley.
- Peñafiel, L. (1976). Programación lineal. Trillas.
- Prawda Witenberg, J. (1977). Métodos y modelos de investigación de operaciones: Vol. 1. Limusa.
- Rardin, R. L. (2016). Optimization in operations research (2a ed.). Pearson.
- Rincón Abril, L. A. (2001). Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas. Universidad Nacional de Colombia.

- Sasieni, M. W., y Cohen, R. (2007). *Operations research: A practical guide to the use of OR techniques*. Wiley.
- Shamblin, J., y Stevens, G. T. (1988). *Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental*. McGraw-Hill Interamericana.
- Taha, H. A. (2017). *Operations research: An introduction* (10a ed.). Pearson.
- Varela, J. E. (1991). *Introducción a la investigación de operaciones*. Fondo Editorial Interamericana.
- Winston, W. L. (2004). *Operations research: Applications and algorithms* (4a ed.). Brooks/Cole.



CAPITULO 7. DUALIDAD



George Dantzig, el matemático e ingeniero estadounidense conocido como el "padre de la programación lineal", hizo contribuciones fundamentales al desarrollo del método simplex y al concepto de dualidad en la optimización. Aunque la teoría detrás del dual en la programación lineal ya había sido explorada por otros matemáticos como John von Neumann, Dantzig fue quien formalizó y popularizó su aplicación práctica a través del método simplex. Aquí algunos hechos anecdóticos relacionados con su descubrimiento del dual en la tabla simplex:

El problema del transporte y la intuición del dual

Dantzig trabajaba en problemas reales relacionados con la logística y la planificación militar durante la Segunda Guerra Mundial. En ese contexto, se dio cuenta de que cada problema de optimización podía tener un problema "dual" asociado, que ofrecía una perspectiva complementaria.

Mientras desarrollaba el método simplex, Dantzig notó que las restricciones de un problema de programación lineal podían interpretarse de manera dual como variables, y viceversa.

TEMA 7: OBTENCIÓN DEL PRIMAL Y DEL DUAL

7.1.-OBJETIVOS

- Obtener el primal de un modelo matemático de un problema de programación lineal.
- Obtener el Dual, conocido el primal
- Interpretar los resultados obtenidos del Dual

7.2.-INTRODUCCION

Uno de los descubrimientos más importantes durante el desarrollo inicial de la programación lineal fue el concepto de dualidad y sus importantes ramificaciones. Para Hiller y Lieberman: "Este descubrimiento reveló que, asociado a todo problema de programación lineal, existe otro problema lineal llamado dual." (2000). Desde distintos puntos de vista las relaciones entre el problema dual y el original (llamado primal) son muy útiles. Por ejemplo, se verá que, en realidad, la solución óptima del problema dual es la que proporciona los precios sombra.

El análisis de sensibilidad en programación lineal y el método simplex ofrece una perspectiva enriquecedora al permitir evaluar cómo las modificaciones en los parámetros afectan la función objetivo. Esto resulta especialmente útil para tomar decisiones informadas en escenarios dinámicos y optimizar resultados en función de los cambios observados.

La dualidad en la programación lineal establece una relación intrínseca entre problemas de maximización y minimización. Esto significa que cualquier problema de maximización tiene un problema dual equivalente de minimización, y viceversa. Esta propiedad permite analizar y resolver problemas desde distintas perspectivas, simplificando los procedimientos y ofreciendo nuevas posibilidades al trabajar con la tabla simplex. Además, se puede observar cómo la función objetivo y las restricciones interactúan al cambiar entre el problema primal y su dual, lo que resalta la importancia del precio marginal y la estructura matemática subyacente.

7.3.-EJERCICIO PROTOTÍPICO 2

INDUSTRIAS JARAMILLO

El descubrimiento accidental del dual

Según relatos, Dantzig no tenía inicialmente la intención de desarrollar una teoría de dualidad formal. Fue mientras trabajaba en la tabla simplex que notó que los valores de ciertas variables contenían información sobre un problema relacionado, el cual más tarde identificó como el problema dual.

Este descubrimiento fue en parte un subproducto de su interés por simplificar los cálculos y hacer más eficiente el método simplex.

El "regalo" de la dualidad

Una vez que Dantzig comprendió la relación entre el problema primal y el dual, lo describió como un "regalo" que la naturaleza matemática le había dado. La dualidad no solo simplificaba los cálculos, sino que también ofrecía interpretaciones económicas y físicas de los problemas de optimización.

Aplicaciones inesperadas del dual

Dantzig se sorprendió al descubrir que el dual no solo era útil para verificar soluciones óptimas, sino también para interpretar los resultados de manera práctica. Por ejemplo, en problemas económicos, las variables duales podían interpretarse como precios sombra o costos marginales.

La influencia de von Neumann

Aunque Dantzig desarrolló el método simplex de forma independiente, tuvo una conversación con John von Neumann, quien ya había trabajado en la teoría de juegos y la dualidad. Según Dantzig, von Neumann le explicó que su trabajo estaba relacionado con la teoría de juegos y el famoso teorema minimax. Esta conversación inspiró a Dantzig a profundizar en la teoría dual desde una perspectiva más teórica.

INDUSTRIAS JARAMILLO(IJ), produce dos líneas de molinos para minería. Una de sus líneas de productos, llamada Molinos Chilenos, se utiliza de manera primordial en aplicaciones de trituración líquida. La otra línea, denominada molinos de bolas, está destinada a la trituración de material en seco. Las M1 y M2 son hechas en los mismos galpones y con las mismas herramientas. Las predicciones económicas indican que se podrían vender normalmente todas las M1 y M2 que se fabriquen. Se desea pronosticar cuantas M1 y M2 se deben fabricar para obtener máximas ganancias. La gerencia tiene que recomendar ahora una meta de producción para el mes próximo.

Los datos de IJ

La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

1. El margen de contribución unitaria de IJ es de \$5000 por cada **M1** vendido y de \$4000 por cada **M2**.
2. En cada galpón pasan por mecanizado cualquier M1 o M2.
3. El galpón A dispondrá el próximo mes de 150 horas y el galpón B de 160 horas. En el galpón A, cada M1 necesita 10 horas de mecanizado y cada M2, 15 horas. En el galpón B, cada M1 necesitara de 20 horas de mecanizado, y cada M2 ,10 horas. Estos datos aparecen resumidos en la tabla 12.
4. Las pruebas de los M1 y M2, serán realizadas en un galpón independiente, manejado por el sindicato de trabajadores, quien exige no menos de 135 horas, para sus trabajadores, los cuales gastan 30 horas en cada M1 y 10 horas por cada M2. Esta información se resume en la tabla 13.
5. El directorio como una medida de posicionamiento en el mercado deberá fabricar por lo menos una **M1** por cada tres **M2**.
6. Un distribuidor importante ha pedido para el siguiente mes 5 equipos sin importar cuantos son M1 y cuantos son M2.

Se desea determinar la producción de M1 y M2 que maximizaría las ganancias

Tabla 44. Datos de maquinado de IJ

GALPON	HORAS		
	POR M1	POR M2	TOTAL, DISPONIBLE
A	10	15	150
B	20	10	160

Fuente: elaboración propia

Tabla 45. Datos de prueba de IJ

	1 M1	1 M2	Horas totales requeridas
Horas de prueba	30	10	135

Fuente: elaboración propia

Su modestia sobre el descubrimiento

A pesar de la importancia de la dualidad en la programación lineal, Dantzig siempre fue humilde respecto a su contribución. Solía decir que simplemente "siguió las matemáticas" y que el concepto de dualidad ya estaba implícito en las formulaciones matemáticas previas.

SOLUCIÓN ANALÍTICA

MODELO MATEMATICO

DATOS

VARIABLES DE DECISION

M1=Molino Chileno

M2=Molino de Bolas

VARIABLES TECNICAS

RECURSOS

FUNCIÓN OBJETIVO MAXIMIZAR

$$Z(\text{Max}) = 5000M1 + 4000M2 = \text{UTILIDAD}$$

Sujeto A:

$$M1 + M2 \geq 5 \quad \text{Restricción de producción mínima}$$

$$M1 - 3M2 \leq 0 \quad \text{Restricción de balance de posición en el mercado}$$

$10M_1 + 15M_2 \leq 150$ **Restricción de Capacidad del Galpón A**

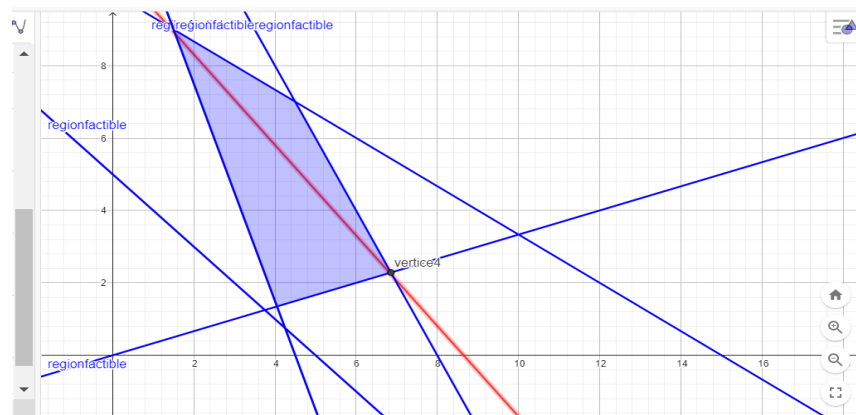
$20M_1 + 10M_2 \leq 160$ **Restricción de Capacidad del Galpón B**

$30M_1 + 10M_2 \geq 135$ **Restricción mínima cantidad de horas para pruebas**

$M_1 \geq 0 ; M_2 \geq 0$ **Restricciones de no negatividad**

Gráfico 55.

Valor optimo vertice 4



La dualidad en la industria del transporte:

El caso de las aerolíneas

Episodio: Una aerolínea importante estaba optimizando la asignación de aviones a rutas para maximizar las ganancias. En el problema primal, se buscaba asignar los aviones de manera eficiente, considerando restricciones como la capacidad de los aeropuertos y la demanda de pasajeros.

Descubrimiento dual: El problema dual reveló el valor sombra de cada restricción, mostrando cuánto aumentaría la ganancia si se pudiera aumentar la capacidad de un aeropuerto específico. Esto llevó a la aerolínea a negociar tarifas más bajas con ciertos aeropuertos clave para aumentar su capacidad de operaciones en esos lugares.

Fuente: *Gráfico obtenido de GEOGEBRA*

A Las inecuaciones con \geq , se les agrega una variable de holgura $-S_j$

$M_1 + M_2 - S_1 = 5$

$M_1 - 3M_2 + S_2 = 0$

$10M_1 + 15M_2 + S_3 = 150$

$20M_1 + 10M_2 + S_4 = 160$

$30M_1 + 10M_2 - S_5 = 135$

La solución óptima se encuentra en la intersección de las rectas:

$10M_1 + 15M_2 = 150$

$20M_1 + 10M_2 = 160$

Donde

$(M_1, M_2) = (4.5, 7)$

y:

$$Z(\text{máx.}) = \$5.000 (4.5) + \$4.000 (7)$$

$$Z(\text{máx.}) = \$50.500$$

La pregunta que nos haremos, y que se responderá a través de una solución DUAL, es:

¿Cuánto es lo mínimo que IJ , estaría dispuesto a recibir por la venta de sus recursos B_i , estimando de esta forma cual sería la actividad más rentable, vender o producir?



Optimización agrícola:

El valor dual del agua

Episodio: En una región agrícola, los agricultores utilizaban programación lineal para decidir qué cultivos plantar y en qué proporciones, maximizando las ganancias dadas las restricciones de agua y tierra disponibles.

Descubrimiento dual: El análisis dual mostró el valor económico del agua (es decir, cuánto aumentaría la ganancia si se dispusiera de más agua). Esto llevó a los agricultores a invertir en sistemas de riego más eficientes y a reestructurar acuerdos de distribución de agua entre ellos.

Este análisis se puede realizar por medio de la técnica dual, para lo cual será necesaria la formulación de este modelo, a partir del anterior.

“En consecuencia, con el problema primal en la forma de maximización, el problema dual está en la forma de minimización. Aún más, el problema dual usa exactamente los mismos parámetros que el problema primal, pero en diferentes lugares”(Frederick S. Hiller and Gerald J. Lieberman, 2000)

Si el modelo primal es de maximización, entonces el modelo dual es de minimización. Se sabe que lo mínimo que IJ está dispuesto a recibir por la venta de recursos es \$50.500 (**$Z_{\text{primal}} = Z_{\text{dual}}$**). Pero, ¿de qué forma los recibe? Para explicar este análisis hay que recordar que antes de pasar a un modelo dual es necesario normalizar el modelo primal, es decir, todas las restricciones deben ser \leq en maximización y \geq en minimización.

En consecuencia, con el problema primal en la forma de maximización, el problema dual está en la forma de minimización. Aún más, el problema dual usa exactamente los mismos parámetros que el problema primal, pero en diferentes lugares, tal como se resume a continuación.

1. Asigne una variable dual por cada restricción primal.
2. Construya una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) y el coeficiente objetivo de la variable primal j -ésima definen respectivamente los lados izquierdo y derecho de la restricción dual j -ésima.
4. Los coeficientes objetivo-duales son iguales a los lados derechos de las ecuaciones de restricción primales.

5. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción en el dual (es decir, \leq o \geq) es que si el objetivo dual es de minimización (es decir, apunta hacia abajo), entonces todas las restricciones serán del tipo \geq (es decir, apuntan hacia arriba). Lo opuesto aplica cuando el objetivo dual es de maximización.

Por lo que ahora se tienen las siguientes relaciones generales entre los problemas primal y dual. Los parámetros de una restricción (funcional) en cualquier problema son los coeficientes de una variable en el otro y los coeficientes de la función objetivo en un problema son los valores del lado derecho en el otro.



Fabricación de acero:

El costo de los recursos

Episodio: Una empresa siderúrgica utilizaba programación lineal para minimizar los costos de producción al fabricar diferentes tipos de acero con restricciones de materias primas y capacidad de las máquinas.

Descubrimiento dual: El problema dual mostró que el recurso más crítico era el carbón de alta calidad, ya que su valor sombra era mucho mayor que el de otros materiales. Esto llevó a la empresa a renegociar contratos con proveedores de carbón para asegurar un suministro estable, incluso a un costo ligeramente mayor, ya que el impacto en la producción era significativo.

PRIMAL

$$Z(\text{Max}) = 5000M_1 + 4000M_2$$

Sujeto A:

$$-M_1 - M_2 \leq 5$$

$$M_1 - 3M_2 \leq 0$$

$$10M_1 + 15M_2 \leq 150$$

$$20M_1 + 10M_2 \leq 160$$

$$-30M_1 - 10M_2 \leq -135$$

$$M_1 \geq 0 ; M_2 \geq 0$$

DUAL

$$Z(\text{Min}) = -5Y_1 + (0)Y_2 + 150Y_3 + 160Y_4 - 135Y_5$$

Sujeto A:

$$-Y_1 + Y_2 + 10Y_3 + 20Y_4 - 30Y_5 \geq 5000$$

$$-Y_1 - 3Y_2 + 15Y_3 + 10Y_4 - 10Y_5 \geq 4000$$

$$Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4 \quad Y_5 \geq 0$$

Respecto a este modelo, por tener cinco variables Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 , es imposible de solucionar por el método gráfico; Así que usaremos las relaciones de las tablas óptimas del primal y del dual para su solución.

La table Simplex inicial será:

Gráfico 55.

Tabla Simplex1 PRIMAL



Logística y cadenas de suministro:

El valor de los almacenes

Episodio: Una empresa de logística estaba optimizando su red de distribución para minimizar los costos de transporte desde sus almacenes a los puntos de venta.

Descubrimiento dual: El análisis dual reveló que ciertos almacenes eran significativamente más valiosos que otros en términos de su contribución a la reducción de costos totales. Esto llevó a la empresa a cerrar almacenes menos estratégicos y a invertir en ampliar los almacenes con mayor valor dual.

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-G	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
			M1	M2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	K_1	K_2			
-G	K_1		1	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	5	5
0	S_2		1	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	S_3		10	15	0	0	1	0	0	0	0	0	150	15
0	S_4		20	10	0	0	0	1	0	0	0	0	160	8
-G	K_2		30	10	0	0	0	0	-1	0	1		135	4.5
Z_j			-31 G	-11 G	G	0	0	0	G	-G	-G		-140 G	
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$			5000 +31 G	4000 +11 G	-G	0	0	0	-G	0	0			

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

La tabla Simplex final será:

Gráfico 56.

Tabla solución Óptima PRIMAL

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	5000	4000	0	0	0	0	0	0	-G	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variable Básicas y No Básicas	M1	M2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	K_1	K_2		
4000	M2		0	1	0	0	0.1	-0.05	0	0	0	7	
5000	M1		1	0	0	0	-0.05	0.75	0	0	0	4.5	
0	S_2		0	0	0	1	0.35	-0.25	0	0	0	16.5	
0	S_5		0	0	0	0	-0.5	1.75	1	0	-1	70	
0	S_1		0	0	1	0	0.05	0.25	0	-1	0	6.5	
	Z_j		5000	4000	0	0	150	1750	0	0	0		
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		0	0	0	0	-150	-1750	0	-G	-G	50500	

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

Usando esta tabla de solución Óptima del PRIMAL, procederemos a construir directamente la Tabla Óptima para el DUAL.

Utilizaremos los siguientes gráficos (Gráfico 2 y Gráfico 3) de correspondencias para construir directamente la tabla DUAL (tabla 5) de la PRIMAL (Gráfico 3).

Problema dual

Una nueva programación lineal derivada del primario según un conjunto de reglas de transformación.

VARIABLES duales

Las variables del problema dual. El valor óptimo de la variable dual i -ésima es la razón del aumento del valor óptimo al aumento del j -ésimo segundo miembro.



Energía:

El costo real de la electricidad

Episodio: En un mercado de energía, una empresa estaba optimizando la generación de electricidad a partir de diferentes fuentes (renovables y no renovables) para satisfacer la demanda al menor costo posible.

Descubrimiento dual: El análisis dual mostró el costo marginal de la electricidad en diferentes momentos del día. Esto permitió a la empresa diseñar tarifas dinámicas para los consumidores, incentivando el uso de electricidad en horarios de menor demanda y reduciendo la presión en la red eléctrica durante las horas pico.

Tabla 57.

Correspondencia Tabla solución Óptima PRIMAL a DUAL

PRIMAL		Corresponde a:	DUAL	
VARIABLES BASICAS	M_1	→	S_1	VARIABLES NO BASICAS
	S_2	→	S_2	
	S_2	→	Y_2	
	S_5	→	Y_5	
	S_1	→	Y_1	
VARIABLES NO BASICAS	S_3	→	Y_3	VARIABLES BASICAS
	S_4	→	Y_4	

Fuente: elaboración propia

Tabla 58.

Correspondencia Tabla solución Óptima PRIMAL a DUAL

PRIMAL	Corresponde a:	DUAL
a_{ij}	Transpuesta y con signo contrario	a_{ij}
variable básica B_i	correspondiente	variable no básica C_j
variable no básica C_j	correspondiente	variable básica B_i

Fuente: elaboración propia

En el modelo dual no se usan las variables artificiales k_j , quedando:

Tabla 59.

Tabla óptima DUAL

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica B_i	Coeficiente Básico C_j	-5	0	-13	0	0	Recurso B_i
			Y_1	Y_2	Y_5	S_1	S_2	
150	Y_3		-0.05	0.25	-1.75	-0.05	0.05	150
160	Y_4		-0.05	0	0	0	0.05	175



Comercio minorista:

Precios dinámicos y estrategias de descuento

Episodio: Una cadena de supermercados utilizaba programación lineal para determinar los precios óptimos de los productos, maximizando las ganancias mientras cumplía con restricciones de inventario y demanda.

Descubrimiento dual: El problema dual mostró que ciertos productos tenían un impacto desproporcionado en las ganancias totales debido a su relación con otros artículos (productos complementarios). Esto llevó a la empresa a ajustar sus estrategias de descuento, ofreciendo promociones en productos clave para aumentar las ventas de toda la categoría.

Z_j	-11.5	-16.5	-20.5	-4.5	-7	50500
Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$	6.5	16.5	70	4.5	7	

Fuente: elaboración propia

DUAL

$$Z(\text{Min}) = -5Y_1 + (0)Y_2 + 150Y_3 + 160Y_4 - 135Y_5$$

Sujeto A:

$$-Y_1 + Y_2 + 10Y_3 + 20Y_4 - 30Y_5 \geq 5000$$

$$-Y_1 - 3Y_2 + 15Y_3 + 10Y_4 - 10Y_5 \geq 4000$$

$$Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4 \quad Y_5 \geq 0$$

Cuando analizamos sensibilidad de este mismo problema, se estudió el caso en el que se variaba en una unidad la capacidad de un recurso B_i , para ver cómo era afectada la utilidad Z (max), a esto se le denomina Precio Sombra, costo marginal y ahora lo denominaremos PRECIO DUAL, en relación con que el valor obtenido es el mismo que el de la solución para las variables duales Y_j . Esto mismo nos permite responder a la pregunta planteada por el problema, ya que la solución dada por las variables duales es el precio mínimo al que venderíamos este recurso B_j , si lo pusiéramos en el mercado. Así que si una hora de producción del departamento A o B, no tiene un precio de \$150,00 o \$175,00 dólares respectivamente, no es rentable, por lo que sería mejor continuar produciendo molinos.

7.4.-CONCLUSIONES

La relación entre el problema primal y el dual en la programación lineal es fundamental, ya que ambos están estrechamente vinculados. A partir del ejemplo del molino de bolas, se destacó cómo transformar un sistema de inecuaciones en igualdades para desarrollar el modelo primal. Posteriormente, al derivar el modelo dual estándar, se pudo comprobar que este enfoque puede reducir el número de ecuaciones, optimizando el uso de recursos computacionales.

Un aspecto clave identificado es que las variables duales representan los precios marginales, denominados en este contexto como precios duales. Estos valores son esenciales en los análisis de sensibilidad y son reportados por herramientas como SOLVER bajo ese término. Además, en la construcción del modelo dual no fue necesario incluir variables artificiales, lo que simplificó el proceso considerablemente.

En conclusión, existe una conexión tan estrecha entre el problema primal y el dual que la solución óptima de uno permite obtener automáticamente la solución óptima del otro. Este vínculo no solo facilita la resolución de problemas, sino que también optimiza el análisis y la interpretación de resultados en programación lineal.

El descubrimiento del dual en la tabla simplex no fue un evento planeado, sino una consecuencia natural del trabajo de Dantzig en problemas prácticos de optimización. Su capacidad para conectar conceptos teóricos con aplicaciones reales lo convirtió en una figura clave en la historia de las matemáticas aplicadas y la ingeniería.

7.5.-CUESTIONARIO

7.5.1.-VERDADERO-FALSO

1. ¿Si el ejercicio dual tiene los parámetros $C_j - Z_j$ negativos, entonces el primal será de maximización? (V) (F)
2. En un primal, el número de variables X_i en la función objetivo es igual al número de variable Y_i del dual. (V) (F)
3. Los $C_j - Z_j$ del modelo dual son Los B_i del problema primal. (V) (F)
4. El valor informático del estudio del dual, se vincula al hecho de que se puedan hallar al mismo tiempo su primal y su dual. (V) (F)
5. En el dual y el primal las variables artificiales son las mismas. (V) (F)
6. En el dual los B_i de las variables no básicas son los $C_j - Z_j$ del primal. (V) (F)
7. Si el ejercicio posee una gran cantidad de restricciones, entonces es más eficaz resolver el dual que el primal de este ejercicio. (V) (F)

8. En ciertos ejercicios la solución del dual presenta menos dificultades que el primal, al realizarse menos iteraciones. (V) (F)
9. Se produce una deducción económica más sugerente al utilizar los valores óptimos de las variables duales. (V) (F)
10. En ocasiones la aplicación de la dualidad permite evitar el uso de variables artificiales. (V) (F)

7.5.2.-OPCIÓN MÚLTIPLE

El resultado de la función objetivo del dual es:

- a. Del primal el **Zj**
- b. Si es de maximización mayor que el **Zj** del primal
- c. Si es de minimización del primal, es menor tanto **a** como **b**

En el primal las variables básicas son:

- a. Del dual las variables básicas
- b. Del dual las variables artificiales
- c. Del dual las variables no básicas
- d.- Todas las anteriores

En el primal las variables de holgura son:

- a. Del dual las variables no básicas
- b. No son tomadas en cuenta
- c. Del dual las variables básicas
- d.- Ninguna de las anteriores

Las restricciones en un primal que se le saca el dual tienen que ser:

- a. Menor o igual
- b. Mayor o igual
- c. De igualdad no determinada.

d.- Todas las anteriores

7.5.3.-EJERCICIOS PROPUESTOS

Hallar el Dual en cada uno de los siguientes ejercicios.

15.- Un trapiche produce melaza y panela en unidades de 50 kilos. La producción de melaza más 8 unidades es mayor o igual que el doble de la producción de panela. También se da que la producción de 36 unidades es igual o mayor que el triple de la producción de panela más el doble de producción de melaza. Al salir al mercado cada unidad de melaza se comercializa en \$16 dólares y cada unidad de panela en \$4 dólares. Si se quiere maximizar ganancia se debe hallar el número de unidades a producir de panela y de melaza respectivamente.

16.- Un taller de ropa produce ternos y vestidos de dama, para producir un terno se requieren 2 m² de tela de paño, y 1 m² de tela de algodón, y para sacar un vestido se necesitan 2m² de paño y 2 m² de algodón, El taller cuenta con 160 ms de tela de paño y 240 m² de tela de algodón, Si los ternos se venden en \$100 dólares y los vestidos en \$200 dólares, ¿Cuál debe ser la producción de ternos y vestidos para maximizar el beneficio?

17.- Se desea mezclar dos productos X1 y X2, para desarrollar una dieta para pollos, cuyo contenido mínimo de vitaminas debe ser de 4 mg de vitamina B1, 6 mg de vitamina B2, 60 mg de vitamina B3, y 4 mg de vitamina B5. El precio por kilo de X1 es de \$0.20 dólares y el de X2 es de \$0.30 dólares. El valor vitamínico de X1 y X2 se da en la siguiente tabla:

	B1	B2	B3	B5
X1	2	2	40	4
X2	2	6	15	1

¿Cómo se debería realizar esta mezcla para minimizar costos?

18.- FERTIAGRO produce dos fertilizantes usando como bases dos mezclas con la composición de N, P, Ca, Ceniza indicada en la siguiente tabla:

	N(%)	P(%)	Ca(%)	CENIZA(%)
MEZCLA 1	5	5	10	80
MEZCLA 2	5	10	5	80

FERTIAGRO dispone de las siguientes cantidades de N, P, Ca y Ceniza a los siguientes precios:

	N(%)	P(%)	Ca(%)	CENIZA(%)
Cantidad (Ton)	1100	1800	2000	ilimitada
Precio(\$/Ton)	\$2000	\$800	\$1600	\$100

FERTIAGRO, saca al mercado la Mezcla 1 a un precio de \$715 la tonelada, y la mezcla 2 a \$690 la tonelada, ¿Cómo debe realizar las mezclas FERTIAGRO, para obtener la máxima ganancia?

19.- Productos DELAURY necesita un préstamo de \$1000000 de dólares para modernizar maquinaria, en el mercado de capitales a encontrado dos fuentes de préstamo, con las siguientes condiciones:

	PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
FUENTE 1(\$)	700000	200000	4800000
FUENTE 2(\$)	250000	250000	1250000

El interés de oportunidad de DELAURY es de 0.22.

Los socios de DELAURY imponen las siguientes condiciones de pago:

	PUNTO 1	PUNTO 2	PUNTO 3
DELAURY(Máximo pago)	400000	2000000	900000

Buscar la manera de optimizar el préstamo a las dos fuentes sin exceder las restricciones.

20.- Jorge Castro tiene para invertir \$1000000. Quiere realizar inversiones en dos tipos de bonos B1 y B2. Los B1 tienen más riesgo, pero dan 15% de beneficio, y las B2 son menos arriesgadas, pero solo dan el 8%. Jorge decide entonces invertir máximo \$600000 en B1, y como mínimo \$400000 en B2, también desea que lo realizado en B1 sea por lo menos lo mismo que la inversión en B2. ¿Cómo debería invertir para que su ganancia se maximice?

7.6.-GLOSARIO

Forma estándar para restricciones de igualdad

La forma del modelo de programación lineal que se resuelve mediante computadora.

Precio dual

El i -ésimo precio dual en los resultados impresos de la computadora es la razón de mejoría del valor óptimo cuando se aumenta el segundo miembro.

Problema dual

Una nueva programación lineal derivada del primario según un conjunto de reglas de transformación.

Problema primario

La programación lineal original.

Variables duales

Las variables del problema dual. El valor óptimo de la variable dual i -ésima es la razón del aumento del valor óptimo al aumento del j -ésimo segundo miembro.



CAPITULO 8. DUALIDAD

Tema 8. PROBLEMA DUAL APLICADO A LA ECONOMÍA



Industria automotriz:

El valor de la capacidad de producción

Episodio: Un fabricante de automóviles estaba optimizando la asignación de recursos entre diferentes plantas para maximizar la producción de vehículos.

Descubrimiento dual: El problema dual reveló que la planta con mayor valor dual era la más crítica para la producción total. Esto llevó a la empresa a priorizar inversiones en esa planta, como la modernización de equipos y la capacitación de empleados, para aumentar su capacidad.

8.1.-OBJETIVOS:

- Obtención precios duales.
- Relación Soluciones primal-dual frente a los costos de oportunidad del mercado

8.2.-INTRODUCCIÓN:

Análisis Económico

Al tener que ver los problemas de programación lineal con la asignación de recursos limitados entre actividades competitivas, el concepto de dualidad toma para los economistas una interpretación útil más sencilla. Esta interpretación denominada PRIMAL; donde x_j es el nivel de la actividad j , c_j es la ganancia unitaria de la actividad o el precio de venta o el costo unitarios de la actividad j ; B_i es la cantidad de recurso i disponible, y a_{ij} es la cantidad de recurso i usada para cada unidad de actividad j . Si este primal es un problema de maximización normal, las variables del Dual obtenidas se relacionarán entonces con el valor de los recursos que tiene disponibles el tomador de decisiones. Por lo que las variables del dual recibirán el nombre de precios sombra de los recursos, o precios duales.

Para comprender la relevancia económica del análisis dual, es fundamental examinar los diversos aspectos económicos que los componentes de los modelos representan los modelos primal - dual. Estos aspectos permiten identificar relaciones clave y optimizar recursos en distintos escenarios económicos, contribuyendo así a una mejor toma de decisiones y al diseño de estrategias más eficientes.

En este orden de ideas se explicarán dicho significado en forma detallada en el ejemplo dado a continuación.

8.3.-Problema prototípico COOPERATIVA NUEVOPILO

Cooperativa NUEVO PILO, tiene dos proyectos de inversión. El proyecto 1 tiene que ver con la fabricación de artículos de pesca (atarrayas), y el proyecto 2 con la fabricación de (piraguas).

Los proyectos tienen los siguientes flujos de dinero por unidad fabricada (Tabla 46).



Finanzas y portafolios de inversión

Episodio: Un banco estaba utilizando programación lineal para optimizar su portafolio de inversiones, maximizando el retorno esperado mientras minimizaba el riesgo.

Descubrimiento dual: El análisis dual mostró el costo de oportunidad asociado a las restricciones de liquidez. Esto llevó al banco a flexibilizar ciertas restricciones, como aumentar ligeramente el riesgo aceptable, para obtener mayores retornos.

La fabricación de cualquiera de los productos toma un mes, y la venta se realiza al mes siguiente de su fabricación. En el caso específico de las piraguas el costo total de fabricación es de \$200 dólares por unidad, de las cuales \$100 dólares se deben pagar de inmediato, para comprar la materia prima, y los restantes \$100 dólares al final del mes. En el caso de los artículos de pesca (atarrayas) se debe pagar \$25 dólares de inmediato y \$100 dólares al final del mes. La cooperativa usa una tasa de interés de oportunidad de 2% mensual.

Al momento la cooperativa dispone de \$2.400 dólares, y dentro de un mes dispondrá de \$4.000 dólares. Por otro lado, el dinero que no se utilice de forma inmediata no podrá ser ahorrado para dentro de un mes. El precio de venta es \$362.09 dólares y \$190.43 dólares para las atarrayas y las piraguas, respectivamente.

Utilizando esta información:

- Formule el modelo de programación lineal.
- Halle la solución utilizando el método gráfico y el método simplex.
- Solución del dual gráficamente y utilizando el método simplex, y haga el análisis económico del problema dual y sus componentes.
- ¿Qué importancia tienen las soluciones primal-dual frente a los costos de oportunidad del mercado?

8.4.-SOLUCION

8.4.1. --Solución PRIMAL

-La cooperativa NUEVO PILO intentará encontrar el número de atarrayas y piraguas que se deben fabricar, por lo que para maximizar el valor presente neto total, es fundamental considerar las restricciones de capital tanto en el presente como en el futuro cercano. Esto implica descontar las cantidades futuras a su valor presente mediante una tasa adecuada. Al realizar los cálculos intermedios, se debe priorizar la asignación eficiente de recursos disponibles para obtener el mayor rendimiento posible, teniendo en cuenta las limitaciones iniciales y las que puedan surgir dentro de un mes. Esto se observa en el siguiente esquema de flujo de dinero.

Tabla 46.*Flujo de dinero*

productos	actual	1 mes	2 meses
atarraya	\$100	\$100	\$362.09
piragua	\$25	\$100	\$190.43

Fuente: elaboración propia

Valor presente neto:

Atarrayas:

$$\text{VPN}(0.02) = -(100) - (100/1.02) + (362.09 / (0.02)^2) = 150$$

Piraguas:

$$\text{VPN}(0.02) = -(25) - (100/1.02) + (190.43 / (0.02)^2) = 60$$

\$150 y \$60 son los dólares en valor presente neto de los valores futuros (inversiones al mes e ingresos a los dos meses).

MODELO MATEMÁTICO

Definición de variables:

A: cantidad de atarrayas (unidades)**P:** cantidad de piraguas (unidades)

Función objetivo

$$\mathbf{Z \text{ (máx)} = 150 A + 60 P}$$

Sujeto a:

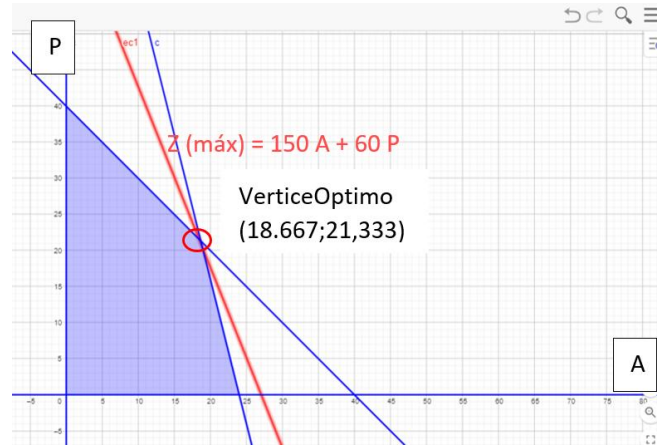
$$\mathbf{100A + 25P \leq 2400 \text{ (Máxima cantidad actualmente disponible)}}$$

$$\mathbf{100A + 100P \leq 4000 \text{ (Cantidad máxima de capital disponible en un mes)}}$$

A, P ≥ 0 restricciones de no negatividad.

Solución gráfica.**Gráfica 60.**

Solución gráfica PRIMAL



Fuente: Gráfico obtenido de GEOGEBRA

La solución grafica nos da una producción de 18.667 atarrayas y de 21.33 piraguas, con una utilidad máxima de:

$$\mathbf{Z \text{ (máx)} = 150 A + 60 P}$$

$$\mathbf{Z \text{ (máx)} = 150(18.667) + 60 (21.33) = 4080}$$

Max utilidad= \$4080 dólares= (valor presente neto total)

Solución Analítica**Función objetivo**

$$\mathbf{Z \text{ (máx)} = 150 A + 60 P + (0)S1 + (0)S2}$$

Sujeto a:

$$\mathbf{100A + 25P + S1 = 2400}$$

$$\mathbf{100A + 100P + S2 = 4000}$$

$$\mathbf{A, P \geq 0}$$

Aplicando la tabla simplex (método simplex) Grafica 61, a este problema:

Grafica 61.

Tabla simplex 1 PRIMAL

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	150	60	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	A	P	S_1	S_2		
-0	S_1		100	25	-1	0	2400	24
0	S_1		100	100	0	1	4000	40
	Z_j		0	0	0	0		
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		50	60	0	0	0	

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

Grafica 62.

Tabla simplex 2 PRIMAL

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	150	60	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	A	P	S_1	S_2		
150	A		1	0.25	0.01	0	24	96
0	S_2		0	75	1.5	1	1600	21.33
	Z_j		150	37.5	-1.5	0		
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		0	22.5	0	0	3600	

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993

Grafica 63.

Tabla simplex 3. Solución óptima. PRIMAL

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	150	60	0	0	Recurso B_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	A	P	S_1	S_2		
150	A		1	0	0.013	0.013	18.667	96
60	P		0	1	0.013	0.013	21.33	21.33
	Z_j		150	60	1.2	0.3		
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		0	0	-1.2	-0.3	4080	

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

El valor presente neto total es igual a \$4.080 dólares.

A = 18.667 atarrayas que se deben fabricar y vender.

P = 21.3333 piraguas que se deben fabricar y vender.



Telecomunicaciones:
Asignación de ancho de banda

Episodio: Una empresa de telecomunicaciones estaba optimizando la asignación de ancho de banda entre diferentes clientes y servicios para maximizar los ingresos.

Descubrimiento dual: El problema dual mostró el valor marginal del ancho de banda para diferentes segmentos de clientes. Esto llevó a la empresa a ajustar sus precios y priorizar a los clientes más rentables durante picos de demanda.

Este valor es exactamente, el mismo que obtuvimos en la solución grafica (grafico 60).

8.4.2.--Solución DUAL

-Ahora hallaremos el DUAL del problema, y resolveremos este dual gráfica y analíticamente

Tabla 47.

Correspondencia Tabla Optima PRIMAL a DUAL

PRIMAL		Corresponde a:	DUAL	
VARIABLES BASICAS	A	→	S_1	VARIABLES NO BASICAS
	P	→	S_2	
VARIABLES NO BASICAS	S_1	→	Y_1	VARIABLES BASICAS
	S_2	→	Y_2	

Fuente: elaboración propia

Tabla 48.

Correspondencia Tabla Optima PRIMAL a DUAL

PRIMAL	Corresponde a:	DUAL
a_{ij}	Transpuesta y con signo contrario	a_{ij}
variable básica B_i	correspondiente	variable no básica $C_j Z_j$
variable no básica $C_j Z_j$	correspondiente	variable básica B_i

Fuente: elaboración propia

8.5.- DUAL

Función Objetivo

$$Z(\text{Min}) = 2400Y_1 + 4000Y_2 + (0)S_1 + (0)S_2 + (M)K_1 + (M)K_1 + (M)K_2$$

Sujeto A:

$$100Y_1 + 100Y_2 \geq 150$$

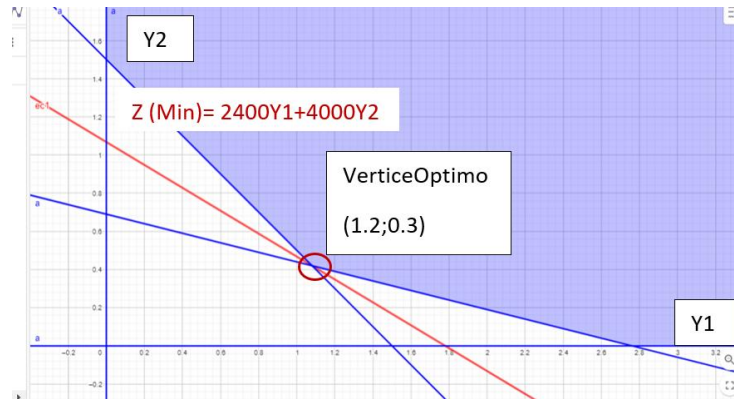
$$25Y_1 + 100Y_2 \geq 60$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

SOLUCIÓN GRÁFICA

Grafica 64.

Solución gráfica DUAL



Fuente: Gráfico obtenido de GEOGEBRA

De acuerdo con el resultado gráfico tenemos que:

$$Y_1 = \$1.2 \text{ dólares}$$

$$Y_2 = \$0.3 \text{ dólares}$$

Por lo que:

$$Z (\text{Min}) = 2400(1.2) + 4000(0.3) = \$4080$$

Esto significa que, para mantener este costo mínimo, tendríamos que por lo menos vender cada dólar actual a:

$$(1 + 1.2) = 2.2 = \text{cada dólar actual,}$$

Y cada dólar mensual en:

$$(1 + 0.3) = 1.3 = \text{cada dólar para dentro de un mes.}$$

Solución analítica DUAL

Aplicando la tabla simplex (método simplex), a este problema DUAL:

Gráfica 65.

Tabla DUAL simplex 1

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2400	4000	-135	0	G	G	Recursos b_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	Y_1	Y_2	S_1	S_2	K_1	K_2		
G	K_1		100	100	-1	0	1	0	150	1.5
G	K_2		-25	100	0	-1	0	1	60	0.6
	Z_j		125 G	200 G	-G	-G	G	G		
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		2400-125 G	4000-200 G	G	G	0	0	160-210 G	



Industria alimentaria:

Costos de ingredientes

Episodio: Una empresa de alimentos estaba optimizando la formulación de un producto (como cereales o pan) para minimizar los costos de producción mientras cumplía con restricciones de nutrientes y sabor.

Descubrimiento dual: El análisis dual mostró que ciertos ingredientes tenían un costo marginal muy alto en comparación con otros. Esto llevó a la empresa a reformular el producto utilizando sustitutos más económicos sin afectar la calidad.

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

Gráfica 66.

Tabla DUAL simplex 2

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2400	4000	0	0	G	G	Recursos b_i	Prueba factibilidad θ_i
		Variables Básicas y No Básicas	Y_1	Y_2	S_1	S_2	K_1	K_2		
G	K_1		75	0	-1	1	1	-1	90	1.2
4000	Y_2		0.25	1	0	0.01	0	0.01	0.6	2.4
	Z_j		1000+75 G	4000	-G	-40+G	G	40-G	2400+90 G	
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		1400-75 G	0	G	40-G	0	-40+2 G		

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

Grafica 67.

Tabla DUAL OPTIMA

Coeficiente Básico C_i	Variable Básica	Coeficiente Básicos y No Básicos C_j	2400	4000	0	0	G	G	Recurso B_i
		Variables Básicas y No Básicas	Y_1	Y_2	S_1	S_2	K_1	K_2	
2400	Y_1		-1	0	-0.013	0.013	0.013	-1	1.2
4000	Y_2		0	1	0.03	-0.013	-0.03	0.01	0.3
	Z_j		2400	4000	-18.667	-21.33	18.667	21.33	4080
	Prueba Optimalidad $C_j - Z_j$		0	0	18.667	21.33	G - 18.667	G - 21.33	

Fuente: Gráfico adaptado según Eppen, Gould y Schmidt, 1993.

Analizando el problema Dual anterior (molinos de bolas), encontramos la relación entre precios duales y Precios marginales, indicando la sensibilidad existente en la utilidad al variar en una unidad la capacidad de un recurso. O lo que era lo mismo si ameritaba producir o vender el recurso. En el caso de la cooperativa NUEVO PILO, el resultado del primal indica cuantas unidades de atarrayas y de piraguas hay que producir para aprovechar las inversiones que va a hacer la cooperativa el primer mes y el segundo. Ahora el precio DUAL indicaría cuanto se recibiría si vendiéramos nuestros recursos, que son las inversiones en dólares el primer mes, y dólares el segundo mes;

Y_1 =precio de cada dólar actual

Y_2 =precio de cada dólar en un mes

Esto indicaría cuan valioso es para el mercado, el dinero en circulación. Lo que se traduciría en cuanto interés tendría el mercado de divisas en pagar por hacer la inversión en otros sectores de la economía.

8.6.-CONCLUSIONES

- Se hallaron los valores óptimos del modelo dual o los valores mínimos que estaría a aceptar el director de la cooperativa por los recursos disponibles.

8.7.-GLOSARIO

Valor presente neto (vpn)

El método del Valor Presente Neto incorpora el valor del dinero en el tiempo en la determinación de los flujos de efectivo netos del negocio o proyecto, con el fin de poder hacer comparaciones correctas entre flujos de efectivo en diferentes periodos a lo largo del tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS CAPITULO 8

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., y Orlin, J. B. (2009). Network flows: Theory, algorithms, and applications. Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., y Sherali, H. D. (2011). Linear programming and network flows (4a ed.). Wiley.

Bertsimas, D., y Tsitsiklis, J. N. (2004). Introduction to linear optimization. Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). Programas de computación para formular alimentos. Avicultura Profesional.

Cohen, M. A., y Murdock, J. (2012). Operations research: A practical introduction. Wiley.

Daniel Izquierdo Granja y Juan José Ruiz Ruiz. (2006). PHPSIMPLEX (Versión 0.81) [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm

Dantzig, G. B., y Thapa, M. (2003). Linear programming: Foundations and extensions (2a ed.). Springer.

- Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. P. (1993). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa. Prentice Hall.
- Gallagher, H., y Watson, J. (1990). Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. McGraw-Hill Interamericana.
- Gass, S. I. (1990). An illustrated guide to linear programming. Dover Publications.
- González Ariza, Á. L., y García Llinás, G. A. (2015). Manual práctico de investigación de operaciones I (4a ed.). Editorial Universidad del Norte.
- Hillier, F. S., y Lieberman, G. J. (2015). Introduction to operations research (10a ed.). McGraw-Hill.
- Kall, P., y Mayer, S. (2005). Stochastic optimization: Methods and applications. Springer.
- Luenberger, D. G., y Ye, Y. (2008). Linear and nonlinear programming (3a ed.). Springer.
- Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. (2000). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa (5a ed.). Prentice Hall.
- Murty, K. G., y Katta, S. (1983). Linear programming. Wiley.
- Peñafiel, L. (1976). Programación lineal. Trillas.
- Prawda Witenberg, J. (1977). Métodos y modelos de investigación de operaciones: Vol. 1. Limusa.
- Rardin, R. L. (2016). Optimization in operations research (2a ed.). Pearson.

- Rincón Abril, L. A. (2001). Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas. Universidad Nacional de Colombia.
- Sasieni, M. W., y Cohen, R. (2007). Operations research: A practical guide to the use of OR techniques. Wiley.
- Shamblin, J., y Stevens, G. T. (1988). Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental. McGraw-Hill Interamericana.
- Taha, H. A. (2017). Operations research: An introduction (10a ed.). Pearson.
- Varela, J. E. (1991). Introducción a la investigación de operaciones. Fondo Editorial Interamericana.
- Winston, W. L. (2004). Operations research: Applications and algorithms (4a ed.). Brooks/Cole.

APÉNDICE AGUÍA SOLVER

**UNIVERSIDAD DE LIMA
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES Y ECONÓMICAS
CARRERA DE NEGOCIOS INTERNACIONALES
2018-2**

NOTA TÉCNICA SOBRE EL USO DEL SOLVER EXCEL

Versión 2.0

Gutiérrez Villaverde, Herberth E.¹

Cómo citar

Gutiérrez Villaverde, H. E. (2021). Manual básico de Solver Excel Versión 3.2. Universidad de Lima, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas.
<https://hdl.handle.net/20.500.12724/14396>

Editor

Universidad de Lima, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas

¹ Docente de la Universidad de Lima: hgutierrez@ulima.edu.pe

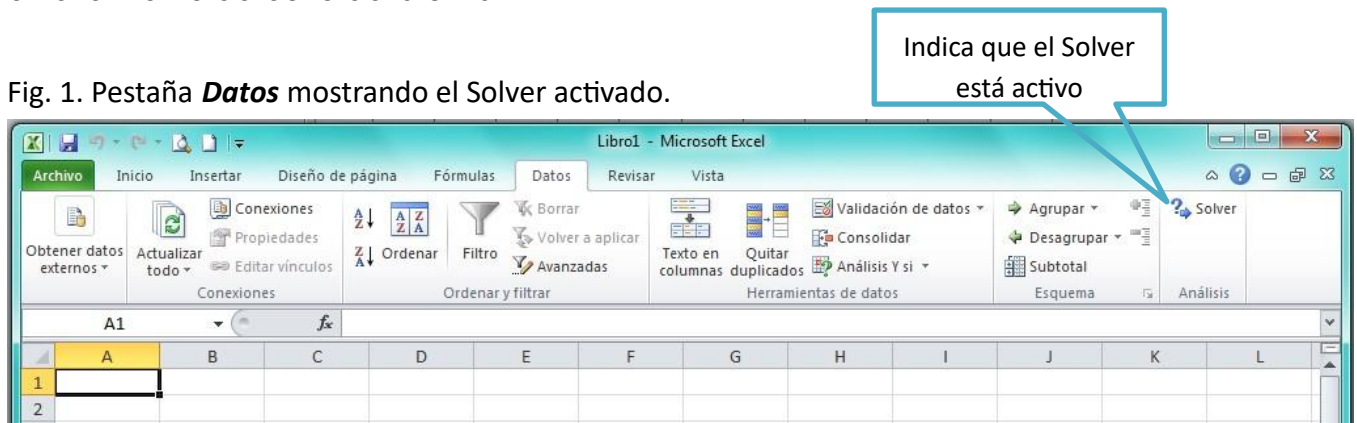
Introducción

Existen varios programas de optimización lineal, no lineal y los que usan otros algoritmos como los genéticos. Sin embargo, en las empresas es muy importante el uso del programa Solver del Excel puesto que prácticamente cada microcomputadora de escritorio o portátil tiene Excel y cualquier empleado la sabe usar.

Instalación del Solver en Excel 2010/2016.

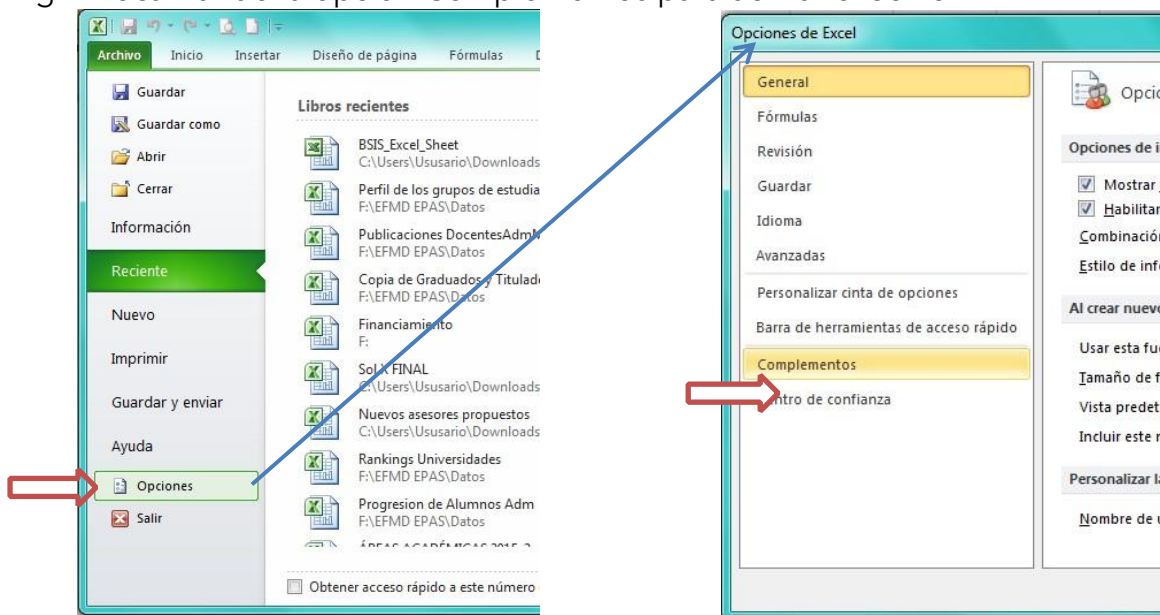
Normalmente el Solver no está activo cuando se carga el Excel por que ocupa memoria. Por lo tanto, lo primero que tenemos que hacer es revisar si tenemos activo el Solver, seleccionando la pestaña **Datos**. Si el Solver está cargado veremos en el extremo derecho de la cinta:

Fig. 1. Pestaña **Datos** mostrando el Solver activado.

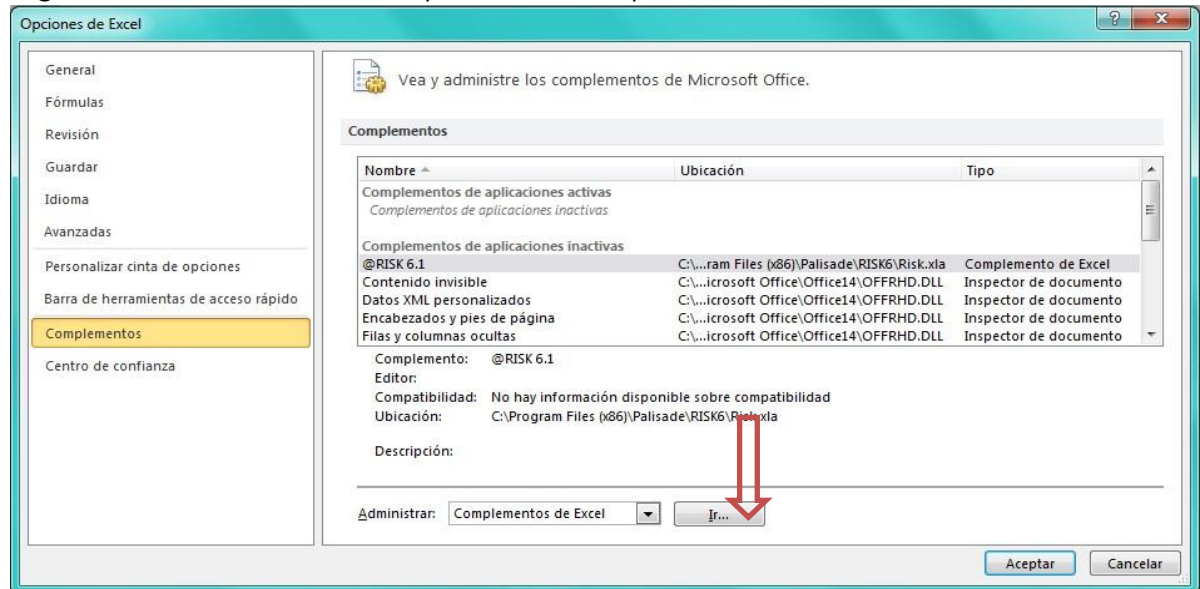


Si el Solver no está activo, hay que cargarlo, para lo que es necesario hacer lo siguiente: en la pestaña **Archivo** seleccionar **Opciones** y en esta ventana seleccionar **Complementos**:

Fig 2. Localizando la opción Complementos para activar el Solver.

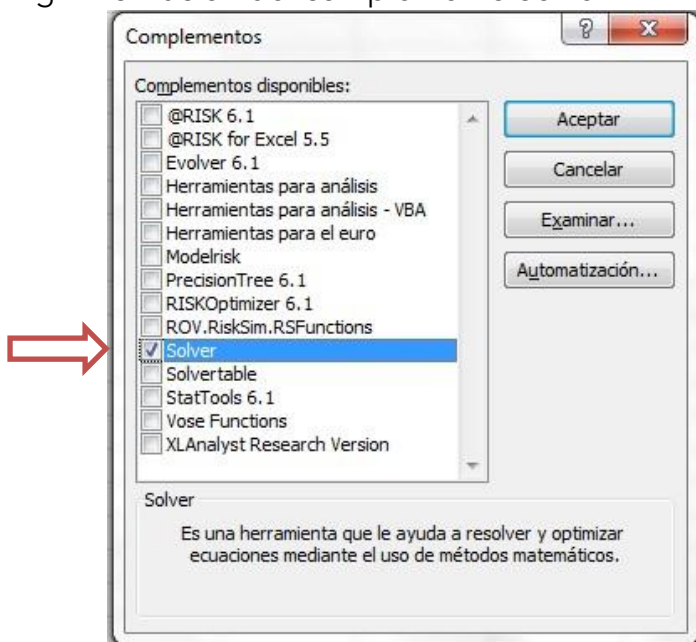


Después de seleccionar **Complementos**, en la parte inferior de la ventana aparece la opción de *Complementos de Excel* y para acceder a ellos presionar el botón **Ir...**



Finalmente, aparece la ventana con los complementos de Excel disponibles, entre ellos el Solver. Para cargarlo hacemos click en el recuadro Solver y presionamos el botón **Aceptar**.

Fig4. Activación del complemento Solver.



Después de esto veremos en la pestaña **Datos** el Solver ya cargado.

APÉNDICE B

GUÍA LINGO-LINDO

Descargar de URL:

http://www1.frm.utn.edu.ar/ioperativa/lingo_lindo.pdf



APÉNDICE C

MATRICES ANÁLISIS MATRICIAL MÉTODO SIMPLEX

INTRODUCCIÓN.

El propósito de este apéndice es brindar una explicación detallada para quienes deseen profundizar en la teoría que fundamenta distintos procedimientos, aclarando las razones detrás de cada uno. Muchos de estos procedimientos tienen un respaldo sólido en las matemáticas, especialmente en el área de matrices. Por ejemplo, la comprensión de los valores asociados a los costos indirectos y los costos de oportunidad en la tabla simplex se facilita mediante su formulación matemática.

El ingeniero Juan Prawda, en su excelente obra "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones", volúmenes 1 y 2, ofrece una explicación exhaustiva sobre estos procedimientos. A continuación, se presenta una descripción detallada de los mismos.

ANÁLISIS MATRICIAL METODO SIMPLEX

El método simplex

Definición: Se entiende por programa lineal aquel que optimiza

$$Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Matricialmente se reescribe al programa lineal como

$$\text{Opt } (C_1, C_2, \dots, C_n) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma de escribirlo es

$$Opt Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

sujeto a

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \cong b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \cong b_2$$

.....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \cong b_m$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots X_n \geq 0,$$

Por último, también se puede escribir

$$Opt Z = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n c_{ji} X_i \leq b_j,$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$X_i \geq 0,$$

$$j = 1, \dots, n$$

Forma canónica.

$$\text{Máx } Z = eX$$

Sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0.$$

Regla 1

a) Maximizar eX es equivalente a Minimizar $-eX$.

b) Minimizar eX es equivalente a Maximizar $-eX$.

Regla 2

a) La desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \geq -b$.

b) La desigualdad $AX \geq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \leq -b$.

Regla 3

Toda igualdad de la forma $AX = b$, puede descomponerse como la intersección de dos desigualdades $AX \leq b$ y $AX \geq b$.

Regla 4

a) Toda desigualdad de la forma $AX \leq b$ puede convertirse en igualdad mediante la adición de un vector Y , llamado de holgura. El vector columna Y tiene m componentes, todas ellas no-negativas, es decir

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Toda desigualdad de la forma $AX \geq b$ puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector Z , llamado superfluo. El vector columna Z , tiene m componentes, todas no negativas, es decir:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Regla 5

Una variable no restringida, o sea aquella que puede tomar toda clase de valores positivos, cero y negativos puede escribirse como la diferencia de dos variables no negativas.

$$\text{Máx } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

Sujeto a

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_n \geq 0,$$

donde las columnas de la matriz A se denotarán por a_1, a_2, \dots, a_n es decir,

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorema 1. El conjunto de todas las soluciones factibles de un programa de programación lineal es un conjunto convexo.

Teorema 2. La función objetivo de un programa lineal obtiene su valor máximo (o mínimo) en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Teorema 3. Si existe un conjunto $K \leq m$ de columnas de la matriz A, que sean linealmente independientes, tales como a_1, a_2, \dots, a_n tal que

$$X_1 * a_1 + X_2 * a_2 + \dots + X_k * a_k = b$$

Con $X_i * \geq 0, i = 1, \dots, n, b^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, entonces el punto $X * = (X_1 *, X_2 *, \dots, X_k *, 0, 0, \dots, 0)$ es un punto extremo del conjunto de soluciones factibles.

Teorema 4. Sea $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un punto extremo del conjunto de todas las soluciones factibles. Entonces las columnas de la matriz A asociadas con cada componente X_i que sea positivo, $i = 1, \dots, n$, son linealmente independientes, con un máximo de m componentes X_i positivas (el resto son cero).

forma canónica.

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0.$$

donde A es de orden m por n; c, X son vectores renglón y columna respectivamente con n componentes y b es un vector columna con m componentes.

Se denotan a las columnas de A por a_1, a_2, \dots, a_n con $m < n$. Se considera a la matriz A partida en dos matrices, una B con m vectores linealmente independientes y otra N con $n - m$ vectores linealmente dependientes:

$$A_{m,n} = (B_{m,m} N_{m,n-m})$$

La matriz B se le llamará la base y cualquier vector a_j en A que no está en B, puede escribirse como una combinación de los vectores de B. Es decir dado $a_j \notin B, \in B$, este puede escribirse como

$$a_j = Y_{1j}n_1 + Y_{2j}n_2 + \dots + Y_{mj}n_m = \sum_{k=1}^m Y_{kj} n_k$$

y como B tiene inversa B^{-1} ,

$$Y_1 = B^{-1} a_j.$$

Considerando las restricciones originales del programa lineal¹⁰

$$AX = b$$

se tiene que

$$(B|N) \begin{pmatrix} X_n \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

Donde

$$A = (B|N) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = (a_1, a_2, \dots, a_m | a_{m+1}, \dots, a_n)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_n \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \\ X_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}$$

Entonces desarrollando se tiene

$$BX_B + NX_N = b.$$

Si se hace uso de la definición de solución básica factible se tiene que

$$X_n \geq 0$$

$$X_N = 0$$

y (2.38) se convierte en

$$BX_B = b$$

o

$$X_B = B^{-1}b$$

que es una solución básica de $AX = b$. El vector X_B se le denomina vector básico y a X_N , vector no básico. Si se parte el vector de costos o precios unitarios c en

$$c = (c_n | c_N)$$

$$c = (c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm} | c_{B+1}, \dots, c_{Bn})$$

se tiene que la función objetivo puede escribirse

$$\begin{aligned} Z &= eX \\ &= (c_n | c_N) \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \\ &= c_B X_B + c_N X_N \\ &= c_B X_N, \end{aligned}$$

A continuación se define el escalar Z_j como

$$; z_j = c_B Y_j$$

donde Y_j es el vector columna y c_n es el vector de precios o costos unitarios correspondientes al vector básico de decisión X_n . Otra manera de escribir es

$$\begin{aligned} z_j &= \sum_{N=1}^m c_n Y_{kj} \\ &= c_{B1} Y_{1j} + c_{n1} Y_{2j} + \dots + c_{nm} Y_{mj} \end{aligned}$$

donde $(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm})$ son las m componentes de c_n .

Suponiendo que se empieza con una solución básica, se debe demostrar que la solución es óptima o que se puede obtener una mejor solución básica factible.

Se supone que se empieza con una solución básica factible dada por

$$BX_B = b.$$

Esta solución corresponde a un punto extremo de la región de factibilidad. Si este punto extremo no es óptimo, se debe mover a un punto extremo vecino¹³ con objeto de mejorar la solución de la función objetivo. El cambio a este punto vecino se hace fácilmente cambiando un vector de la base B , es decir hay que sacar un vector de B y reemplazarlo por otro de N . Hay muchas maneras de hacer ese cambio. G. Dantzig fijó la teoría que justifica el juego de reglas de cambio que garantiza el mejor incremento en el valor de la función objetivo en el caso de maximización, o la mejor reducción en el caso de minimización

Se continuación cuál es esta teoría. Cualquier columna a , de A en N (no en B) puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de B , es decir

$$a_j = \sum_{N=1}^m Y_k, Y_{kj} a_{kj} \quad j = m + 1, \dots, n.$$

Se supone que el vector que se va a sacar de B , es el a_r , y que la componente Y_{rj} de Y_j es diferente de cero. Entónés se puede escribir

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m Y_k, a_N + Y_{rj} a_r \\ a_j &= \frac{1}{Y_{rj}} a_j - \frac{1}{Y_{rj}} \sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m Y_k, a_N \quad Y_{rj} \neq 0 \\ &= \frac{1}{Y_{rj}} a_j - \sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m \frac{Y_k,}{Y_{rj}} a_k \quad Y_{rj} \neq 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, la solución básica factible

$$BX_B = b$$

puede escribirse en función de las columnas de la base B como

$$\sum_{k=1}^m B_k, X_{Bk} = b$$

donde X_{Bk} , $k = 1, \dots, m$ son las m componentes de X_B . Pero puede reescribirse como

$$a_r, X_{B_r} + \sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m a_k, x_n = b$$

Y tomando en consideración

$$\left(\frac{1}{Y_{rj}} a_j - \sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m \frac{Y_k,}{Y_{rj}} a_k \right) X_n + \sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m a_k, x_n = b$$

Esta última expresión puede reagruparse como

$$\sum_{\substack{k=1 \\ N=r}}^m (X_B - X_B \frac{Y_{x1}}{Y_{rj}}) a_N \frac{X_B}{Y_r} a_r = b$$

Que es una nueva solución básica, porque satisface $AX = b$ mas puede no ser factible puesto que aun no se asegura que $N_B[X_{B1}X_{n2}, \dots, X_B] \geq 0$.

En seguida se ve que condiciones son necesarias para garantizar $X_B \geq 0$, y en consecuencia factibilidad.

La nueva solución básica puede reescribirse

$$\sum_{k=1}^m \bar{X}_k a_k + \bar{X}_r a_r = b$$

$$\bar{X}_r = X_{Br} - X_{Br} \frac{Y_{Kj}}{Y_{rj}} \quad K \neq r, \quad Y_{rj} \neq 0, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\bar{X}_r = \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} \quad Y_{rj} \neq 0,$$

Para asegurarse que la nueva solución básica es también factible se recita que el nuevo vector básico \bar{X} tenga todas sus componentes no negativas. es decir

$$\bar{X} = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n, \dots, \bar{X}_m]$$

y para esto se hace necesario que

$$\bar{X}_r = X_{Br} - X_{Br} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \geq 0. \quad K \neq r, \quad \bar{Y}_r \neq 0, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\bar{X}_r = \frac{X_{kj}}{Y_{rj}} \geq 0. \quad \bar{Y}_r \neq 0,$$

Como $X_n \geq 0$ se requiere en primer término que $Y_{rj} \geq 0$ para que sea no negativo. En segundo término se tiene que si todas las $Y_{rj} \geq 0 \quad K \neq r, k = 1, \dots, m$ entonces se garantiza que (2.45) sea no-negativo.

Sin embargo, ¿que pasaría si alguna de las $Y_{rj} \geq 0 \quad K \neq r, k = 1, \dots, m$?

Para analizar lo que pasa se toma (2.45). ^{24:}

$$X_{Bk} - X_{Br} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} > 0$$

y se dividen ambas partes entre $Y_{rj} > 0$

$$\frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} - \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}}, \quad Y_{kj} > 0 \quad Y_{rj} > 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} - \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} \quad Y_{kj} > 0 \quad Y_{rj} > 0$$

Es decir que (2.45) sea mayor o igual a cero es equivalente por este desarrollo, a decir que

decir que

$$\frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} - \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} \geq 0. \quad Y_{kj} > 0 \quad Y_{rj} > 0$$

y para garantizar que se cumpla se requiere que

$$\frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} \leq \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} \quad Y_{kj} > 0 \quad Y_{rj} > 0$$

Esto sólo se puede llevar a cabo si en las reglas del juego, la columna que se remueve de la base B, satisface la siguiente condición importantísima.

$$\frac{X_{Br}}{Y_{rj}} = \text{Min}_k \left\{ \frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}.$$

Traducido a otro lenguaje (2.48) significa que si se supiera a priori que columna a_j de N entraría en la nueva base B, entonces el vector de B a remover sería aquel cuyo cociente $\frac{X_{Bk}}{Y_{kj}}$, cuando el denominador $Y_{kj} > 0$ es el menos de todos los posibles m cocientes. El vector que se remueve se denomina r. Recuerde el lector

que todas las componentes del vector X_B , las X_{Bk} $k = 1, \dots, m$ son conocida por la relación.

$$X_B = B^{-1}b$$

Y todas las Y_{kj} $k = 1, \dots, m$ también son conocidas.¹³

Se ha encontrado pues regla que garantiza que el cambio de un vector de B por otro de N resulta en una nueva solución factible básica. Como consecuencia de este cambio se ha construido una nueva base

\hat{B} que difiere de la base anterior B en un solo vector. Como cada base se asocia a un punto extremo de la región de factibilidad, con el cambio de base el proceso se ha movido a otro punto extremo \hat{X}_n tal que

$$\hat{X}_B = B^{-1}b$$

y el nuevo valor de la función objetivo es

$$\hat{Z} = \hat{c}_B \hat{X}_B$$

A continuación, se deduce la regla que permite hacer la mejor selección del vector a_j en N que se va a introducir a B. Recuérdese que el valor actual de la función objetivo correspondiente al punto extremo

asociado con la base B es

$$Z = c_B x_B$$

y el nuevo valor \hat{Z} asociado con la nueva base \hat{B}

$$\hat{Z} = \hat{c}_B \hat{X}_B$$

¹³ Más adelante el lector podrá comprobar, que en efecto todas estas cantidades son conocidas

La única diferencia entre B y \hat{B} es que se ha sacado el vector a_r de B y se ha reemplazado con el vector a_j en N, creando así \hat{B} . La única diferencia entre c_B y \hat{c}_B se encuentra en la r-ava componente, es decir

$$c_B = (\bar{c}_{B1}, \bar{c}_{B2}, \dots, \bar{c}_{Bn}, \dots, \bar{c}_{Bm})$$

$$\hat{c}_B = (\bar{c}_{B1}, \bar{c}_{B2}, \dots, \bar{c}_j, \dots, \bar{c}_{Bm})$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \hat{Z} &= \hat{c}_B \hat{X}_B \\
 &= \sum_{k=1}^m c_{Bk} \hat{X}_k \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq T}}^m c_{Bk} \hat{X}_k + c_{Bk} \hat{X}_r \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq T}}^m c_{Bk} \hat{X}_k + c_{Bk} \hat{X}_r, \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

(2.45) y (2.46) en (2.49) originan la siguiente expresión

$$\hat{Z} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq T}}^m c_{Bk} \left[X_{Bk} - X_{Br} \frac{Y_{xj}}{Y_{rjc}} \right] + c_j \frac{X_{Br}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0. \tag{2.50}$$

Si se nota cuidadosamente, el único término faltante en la sumatoria de la expresión (2.50) es el siguiente:

$$c_B \left(X_{Bk} - X_{Br} \frac{Y_{xj}}{Y_{rjc}} \right) = 0, \quad Y_{rj} \neq 0.$$

que es igual a cero. Si se introduce este término en (2.50) no afecta la expresión y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{Z} &= \sum_{k=1}^m c_{Bk} \left[X_{Bk} - X_{Br} \frac{Y_{xj}}{Y_{rjc}} \right] + c_j \frac{X_{Br}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0. \\
 \hat{Z} &= \sum_{k=1}^m c_{Bk} X_{Bk} - \sum_{k=1}^m c_{Bk} X_{Bk} \frac{Y_{xj}}{Y_{rjc}} + c_j \frac{X_{Br}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0. \\
 \hat{Z} &= Z - \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} \sum_{k=1}^m c_{Bk} X_{Bk} + c_j \frac{X_{Br}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Utilizando (2.40) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{Z} &= Z - \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} + \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} c_j, \quad Y_{rj} \neq 0. \\
 \hat{Z} &= Z - (z_j - c_j) \frac{X_{Br}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0
 \end{aligned}$$

Recapacitando al observar (2.51) se nota que el nuevo valor de la función objetivo \hat{Z} es mucho mayor en el caso de maximización, que el valor inmediato pasado de la función objetivo Z . si y sólo si

$$(z_j - c_j) \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} < 0, \quad Y_{rj} \neq 0$$

En el caso de minimización $\hat{Z} < Z$ si y solo si

$$(z_j - c_j) \frac{X_{Br}}{Y_{rj}} > 0, \quad Y_{rj} \neq 0$$

Para ahorrar palabras, se atiende al caso de maximizar, pues se sabe por la regla 1, que el problema de minimizar es equivalente. De (2.46) se deduce que el término $\frac{X_{Br}}{Y_{rj}} > 0$ por lo que $\hat{Z} > Z$ si y solo si

$$(z_j - c_j) < 0,$$

El mayor incremento $\hat{Z} - Z$ se conseguirá si se elige a la $(z_j - c_j)$ con j en N , más negativa. Es decir, el mejor incremento en el valor de la nueva función objetivo se lograra cuando se seleccione aquel vector $a, \notin B$ que entrara en la nueva base B , cuyo $z_j - c_j$ sea el mas negativo.

En resumen: en el cambio de una base B a otra nueva \hat{B} , es decir de un punto extremo de la región factibilidad a otro vecino, se debe sacar un vector a , de B y substituirlo por un vector a , en N , Las reglas del cambio que garantizaran el mejor incremento en el valor de la función objetivo son las siguientes:

Regla de entrada. Selecciónese aquel vector a , no en B (o sea a , en N) que tenga la $z_j - c_j$ mas negativa $j \in N$.

Regla de salida. Una vez que se sepa que a , va a entrar en la nueva base \hat{B} , saquese aquel vector a , en B que cumpla con la siguiente condición.

$$\frac{X_{Br}}{Y_{rj}} = \text{Min}_x \left\{ \frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}.$$

Recuérdese que todos los valores $z_j - c_j, X_{Br}, Y_{kj}, i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m$ son totalmente conocidos. En la ilustración del método simplex se podrá comprobar esta afirmación.

Ya se sabe, al menos en teoría, cómo mejorar el valor de la función objetivo, pero, ¿cuándo se debe detener el proceso, pues se ha obtenido una solución óptima? El siguiente teorema da la contestación.

Teorema 2.5. La solución óptima del programa lineal canónico (2.21) se obtiene cuando todas las $z_j - c_j \geq 0$ para toda j en N .

Prueba. Sea $X^* [X_1, X_2, \dots, X_N] \geq 0$ una solución factible al sistema $AX = b$ ¹⁴ Entonces

$$X^*_{1B1} + X^*_{2B2} + \dots + X^*_{nBn} = b \quad (2.52)$$

$$Z = c_1 X^*_1 + c_2 X^*_2 + \dots + c_n X^*_n \quad (2.53)$$

donde $a_1 + a_2, \dots, a_n$ son las n columnas de A . Cualquier vector a , en N , puede escribirse como una combinación lineal de los m vectores de la base B . Recuérdese que se ha partido a la matriz $A = (B|N)$. Entonces

$$a_j = \sum_{k=1}^m Y_{xj} a_{kj} \quad (2.54)$$

(2.54) en (2.52) da

$$X^*_1 - \sum_{k=1}^m Y_{x1} a_{k1} + X^*_2 - \sum_{k=1}^m Y_{x2} a_{k2} + \dots + X^*_n - \sum_{k=1}^m Y_{xn} a_{kn} = b$$

que una vez reagrupado puede escribirse como

$$\left[\sum_{k=1}^m X^*_x Y_{1k} \right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^m X^*_x Y_{2k} \right] a_2 + \dots + \left[\sum_{k=1}^m X^*_x Y_{mk} \right] a_m = b$$

(2.55)

Esta última igualdad expresa al vector b en términos de los m vectores que $a_1 + a_2, \dots, a_n$ que forman la base B . Como esos m vectores son linealmente independientes, esa expresión de b es única y por lo tanto comparando (2.55) con

$$BX_B = b$$

se tiene que

$$X_{n1} = \sum_{k=1}^m X^*_x Y_{ik}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.56)$$

Por otro lado, de (2.36) se deduce que 24:

$$Y_j = B^{-1} a_j$$

¹¹Recuérdese que las restricciones de (2.21) están dadas como $AX < b$, por la regla 4 de equivalencias, se pueden convertir a $AX = b$.

○

$$\begin{aligned} [Y_1 + Y_2, \dots, Y_m, \dots, Y_n] &= B^{-1} [a_1 + a_2, \dots, a_m, \dots, a_n] \\ &= B^{-1} [B, a_{m+1}, \dots, a_n] \\ &= [I_{m+m}, B^{-1}a_{m+1}, \dots, B^{-1}a_n] \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} Y_i &= e_i, \quad i = 1, \dots, m \\ Y_x &= B^{-1}a_x, \quad k = m + 1, \dots, n \end{aligned}$$

Donde e_i , es un vector columna con un uno en la posición i y ceros en el resto del vector, es decir

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{posicion } i.$$

Recuérdese que de (2.40)

$$z_j = \sum_{k=1}^m Y_{xj} c_{Bx},$$

pero (2.57) en (2.40) da

$$z_j = c_B c_j = c_j, \quad j = 1, \dots, m$$

y por lo tanto

$$z_j - c_j = 0$$

para toda j en B . A continuación, se verá qué pasa con j en N . Se parte de la suposición que

$$z_j - c_j \geq 0 \quad j \text{ en } A,$$

cuando el programa lineal ha tenido su valor óptimo (esto es lo que se quiere demostrar). La desigualdad arriba indicada implica

$$z_j \geq c_j \quad j \text{ en } A$$

O lo que es lo mismo

$$z^* X^* \geq c_j X^*, \quad j \text{ en } A.$$

Como esta desigualdad se cumple para cada componente j , la siguiente desigualdad también es cierta

$$z_1 X^*_1 + z_2 X^*_2 + \dots + z_n X^*_n \geq c_1 X^*_1 + c_2 X^*_2 + \dots + c_n X^*_n = Z^*.$$

Utilizando (2.40) se tiene

$$X^*_1 = \sum_{k=1}^m Y_{x1} c_{Bk}, + X^*_2 = \sum_{k=1}^m Y_{x2} c_{Bk}, + \dots + X^*_n = \sum_{k=1}^m Y_{xn} c_{Bk}, \geq Z^*$$

o reagrupando

$$\left[\sum_{k=1}^m X^*_x Y_{1x} \right] c_B, + \dots + \left[\sum_{k=1}^m X^*_x Y_{1x} \right] c_B, \geq Z^* \quad (2.58)$$

Finalmente comparando (2.58) con (2.56) se tiene

$$c_{B1} X_{B1} + \dots + c_{Bm} X_{Bm} = Z_0 \geq Z^*. \quad (2.59)$$

La expresión (2.59) significa que se ha obtenido una solución factible X

$$X = [X_B, X_N]$$

$$X = [X_B, X_B, \dots, X_{Bm}, 0, 0, \dots, 0]$$

para la cual todos los elementos $z_j - c_j \geq 0$ para toda j en A y la cual produce un valor de la función objetivo Z_0 mayor o igual a cualquier valor Z^* correspondiente a cualquier solución factible (o punto extremo). El teorema queda demostrado.

Se puede a continuación pasar a explicar e ilustrar las reglas del método simplex, descubierto por el Dr. George Dantzig.

Reglas del método simplex:

Paso .1 Dado cualquier programa lineal transfórmese por medio de las reglas de equivalencia 1, 2, 3 y 5 al programa lineal canónico.

$$\text{Máx } Z = eX$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0.$$

Si se proporcionan únicamente las reglas del método simplex en relación a la forma canónica arriba descrita, Se ahorran muchas palabras y además se evitan confusiones al lector.

Paso 2. Re-escribase la función objetivo de la siguiente manera

$$Z - eX = 0.$$

Paso 3. Aplicando la regla de equivalencias 4, conviértanse todas las desigualdades en igualdades. Este paso requerirá el uso de variables de holgura. Usando los primeros 3 pasos, la forma canónica ha sido vertida en

$$\text{Máx } Z - cX = 0$$

$$AX + \bar{X} = b$$

$$X \geq 0$$

$$\bar{X} \geq 0$$

donde \bar{X} es el vector de variables de holgura. Esto mismo puede reescri- birse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
 Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \dots - c_nX_n & = & 0 \\
 a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + X_{n+1} & = & b_1 \\
 a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + X_{n+2} & = & b_2 \\
 \dots & & \dots \\
 a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots & + & \boxed{\text{Variables de holgura}} = b_m
 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_n \geq 0, X_{n+1} \geq 0, \dots, X_{n+m} \geq 0,$$

Este paso es necesario, pues la adición de las variables de holgura crea la primera base B, que resulta ser la matriz identidad. Esto, a su vez, genera el primer extremo de la región de factibilidad cuyas coordenadas están dadas por el vector b.

Paso 4. Constrúyase una tabla o tableau con los coeficientes del programa lineal como la que se muestra en la página siguiente.

Este tableau también tendrá la siguiente estructura condensada que es equivalente a la anterior.

	Z	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}	
	1	$c_B B^{-1} A - c$				$c_B B^{-1}$				$c_B X_B$
a_{B1}	0	$B^{-1} A$				B^{-1}				X_B
a_{B2}										
.										
a_{Bm}										

Paso 5. Selecciónese como vector de entrada aquél cuya $z_j - c_j$ se la más negativa. Si no hay ningún candidato de entrada, es decir que:

Variables originales										
	Z	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}	Valor de la función objetivo asociado a la base actual B
	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$...	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$z_{n+2} - c_{n+2}$...	$z_{n+m} - c_{n+m}$	Z_0
a_{B1}	0	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1n}	$Y_{1,n+1}$	$Y_{1,n+2}$...	$Y_{1,n+n}$	X_{B1}
a_{B2}	0	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2n}	$Y_{2,n+1}$	$Y_{2,n+2}$...	$Y_{2,n+n}$	X_{B2}

Identificación del punto extremo asociado a la base actual B

Vectores que integran la base actual B

a_{Bm}			X_{Bm}
	0	Y_{m1}	Y_{m2}	Y_{mn}	$Y_{m,n+1}$	$Y_{m,n+2}$...	$Y_{m,n+n}$	

Tableau de programación lineal

Todas las $z_j - c_j \geq 0$ para toda j en A , la solución X_B mostrando en ese tableau es óptimo. En el caso de que exista un empate entre varios vectores que puedan ser candidatos, rómpase el empate arbitrariamente, es decir, selecciónese a cualquiera de los candidatos.

Paso 6. Una vez seleccionada la columna a , que entrará a la nueva base, selecciónese el vector de salida a , de la base actual utilizando la siguiente regla:

$$\frac{X_{Br}}{Y_{rj}} = \text{Min}_k \left\{ \frac{X_{Bk}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}.$$

En el caso de que exista un empate entre varios vectores candidatos, hay que aplicar las llamadas reglas lexicográficas¹⁵ para romper el empate. Una decisión arbitraria puede causar que el proceso cicle continuamente sin alcanzar la solución óptima.

En el caso de que todas las Y_{rj} del denominador sean negativos, se tiene el caso de una solución no acotada.¹⁶

Paso 7. La intersección en el tableau de la columna que entra y la que sale determina el elemento pivote F_{rj} . Aplíquese operaciones matriciales elementales 1 en el pivote Y_{rj} , con objeto de convertir a la Columna a , en el vector unitario e_r , es decir ceros en toda la columna, y uno en la r -ava componente, que resulta ser Y_{rj} . Regrésese al paso .

Por ejemplo si la columna seleccionada a entra en la base es la a_2 y la columna a a salir es la a_r , hágase al elemento Y_{rj} del tableau igual a uno y al resto de las

componentes de la columna a_2 , ceros (incluyendo $Z_Z - c_z$) mediante el uso de operaciones matriciales elementales.

Este paso genera una nueva base B, un nuevo punto extremo X_B y un nuevo valor de la función objetivo Z.

Ejemplo: Resuélvase por medio del método simplex el siguiente problema: ¹⁹

$$\text{M á x } Z = 5000X_1 + 3000X_2$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

0,

El paso 1 ya está satisfecho. El paso 2 genera

$$Z - 5000X_1 + 3000X_2 = 0.$$

1.B A ser explicadas en breve.

1.B A ser explicadas en breve.

1.B véase este tipo de operaciones en el apéndice de algebra lineal (apéndice B)

1.B Ya resuelto por el método grafico al principio de este capítulo.

El paso 3 proporciona la siguiente estructura:

$$\text{M á x } Z - 5000X_1 + 3000X_2 \quad - 0$$

$$3X_1 + 5X_2 + X_3 = 15$$

$$5X_1 + 2X_2 + X_4 = 10$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0$$

Las variables X_3 y X_4 , son de holgura. La variable X_3 representa la diferencia entre el número de Obreros que utilizan en la producción óptima y los que hay disponibles. La variable X_4 representa la diferencia entre el capital que se va a gastar semanalmente en la producción óptima y el capital disponible.

El tableau original (paso 4) tiene la siguiente estructura:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	Z_0	
Vectores en la base	1	$z_1 - c_1$	z_2	0	0	0	
		$-c_2$...	$z_n - c_n$			
a_3	0	3	5	1	0	15	X_B
a_4	0	5	2	0	1	10	

Comparando este tableau con la siguiente estructura general

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	Z_0
1	$c_B B^{-1}A - c$		$c_B B^{-1}$		$Z = c_B X_B$
0	$B^{-1}A$		B^{-1}		$X_B = B^{-1}b$

Se tiene que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} Z_0 = 0,$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, c_B B^{-1} = (Z_2 - c_2, Z_1 - c_1) = (0, 0),$$

$$c_B B^{-1}A - c = (Z_2 - c_2, Z_1 - c_1) = (-5\ 000, -3\ 000), B = (a_3 \ a_4),$$

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, X_N = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

APÉNDICE D

MATRICES

ANÁLISIS MATRICIAL DUALIDAD

INTRODUCCIÓN.

Como se ha indicado anteriormente el propósito de este apéndice es brindar una explicación detallada para quienes deseen profundizar en la teoría que fundamenta distintos procedimientos, aclarando las razones detrás de cada uno. Muchos de estos procedimientos tienen un respaldo sólido en las matemáticas, especialmente en el área de matrices. Especialmente en la teoría simétrica y reflexiva de la Dualidad.

El ingeniero Juan Prawda, en su excelente obra "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones", volúmenes 1 y 2, ofrece una explicación exhaustiva sobre estos procedimientos. A continuación, se presenta una descripción detallada de los mismos.

Análisis Matricial Dualidad

Asociada a cualquier estructura canónica de programación lineal (PJ)

$$\text{Max } z = eX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0, \quad (P_1)$$

que se denomina el problema primario, se define la siguiente estructura ³¹

$$\text{Min } G = b^T Y$$

sujeto a

$$A^r Y \geq e^r$$

$$Y \geq 0$$

que se denomina el problema dual.

La siguiente tabla proporciona la descripción de cada uno de los elementos del problema primario y dual.

Problema	Elemento	Dimensión	Característica
Primario	X	Vector columna con a componentes.	Vector de variables de actividad primaria.
	e	Vector renglón con a componentes.	Vector de precios unitarios primarios.
	b	Vector columna con componentes.	Vector de disponibilidad de recursos primarios.
	A	Matriz de m por n.	Matriz de coeficientes tecnológicos.
	Z	Escalar	Función objetiva primaria.
	o	Vector ceros	
Dual	Y	Vector columna Con m componentes.	Vector de variables de actividades duales.
	c ^r	Transpuesta del vector e, o sea, vector columna con a componentes.	Vector de disponibilidad de recursos duales.
	b ^r	Transpuesta del vector b, o sea, vector renglón con m componentes.	Vector de precios unitarios duales.
	A ^r	Matriz de m por n.	Matriz de coeficientes tecnológicos.

	G O	Transpuesta de la matriz A, o sea, matriz de a por m. Escalar. Vector columna con m ceras.	Función objetivo dual.
--	--------	--	------------------------

Antes de pasar a discutir las propiedades y usos de la dualidad, se ven a continuación otras formas de dualidad.

Forma 2. Dado el problema primario (P_s) su dual es (D_2).

$$\text{Min } Z = eX$$

sujeto a

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0 \quad (P_s)$$

$$\text{Max } G = b^T Y$$

sujeto a

$$A^r Y \geq e^r$$

$$Y \geq 0. \quad (D_s)$$

Prueba. El problema primario (P_s) puede escribirse como

$$\text{Máx } -Z = -eX$$

sujeto a

$$-AX \leq -b$$

$$X \geq 0,$$

y aplicando la definición de dualidad se tiene

$$\text{Min } -G = -b^T Y$$

sujeto a

$$-A^T Y \geq -e^r$$

$$Y \geq 0,$$

que es equivalente a sujeto a

$$\text{Máx } G = b^T Y$$

Sujeto a

$$A^T Y \geq e^r$$

$$Y \geq 0,$$

Forma 3. Dado el problema primario (P₃) su dual es (D₃).

$$\text{Máx } Z = eX$$

sujeto a

$$AX = b$$

$$X \geq 0,$$

$$\text{Min } G = b^T Y$$

Sujeto a

$$A^r Y \geq e^r$$

Y no restringida en signo.

Prueba. El problema primario (P₃) puede escribirse como

$$\text{Máx } Z = eX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0,$$

○

$$\text{Máx } Z = eX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$-AX \leq -b$$

$$X \geq 0.$$

Aplicando la definición de dualidad, asociando al vector dual W con las restricciones primarias $AX \leq b$ y al vector dual V con las restricciones primarias $-AX \leq -b$ se tiene:

$$\text{Min } G = b^T W - b^T V$$

sujeto a

$$A^T W - A^T V \geq c^T$$

$$W \geq 0, \quad V \geq 0.$$

Agrupando se tiene

$$\text{Min } G = b^T (W - V)$$

stajeto a

$$A^T(W - V) \geq c^T$$

$$W \geq 0, \quad V \geq 0.$$

Si se hace $Y = W - V$, $W \geq 0$, $V \geq 0$, se tiene que el vector Y es no restringido en signo, pues:

a) si $W > V$ entonces $Y > 0$,

b) si $W = V$ entonces $Y = 0$,

c) si $W < V$ entonces $Y < 0$.

Por lo tanto, la forma anterior queda

$$\text{Min } G = b^T Y$$

sujeto a

$$A^T Y \geq c^T$$

Y no restringido en signo.

Forma 4. Dado el problema primario (P_4) su dual es (D_4).

$$\text{Máx } Z = c^T X$$

sujeto a

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0 \quad (P_4)$$

$$\text{Min } G = b^T Y$$

sujeto a

$$A^T Y \geq c^T$$

$$Y \leq 0. \quad (D_4)$$

Prueba. El programa primario (P) puede escribirse como

$$\text{Máx } Z = c^T X$$

sujeto a

$$-AX \leq -b$$

$$X \geq 0.$$

Aplicando la definición de dualidad se tiene

$$\text{Min } G = -b^T W$$

sujeto a

$$-A^T W \geq c^T$$

$$W \geq 0.$$

Haciendo $Y = -W$ se tiene

$$\text{Min } G = b^T Y$$

sujeto a

$$A^T Y \geq c^T$$

$$Y \leq 0.$$

Se resumen a continuación los resultados obtenidos en las cuatro formas de dualidad.

Primario

Máx

Min

Min

Max

*restricción*³² $\leq b_i$

variable $i \geq 0$

*restricción*³² $= b_i$

variable i no restringida

*restricción*³² $\geq b_i$

variable $i \leq 0$

*variable*³² $i \geq 0$

restricción $i \geq c_i$

*variable*³² i no restringida

restricción $i = c_i$

*variable*³² $i \leq 0$

restricción $i \leq c_i$

La forma del primario es

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0,$$

³² Cuando la función objetivo primaria es $\text{Máx } Z = cX$.

Teoremas concernientes a estructuras primarias y sus duales asociadas

En los teoremas que se prueban a continuación se hace uso de la forma (P₁) y (D₁) o sea

Primario	$Máx Z = cX$	Dual	$Min G = bTY$
sujeto a	$AX \leq b$ $X \geq 0$ (P ₁)	sujeto a	$A^TY \geq C^T$ $Y \geq 0.$ (D ₁)

Teorema 2.9. Si \bar{X} y \bar{Y} son soluciones factibles a un par de programas primario (P₁) y su correspondiente dual (D₁) entonces

$$Z = c\bar{X} \leq b^T\bar{Y} = G.$$

Prueba. Como \bar{X} es factible en (P₁), cumple con $A\bar{X} \leq b$ y $\bar{X} \geq 0$.

Como Y es factible en (D₁) cumple con $A^T Y \geq c^T$ y $\bar{Y} \geq 0$. Premul-tiplicando $A\bar{X} \leq b$ por $Y \geq 0$ y a $A^T\bar{Y} \geq c^T$ por $\bar{X} \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \bar{Y}^T A\bar{X} &\leq \bar{Y}^T b = b^T \bar{Y} \\ \bar{Y}^T A\bar{X} &= \bar{X}^T A^T \bar{Y} \geq \bar{X}^T c^T = c\bar{X}. \end{aligned}$$

De estas dos últimas expresiones se concluye que

$$Z = c\bar{X} \leq \bar{Y}^T A\bar{X} \leq b^T \bar{Y} = G$$

y el teorema queda demostrado.

El teorema 2.9 únicamente dice que para cualquier par de soluciones factibles (\bar{X} , \bar{Y}) de (P₁) y (D₁), la función objetivo primario es siempre menor o igual a la función objetivo dual.

Teorema 2.10. Teorema de dualidad. Dado un par de problemas primario (P₁) y su correspondiente dual (D₁) únicamente uno y sólo uno de los tres siguientes casos pueden ocurrir.

Ambos programas tienen soluciones óptimas y sus funciones objetivos óptimas son iguales, es decir, si X^o es óptimo para (P₁) y Y es óptimo para (D₁) entonces

$$Z^* = cX^* = b^TY^* = G^*.$$

Si el problema primario (P₁) no tiene soluciones factibles y el problema dual (D₁) tiene al menos una, entonces, el dual tiene una solución óptima no acotada y viceversa, si el problema dual no tiene soluciones factibles y el primario tiene al menos una, entonces, el primario tiene una solución óptima no acotada.

Ambos problemas (P₁) y (D₁) no tienen solución.

Prueba. Está dada en el apéndice B (Teorema B-7).

El teorema 2.10 es muy importante porque la información generada por la solución de uno de los problemas (ya sea el primario o el dual) permite conocer la solución del otro, sin tenerlo que resolver.

Teorema 2.11. La formulación dual de un problema dual genera la representación primaria.

Prueba. Considérese el problema primario:

$$\text{Máx } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

sujeto a

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

(P)

.....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0,$$

cuya formulación dual es

$$\text{Min } G = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \dots + b_mY_m$$

sujeto a

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \dots + a_{m1}Y_m \geq c_1$$

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + \dots + a_{m2}Y_m \geq c_2$$

(D)

.....

$$a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \dots + a_{mn}Y_m \geq c_n$$

$$Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, \dots Y_m \geq 0,$$

Una forma equivalente del programa dual (D) es

$$\text{Máx } -G = -b_1Y_1 - b_2Y_2 - \dots - b_mY_m.$$

sujeto a

$$-a_{11}Y_1 - a_{21}Y_2 - \dots - a_{m1}Y_m \leq -c_1$$

$$-a_{12}Y_1 - a_{22}Y_2 - \dots - a_{m2}Y_m \leq -c_2$$

.....

$$-a_{1n}Y_1 - a_{2n}Y_2 - \dots - a_{mn}Y_m \leq -c_n$$

$$Y_1 \geq 0, \quad Y_2 \geq 0, \quad \dots \quad Y_m \geq 0,$$

La formulación dual de esta última estructura lineal es

$$\text{Min } -Z = -c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_n X_n.$$

Sujeto a

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1n}X_n \geq -b_1$$

$$-a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \dots - a_{2n}X_n \geq -b_2$$

.....

$$-a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \dots - a_{mn}X_n \geq -b_m$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad \dots \quad X_n \geq 0,$$

que es equivalente al programa primario (P). El teorema queda demostrado. Cualquier otra forma se probaría idénticamente utilizando las reglas de equivalencia apropiada.

Teorema 2.12. Dado el siguiente par de programas primario y dual

Primario

Dual

$$\text{Min } Z = cX$$

$$\text{Min } G = b^T Y$$

sujeto a

sujeto a

$$AX \geq b$$

$$A^T Y \leq c^T$$

$$X \geq 0 \quad (P)$$

$$Y \geq 0. \quad (D)$$

una condición necesaria y suficiente para que X y Y sean óptimas respectivamente de (P) y de (D) es

$$Y^T (AX - b) = 0$$

$$X^T (c^T - A^T Y) = 0.$$

Prueba. Como X es factible para (P) y Y para (D) se tiene

$$A^T Y \leq c^T$$

$$AX \geq b$$

$$Y \geq 0$$

$$X \geq 0$$

o lo que es lo mismo

$$AX - b \geq 0$$

$$c^T - A^T Y \geq 0.$$

Multiplicando a la primera desigualdad por $Y^T \geq 0$ y a la segunda por $X^T \geq 0$ no se afecta el sentido de la desigualdad, obteniéndose.

$$a = Y^T (AX - b) \geq 0$$

$$\beta = X^T (c - A^T Y) > 0.$$

Sumando a y β se tiene

$$\begin{aligned} a + \beta &= Y^T (AX - b) + X^T (c^T - A^T Y) \geq 0 \\ &= Y^T AX - b^T Y + cX - Y^T AX \geq 0 \\ &= cX - b^T Y \geq 0 \end{aligned}$$

O sea

$$Z = cX \geq b^T Y = G$$

Pero del teorema 2.9 se tiene que

$$Z = cX < b^T Y = G$$

por lo que concluyendo que

$$Z = cX = b^T Y = G$$

Concluyendo que

$$a + \beta = cX - b^T Y = 0$$

Como se supuso, $a \geq 0$ y $\beta \geq 0$ se tiene que $a = 0$ y $\beta = 0$

El teorema queda demostrado. Este teorema recibe el nombre de teorema de holgura complementaria débil.

Teorema 2.13. Dado un par de programas primario y su correspondiente dual se tienen las siguientes implicaciones:

a) $\bar{Y} > 0$ implica $A^T \bar{Y} = c^T$

b) $A\bar{X} > 0$ implica $\bar{X} = 0$

c) $\bar{X} > 0$ implica

d) $A^T \bar{Y} > c^T$

$$A\bar{X} = b$$

implica

$$\bar{Y} = 0$$

Prueba. Se obtiene directamente de la aplicación del teorema 2.12.

Las relaciones (a), (b), (c) y (d) del teorema 2.13 deben ser ciertas para cualquier par de soluciones óptimas X y Y de un programa primario y su correspondiente dual, respectivamente. Puede darse el caso de que $Y = 0$ y $A\bar{X} = b$, o que $\bar{X} = 0$ y $A^T Y = c^T$. El siguiente teorema, llamado de holgura complementaria evita lo anterior, es decir que no puede ocurrir simultáneamente que $\bar{X} = 0$ y $A^T Y = c^T$, o $\bar{Y} = 0$ y $A\bar{X} = b$.

Teorema 2.14. Teorema de holgura complementaria. Dado un par de programas, primario y su correspondiente dual con soluciones factibles, entonces existen soluciones óptimas \bar{X} y \bar{Y} tal que

$$(A\bar{X} - b) + \bar{Y}^T > 0$$

y

$$(c^T - A^T Y) + \bar{X}^T > 0.$$

Prueba. Aparece en el apéndice B (teorema B-8).

El teorema 2.14 implica que

- a) si $(A\bar{X} - b) = 0$ entonces $\bar{Y} > 0$,
- b) si $\bar{Y} = 0$ entonces $A\bar{X} - b > 0$,
- c) si $(c^T - A^T Y) = 0$ entonces $\bar{X} > 0$,
- d) si $\bar{X} = 0$ entonces $c^T - A^T Y > 0$,

Solución de problemas duales

La solución de un problema lineal primario por medio del método simplex, resuelve implícitamente el problema dual.

Supóngase un problema primario en forma canónica

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$AX = b$$

$$X \geq 0.$$

Supóngase que la matriz de coeficientes tecnológicos A se ha partido en un base B y el complemento de la partición N . Es decir

$$A = (B | N).$$

Entonces el programa primario anterior puede escribirse

$$\text{Máx } Z = c_B X_B + c_N X_N$$

sujeto a

86

$$BX_B + NX_N = b$$

$$X_B \geq 0, X_N = 0.$$

La solución de este problema, como ya se sabe, consiste en hacer al vector X_N que no está en la base igual a cero y resolver el vector básico

X_B en términos de la base B, es decir $X_B = B^{-1}b$. La función objetivo se convierte entonces en

$$Z = c_B B^{-1}b.$$

La función objetivo dual como se vio anteriormente es

$$b^T Y = Y^T b$$

1	$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$
0	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

En condiciones de optimalidad, la función objetivo primaria es igual a la función objetivo dual, es decir

$$\hat{c}_B \hat{B}^{-1}b = \hat{Y}^T b,$$

donde \hat{B}^{-1} es la inversa de la base óptima \hat{B} , \hat{c}_B es el vector de los precios unitarios correspondientes al vector básico óptimo \hat{X}_B ($\hat{X}_B = \hat{B}^{-1}b$) y \hat{Y} es el vector dual óptimo. De la última igualdad se concluye por analogía en ambos lados de la igualdad que:

$$\hat{Y}^T = \hat{c}_B \hat{B}^{-1},$$

La estructura inicial de un programa lineal, al aplicar el método simplex es

	Variables	Variables de	
Z	originales	holguras	
1	-c	0	0
0	A	1	b

y tras cada iteración la estructura se convierte en

$z_j - c_j$	$z_j - c_j$
correspondientes	correspondientes
a las variables	a las variables
originales	de holguras

Se ha identificado el lugar donde queda representada implícitamente la solución del problema dual. La solución óptima del problema dual queda inscrita en la posición $z_j - c_j$ correspondiente a las variables X de holgura.

Interpretaciones económicas de las variables duales

Se ha visto que

$$\hat{Y} = \hat{c}_B \hat{B}^{-1}$$

donde \hat{B}^{-1} es la inversa de la base óptima \hat{B} correspondiente a un programa primario. Multiplicando ambos lados de la igualdad por la base óptima \hat{B} se tiene

$$\hat{Y}^T \hat{B} = c_B \hat{B}^{-1} \hat{B}$$

$$\hat{Y}^T \hat{B} = c_B.$$

Como \hat{B} está compuesta por m columnas a_j de A , la igualdad anterior puede expresarse en términos de las componentes a_j de la base de la siguiente manera:

$$\hat{Y}^T a_j = c_{Bj}, j \text{ en } B$$

donde Y es el vector de las variables duales. La última igualdad es equivalente a la definición de z_j dada con anterioridad, y que era

$$z_j = \hat{Y}^T a_j.$$

Si se toma el vector de recursos b y se incrementa en una pequeñísima cantidad³⁵ Δb , tal que al base óptima actual \hat{B} no cambie, la $^{35} \Delta b$, es un incremento vectorial

nueva solución X_B , seguirá siendo óptima, si es que cumple la siguiente condición:

$$X_B = \hat{B}^{-1}(b + \Delta b) \geq 0.$$

Como al base \hat{B} no ha cambiado, tampoco ha cambiado \hat{B}^{-1} , ni tampoco las $z_j - c_j$, es decir

$$z_j - c_j = c_B \hat{B}^{-1} a_j - c_j, \text{ para toda } j \in A$$

sigue igual que anteriormente.

La función dual, sin embargo, sí ha sufrido un cambio, pues ahora

$$\hat{G} = \hat{Y}^T (b + \Delta b)$$

$$= \hat{Y}^T b + \hat{Y}^T \Delta b$$

$$= G + \hat{Y}^T \Delta b$$

$$= Z + \hat{Y}^T \Delta b,$$

donde G es el valor óptimo dual o primario anterior. Esta última igualdad indica que un pequeño incremento en el vector de recursos ha cambiado el valor óptimo de la función objetivo dual, y por lo tanto, de la función objetivo primario. Ese cambio es $\hat{Y}^T \Delta b$. Si el cambio en el vector b es unitario, la función objetivo cambiará en \hat{Y} unidades, es decir, que si la componente b_i ($i = 1, \dots, m$) de b , sufre un cambio unitario, la función objetivo sufrirá un cambio de Y_i (la i -ava componente del vector dual, $i = 1, \dots, m$) unidades. Resumiendo

$$9Y_i = \frac{\partial Z}{\partial b_i}$$

Es importante notar que esta interpretación económica es válida únicamente para cambios unitarios en el vector b , ya que éstos no afectan por lo general la estructura de la base óptima \hat{B} .

Los cambios que no son unitarios se analizarán en la sección que a continuación se presenta bajo el nombre de análisis de sensibilidad y programación paramétrica.

Este tipo de interpretación económica de las variables duales se conoce con el nombre de precios sombra.

Se sabe que a_{ij} mide la cantidad de recurso i que absorbe una unidad de la actividad j . Entonces $\sum_{i=1}^m a_{ij} Y_i$ cuantifica el costo económico de utilizar la actividad X_j , evaluada de acuerdo con los precios sombra $Y_i, i = 1, \dots, m$. Las restricciones duales aseguran que en el punto óptimo no se utilizará una actividad X_j cuya utilidad $c_j X_j$ sea menor a su costo económico $\sum_{i=1}^m a_{ij} Y_i$ ³⁶

Si bien $Y_i, i = 1, \dots, m$ es el precio sombra del programa

$$\text{Máx } eX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0.$$

cuya interpretación económica se dio en los párrafos anteriores, $X_j, j = 1, \dots, n$ es el precio sombra del programa

$$\text{Min } b^T Y$$

sujeto a

$$A^T Y \leq c^T$$

$$Y \geq 0.$$

En este caso $X_j, j = 1, \dots, n$ mide el cambio en el valor de la función objetivo $\sum_{i=1}^m b_i Y_i$ debido a un cambio marginal³⁷ en el valor del costo unitario c_j .

³⁶Esto quiere decir que el proceso fuerza a todas las actividades X_j , cuya utilidad sea menor a su costo económico, a ser no-básicas ($X_j = 0, j \in N$), mientras que, aquellas actividades cuya utilidad sea por lo menos igual a su costo económico, serán básicas ($X_j \geq 0, j \in B$) en el punto óptimo.

³⁷ El cambio marginal puede ser en aumento o disminución del valor original.

Método dual simplex

Una de las aplicaciones inmediatas de la propiedad de dualidad, es en la solución de aquellos programas lineales que tienen más restricciones que variables. Como el grado de dificultad y el número de iteraciones del método simplex está en función del número de restricciones y no en el

número de variables,³⁸ siempre es bueno resolver por el método simplex aquellos problemas lineales donde en la matriz A de m por n, m sea menor a n. En el caso contrario de que m sea mayor a n, resolviendo la formulación dual se tiene un nuevo programa lineal en donde el número de filas de A^T es menor que el número de columnas.

La segunda aplicación de la dualidad es en la interpretación económica de los cambios marginales en el vector de recursos b y sus efectos en el valor de la función objetivo. Estos cambios y sus efectos se analizarán con más detalle en la siguiente sección de éste capítulo.

Una tercera aplicación de la dualidad es la solución de problemas lineales por medio de un nuevo algoritmo llamado el método dual simple, que se explica a continuación. Una vez explicado este método se compara con el método simple y se ve en qué casos conviene utilizar uno y en qué casos otro.

Dado un programa lineal primario y su correspondiente dual

$$\text{Máx } Z = eX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

(P)

$$\text{Min } G = b^T Y$$

sujeto a

$$A^T Y \geq c^T$$

$$Y \geq 0,$$

se resumen los pasos del método simplex.

Paso 1. Se seleccionará m de las n columnas de A en cada iteración para construir la base B.

Paso 2. Se utilizan operaciones matriciales elementales en cada iteración para hacer todos los elementos $z_j - c_j$ en B igual a cero y convertir a la base B de m por m en una matriz identidad. El lado derecho del tableau identifica en cada iteración al punto extremo, dado por $X_n = \hat{B}^{-1}b$ y éste vector debe ser no-negativo. Si al empezar el proceso iterativo no se puede tener una base cuya estructura corresponde a una matriz identidad, se agregan tantos vectores artificiales como sea necesario.

³⁸ El tamaño de la base queda determinado por el número de filas de la matriz A.

(D)

Paso 3. El vector a_x que se selecciona para entrar a la base es aquel cuya $z_j - c_j$ no en B, sea el más negativo. El vector a, que sale de la base se selecciona en base a una regla que

asegura que se mantiene $X_a = B^{-1}b \geq 0$. 90

Paso 4. La columna a_x se convierte en el vector unitario c_r , con la componente Y_{rx} (llamado "pivote"), igual a uno. Estos cambios que convierten al vector a_x en el vector c_r , se llevan a cabo mediante operaciones matriciales elementales. Se repite el paso 3, hasta que todos los elementos $z_j - c_j \geq 0$, para toda j en A .

Es importante hacer notar que en todas las iteraciones del método simplex se mantiene la factibilidad primaria, es decir, que $X_B = B^{-1}b \geq 0$, y que al alcanzar optimalidad $z_j - c_j \geq 0$ para toda j en A . La solución óptima presenta factibilidad primaria y factibilidad dual.

Para ver que $z_j - c_j \geq 0$, j en A , significa factibilidad dual se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned} z_j - c_j &= c_B B^{-1} a_j - c_j \\ &= Y^T a_j - c_j \end{aligned}$$

Si $z_j - c_j \geq 0$, para toda j en A , eso significa que

$$Y^T a_j - c_j \geq 0, \text{ para toda } j \text{ en } A,$$

$$Y^T a_j \geq c_j, \text{ para toda } j \text{ en } A,$$

o en notación condensada

$$Y^T A \geq c$$

○

$$A^T Y \geq c^T$$

que es precisamente la factibilidad dual.

Así como en el método simplex se requiere que en cada iteración exista factibilidad primaria, es decir, $X_B = B^{-1}b \geq 0$, así en el método que se explica a continuación se requiere que en cada iteración exista factibilidad dual, es decir $z_j - c_j \geq 0$ para toda j en A . Los pasos del método dual simplex son los siguientes:

Paso 1. Empiece con un tableau donde todas las $z_j - c_j \geq 0$, para toda j en A .

Paso 2. Si $X_B \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, m$, el tableau actual es óptimo. Si no, selecciónese como vector de salida de la base, aquél cuyo correspondiente X_B , sea el más negativo.

Paso 3. El vector a_x , de entrada será aquél que satisfaga la siguiente regla

$$\frac{z_x - c_x}{Y_{ix}} = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{ij}} \mid Y_{ij} < 0 \right\}.$$

Paso 4. La columna a_x se convierte en el vector unitario c_x con el pivote Y_{ik} igual a uno. Los cambios se llevan a cabo con operaciones matriciales elementales. Regrésese al paso 2 y repítase hasta que las condiciones de optimalidad se cumplan.

Si durante la aplicación del paso 3, todos los elementos $Y_{ik} \geq 0$, el programa original no tiene solución.³⁹

Nótese que existe factibilidad dual, pues todas las $z_j - c_j \geq 0$, para toda j en A . La solución actual no es óptima pues $X_B \not\geq 0$. Se selecciona al vector a_1 como el vector que sale, pues $X_{B_4} = -6$ es el más negativo.

Para seleccionar al vector que entra se usa la regla⁴⁰

³⁹ Otra manera de detectar problemas sin solución.

⁴⁰ El elemento Y_{B_4} , resulta ser el $Y_{2,2}$.

$$\frac{z_x - c_x}{Y_{B_4x}} = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{B_4j}} \mid Y_{B_4j} < 0 \right\}.$$

Una vez que se halla resuelto un programa de programación lineal, puede darse el caso de que uno o varios parámetros de la formulación original, tales como los precios unitarios o la disponibilidad de ciertos recursos cambien, dando origen a un nuevo problema. ¿Es necesario en ese caso volver a resolver el problema desde el principio?

La respuesta es, afortunadamente no. Se dice afortunadamente, porque en términos de iteraciones y por consiguiente en tiempo de computadora existen métodos, llamados de análisis de sensibilidad, que permiten ahorrar muchas iteraciones, al resolver el nuevo problema partiendo de la solución óptima del problema original. El ahorrar iteraciones implica un ahorro considerable en los costos de utilización de una computadora.

El nuevo problema puede diferir del original en uno o varios de los siguientes cambios que pueden ocurrir simultáneamente.

c) Cambio en el vector b , o sea, cambios en la disponibilidad de recursos.

b) Cambios en el vector c , o sea, cambios en los precios o costos unitarios.

c) Cambios en la matriz A , o sea, cambios en los coeficientes tecnológicos a_{ij} .

d) Cambio en el vector X , o sea, cambios en el número de actividades, cuyo nivel debe decidirse.

e) Cambios en el número de restricciones del sistema lineal a optimizarse.

Los primeros tres cambios pueden ocurrir en forma discreta o continua. El cambio discreto tanto en los vectores b , c o en los elementos a de A , significa que una o varias componentes originales de dichos vectores o matriz son reemplazados por nuevas cantidades. El cambio continuo es aquél en donde los vectores b , a_j , c sufren cambios descritos por

$$b + \theta \Delta b \quad , -\infty < \theta < \infty,$$

$$c + a \Delta c \quad , -\infty < a < \infty,$$

$$a, + y \Delta a_{j,j \in N}, \quad , -\infty < y < \infty,$$

En donde Δb , Δa_j , Δc de son vectores, respectivamente con las mismas dimensiones que los vectores b , a_j , c y, θ , a son escalares que pueden tomar cualquier valor real. El análisis de sensibilidad que estudia los cambios continuos se llama programación paramétrica.

Se describen primero los cambios discretos y después los cambios continuos.

Análisis de sensibilidad para cambios discretos

La estructura del tableau inicial de cualquier programa lineal de forma canónica es:

Z	Variables originales $X_1 \quad X_2 \dots X_n$	Variables De holgas $X_{n+1} \dots X_{n+m}$	
1	-c	0	0
0	A	1	b

La estructura del tableau óptimo es:

	$Z_1 - c_1 \quad Z_2$ $- c_2 \dots Z_n - c_n$	$Z_{n+1} - c_{n+1} \dots Z_{n+m}$ $- c_{n+m}$	
1	$c_B B^{-1} A - c$	$c_B B^{-1}$	$Z = c_B X_B$
0	$B^{-1} A$	B^{-1}	$X_B = B^{-1} b$

Por facilidad de notación se va a representar al vector dual $c_B B^{-1}$ por II , que tiene como sus m componentes a

$$II = (II_1, II_2, \dots, II_m)$$

$$II = c_B B^{-1}.$$

El tableau óptimo puede escribirse como

01	$II A - c$	II	$c_B X_B$
	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

El análisis de sensibilidad se basará en el manejo de esta última estructura. Se analiza a continuación cada uno de los cambios.

a) Cambio del vector b

Supóngase que el problema original (PO), cuya solución óptima se tiene a la mano, es

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0. \quad (\text{PO})$$

Se cambiará en forma discreta el vector b , cuyo nuevo valor será $b + \Delta b$, donde Δb es un vector con m componentes. El nuevo problema (PN) a resolver es

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$\begin{aligned} AX &\leq b + \Delta b \\ X &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{PN})$$

El análisis de sensibilidad para este tipo de cambio toma como punto de partida la solución óptima de (PO). Supóngase que B^{-1} es la inversa de la base óptima asociada a (PO). Entonces la solución óptima

El análisis de sensibilidad para este tipo de cambio toma como punto de partida la solución óptima de (PO). Supóngase que B^{-1} es la inversa de la base óptima asociada a (PO). Entonces la solución óptima de (PO) es

$$X_B = B^{-1}b \geq 0$$

Y

$$Z = c_B X_B$$

Al cambiar b a $b + \Delta b$, el vector X_B cambia a uno nuevo \hat{X}_B dado por;

$$\hat{X}_B = B^{-1}(b + \Delta b)$$

Si $\hat{X}_B \geq 0$, entonces será la nueva solución óptima de (PN). Para que $\hat{X}_B \geq 0$ es necesario que $B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$. Si $B^{-1}(b + \Delta b) \not\geq 0$, entonces \hat{X}_B no es factible y habrá que usar el dual simplex para restaurar la factibilidad y de hecho la optimalidad de (PN). El dual simplex, en caso de usarse, deberá aplicarse al tableau óptimo de (PO), cambiando la columna X_B por la nueva \hat{X}_B .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., y Orlin, J. B. (2009). Network flows: Theory, algorithms, and applications. Prentice Hall.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., y Sherali, H. D. (2011). Linear programming and network flows (4a ed.). Wiley.

Bertsimas, D., y Tsitsiklis, J. N. (2004). Introduction to linear optimization. Athena Scientific.

Bingham, R. (1983). Programas de computación para formular alimentos. Avicultura Profesional.

Cohen, M. A., y Murdock, J. (2012). Operations research: A practical introduction. Wiley.

Daniel Izquierdo Granja y Juan José Ruiz Ruiz. (2006). PHPSIMPLEX (Versión 0.81) [Software]. https://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm

Dantzig, G. B., y Thapa, M. (2003). Linear programming: Foundations and extensions (2a ed.). Springer.

Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. P. (1993). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa. Prentice Hall.

Gallagher, H., y Watson, J. (1990). Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. McGraw-Hill Interamericana.

Gass, S. I. (1990). An illustrated guide to linear programming. Dover Publications.

González Ariza, Á. L., y García Llinás, G. A. (2015). Manual práctico de investigación de operaciones I (4a ed.). Editorial Universidad del Norte.

Hillier, F. S., y Lieberman, G. J. (2015). Introduction to operations research (10a ed.). McGraw-Hill.

Kall, P., y Mayer, S. (2005). Stochastic optimization: Methods and applications. Springer.

Luenberger, D. G., y Ye, Y. (2008). Linear and nonlinear programming (3a ed.). Springer.

Moore, J. H., Weatherford, L. R., Eppen, G. D., Gould, F. G., y Schmidt, C. (2000). Investigación de operaciones en la ciencia administrativa (5a ed.). Prentice Hall.

Murty, K. G., y Katta, S. (1983). Linear programming. Wiley.

Peñafiel, L. (1976). Programación lineal. Trillas.

Prawda Witenberg, J. (1977). Métodos y modelos de investigación de operaciones: Vol. 1. Limusa.

Rardin, R. L. (2016). Optimization in operations research (2a ed.). Pearson.

Rincón Abril, L. A. (2001). Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas. Universidad Nacional de Colombia.

Sasieni, M. W., y Cohen, R. (2007). Operations research: A practical guide to the use of OR techniques. Wiley.

Shamblin, J., y Stevens, G. T. (1988). Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental. McGraw-Hill Interamericana.

Taha, H. A. (2017). Operations research: An introduction (10a ed.). Pearson.

Varela, J. E. (1991⁸⁷). Introducción a la investigación de operaciones. Fondo Editorial Interamericana.

Winston, W. L. (2004). Operations research:
Applications and algorithms (4a ed.). Brooks/Cole.

ISBN: 978-9942-33-981-2



Compás
capacitación e investigación